

UNIwersYTET WARSZAWSKI

Wydział Fizyki

Kazimierz Napiórkowski

MATEMATYKA

dla
Nauczycielskiego Kolegium Fizyki



Wydanie V rozszerzone i poprawione

WARSZAWA 2001

Spis treści

0.0	Wstęp	2
0.0.1	Po co jest ten skrypt	2
0.0.2	Jak z niego korzystać	2
1	Funkcje jednej zmiennej	5
1.1	Zbiory, relacje, odwzorowania	5
1.1.1	Zbiory	6
1.1.2	Relacje	7
1.1.3	Odwzorowania	8
1.2	Zasada indukcji matematycznej	13
1.2.1	Dowodzenie przez indukcję	13
1.2.2	Definicje i wzory rekurencyjne	15
1.3	Ciągi	17
1.3.1	Granica ciągu	18
1.3.2	Nieelementarne własności ciągów	20
1.3.3	Ciągi rozbieżne do nieskończoności	22
1.4	Funkcje ciągłe	24
1.4.1	Definicja i podstawowe własności	24
1.4.2	Nieelementarne własności funkcji ciągłych	25
1.4.3	Granica funkcji	28
1.4.4	Metoda kolejnych przybliżeń	29
1.5	Rachunek różniczkowy	35
1.5.1	Pochodna	35
1.5.2	Podstawowe własności i obliczanie pochodnych	38
1.5.3	Twierdzenia o wartości średniej i ich konsekwencje	41
1.5.4	Pochodne wyższych rzędów	47
1.5.5	Badanie funkcji	51

1.5.6	Funkcje wypukłe	54
1.5.7	Funkcja pierwotna (całka nieoznaczona)	56
1.6	Rachunek całkowy	66
1.6.1	Całka Riemanna	66
1.6.2	Twierdzenie podstawowe	70
1.7	Szeregi	74
1.7.1	Szeregi liczbowe	74
1.7.2	Szeregi potęgowe	79
2	Algebra liniowa i geometria	81
2.1	Liczby zespolone	81
2.1.1	Interpretacja geometryczna liczb zespolonych	83
2.1.2	Pierwiastkowanie liczb zespolonych	85
2.1.3	Własności wielomianów w dziedzinie zespolonej	87
2.1.4	O pewnym zastosowaniu liczb zespolonych	91
2.1.5	O historii liczb zespolonych	94
2.1.6	O funkcjach elementarnych z innego punktu widzenia	98
2.2	Wektorowa przestrzeń euklidesowa	103
2.2.1	Baza i wymiar przestrzeni wektorowej	105
2.2.2	Równania prostych i płaszczyzn	107
2.2.3	Współrzędne	110
2.3	Układy równań i przekształcenia liniowe	111
2.3.1	Rząd macierzy	113
2.3.2	Układy równań liniowych	115
2.3.3	Wyznacznik	116
2.3.4	Iloczyn wektorowy	122
2.3.5	Odwzorowania liniowe i macierze	124
2.3.6	Odwzorowania liniowe symetryczne	128
2.4	Krzywe i powierzchnie drugiego stopnia	132
2.4.1	Styczna do krzywej drugiego stopnia	136
2.4.2	Ogniska i kierownice krzywych drugiego stopnia	137
3	Równania różniczkowe zwyczajne	141
3.1	Ogólne własności	141
3.1.1	Równania różniczkowe liniowe	146

4	Funkcje wielu zmiennych	165
4.1	Rachunek różniczkowy	165
4.1.1	Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych . . .	166
4.1.2	Pochodna funkcji wielu zmiennych	167
4.1.3	Lokalna odwracalność, funkcje uwikłane, ekstre- ma związane	176
4.1.4	Styczne do powierzchni, ekstrema związane . . .	182
4.2	Rachunek całkowy	188
4.2.1	Całkowanie funkcji wielu zmiennych	188
4.2.2	Całki krzywoliniowe i powierzchniowe	197
4.2.3	Twierdzenie Stokesa i pokrewne	206
4.2.4	Potencjały	215
5	Rachunek prawdopodobieństwa	220
5.1	Podstawowe pojęcia	220
5.2	Prawdopodobieństwo warunkowe. Zdarzenia niezależne	224
5.3	Zmienna losowa. Wartość oczekiwana.	227
5.3.1	Funkcja charakterystyczna	233
5.4	Prawa wielkich liczb i twierdzenia graniczne	235
5.4.1	Prawo wielkich liczb	235
5.4.2	Przykład twierdzenia granicznego	238
5.5	Kilka słów o interpretacji prawdopodobieństwa	239

0.0 Wstęp

0.0.1 Po co jest ten skrypt

Dawno temu, kiedy byłem na drugim roku studiów, we wstępie do skryptu z astronomii (chyba prof. Zonna) przeczytałem, że głównym celem, który przyświecał autorowi było uwolnienie studenta od *szkodliwej* (jakoś tak było tam napisane) konieczności notowania na wykładzie. Po pierwszym zaskoczeniu przyznałem temu zdaniu głęboką słuszość — notowanie podczas wykładu rzeczywiście bardzo utrudnia śledzenie biegu myśli i zastanawianie się nad jego treścią. Oczywiście, umiejętność notowania jest bardzo ważna i pożyteczna, a wyrabianie jej u studentów uważam za godne popierania. Dobrze jednak, jeśli wykład ma jeden przedmiot — na przykład matematykę. Jeśli chcemy poznać nowy, bardzo wielki kraj, to dobrze jest mieć jakiś pojazd, aby zwiedzania nie łączyć z nauką chodzenia. Piechotą jest co prawda zdrowiej, ale samochodem na ogół dojedzie się dalej (choćby potem i tak trzeba będzie przejść mały kawałek na własnych nogach).

Skrypt jest jednak skryptem, a nie samouczkiem. Wykładu nie zastępuje — jego celem jest umożliwienie lepszego korzystania z wykładu. Nie twierdzą, iż wykład jest tak wspaniały, że żadna książka nie jest w stanie go zastąpić. Po pierwsze, są to różne środki przekazywania myśli, po drugie, ta właśnie książeczka napisana została w zupełnie innym celu i raczej nie należy się spodziewać szczególnego pożytku z jej przeczytania, bez wysłuchania wykładu i czynnego udziału w ćwiczeniach. Jeśli kilku osobom udało się mimo to zdać egzamin na podstawie samego skryptu, to niczego jeszcze nie dowodzi. Nie odrzucając całkowicie możliwości, iż chodzi tu o geniuszy, za bardziej prawdopodobne uważałbym zbyt mało wnikliwe egzaminowanie, a więc efektem jest tylko otrzymanie trójczyny, a nie wiedza, która mimo wszystko jest do czegoś potrzebna (inaczej nikt by się nie zajmował nauczaniem tego właśnie przedmiotu).

0.0.2 Jak z niego korzystać

Najlepiej przeczytać kawałek skryptu *przed* wykładem. Jeśli się czegoś nie zrozumie, to na wykład przyjdzie się z pytaniem – o co tu chodzi?

Właśnie o to chodzi, aby na wykład przychodzić ze swoimi pytaniami (których wcale nie trzeba zadawać, trzeba je mieć). Ten, kto zrozumiał wszystko, zobaczy, że wykład zawiera całkiem sporo innych treści, o których nie wspomniano w skrypcie; będzie miał okazję zastanowić się nad tym, co już wie. Na jednym wykładzie omawia się zwykle jeden, dwa, najwyżej trzy paragrafy (4–8 stron), nie jest to więc wielka praca, a pożytek znacznie większy niż z kucia przed sesją. Poza tym, na ćwiczeniach obowiązuje znajomość materiału omówionego na wykładzie.

Po skrypcie można pisać, mazać rysować itp. Zapisanie tylko swojego komentarza, w przeciwieństwie do notowania wykładu, nie przeszkadza w podążaniu za myślą wykładowcy. Wykład z własnym komentarzem jest doskonałą pomocą przed egzaminem. Warto tu wspomnieć, że znane są przypadki, gdy komentarz był więcej wart od samego dzieła.

* * *

Rozpoczynamy wspólną podróż po wielkim obszarze myśli — matematyce. Jeśli użyć porównania żeglarskiego, będzie to raczej żegluga przybrzeżna, a jeszcze nie pełnomorska, tym bardziej nie oceaniczna. Wykładowca jest w niej przewodnikiem, może sternikiem, każdy jednak — i na tym polega istota przygody — przebywa całą drogę osobiście. Możliwie najpełniejsze, aktywne uczestnictwo w tej podróży przynosi najwięcej pożytku (kto cały czas siedzi w kabinie, najprawdopodobnie zapamięta tylko chorobę morską). Nie chodzi tu zresztą jedynie (a nawet przede wszystkim) o pożytek. Jakże aktualnie brzmią słowa Keplera na ten temat:

Czy trzeba pożytek z dzieł boskich oceniać w obiegowych pieniądzach tak, jak przystawki? Bo cóż, pytam, pomaga głodnemu żołądkowi poznanie praw natury, czy też cóż cała pozostała astronomia? A jednak rozumni ludzie nie słuchają tego barbarzyństwa, które krzyczy, iż z tego powodu należy zaniechać tych studiów. Uznajemy malarzy, którzy cieszą wzrok, muzyków, którzy cieszą słuch, chociaż nie przynoszą żadnego zysku

*naszym interesom. I nie tylko za godną człowieka, lecz nawet za złą uważa się przyjemność, która pochodzi od tych dwóch sztuk. Czyż więc nie jest barbarzyństwem i głupotą zazdrościć przyjemności należnej umysłowi, wzrokowi zaś i słuchowi nie zazdrościć?*¹

Szukajmy więc razem piękna obecnego w matematyce. Rola wykładowcy, nauczyciela jest tutaj bardzo skromna — nie może on poznawać i odkrywać za ucznia. W tym sensie nauczanie jest niemożliwe. Sokrates porównywał swoją rolę do zawodu swojej matki — położnej. Chciał pomagać uczniom w samodzielnym rodzeniu myśli. Przekładając to na język codzienny, powiedziałbym to tak: Ja was niczego nie nauczę, ale jeśli sami będziecie się uczyć, to spróbuję wam w tym pomagać.

Książeczkę tę poświęcam moim studentom i przyjaciółom (te dwa zbiory wcale nie są rozłączne), bez których nie byłoby ani powodu, ani możliwości jej powstania.

K. N.



P.P. Obecne wydanie skryptu ma pełnić podwójną rolę. W niedługim czasie przewiduje się otwarcie nowego kierunku studiów, przeznaczonych dla przyszłych nauczycieli przedmiotu o nazwie „Przyroda”. Program studiów tego nowego kierunku zawiera matematykę w skromniejszym zakresie niż program Nauczycielskiego Kolegium Fizyki. Wydaje się jednak, że nie miałyby większego sensu pisanie osobnego skryptu. Różnica między programem nowego kierunku a programem NKF będzie polegała głównie na usunięciu pewnych działów. Aby ułatwić pracę studentom „Przyrody”, przeznaczone dla nich części skryptu zaznaczone zostały znakiem pingwina — sympatycznego ptaka odznaczającego się podobno wielką ciekawością. Nie oznacza to, że czytanie pozostałych części jest dla nich szkodliwe czy zabronione — przeciwnie.

K. N.

¹Jan Kepler *Tajemnica Kosmosu* tłum. M. Skrzypczak i E. Zakrzewska-Gębka, Zakł. Nar. im. Ossolińskich. Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk 1972.

Rozdział 1

Funkcje jednej zmiennej

1.1 Zbiory, relacje, odwzorowania



Na początek powtórzymy kilka oznaczeń z dziedziny logiki, które przydadzą się przy zapisywaniu niektórych bardziej skomplikowanych treści. Materiał ten traktujemy jako *wygodny sposób zapisu*, nie wnikamy w zagadnienia logiki matematycznej.

Niech $\alpha, \beta, \gamma \dots$ oznaczają zdania. Możemy tworzyć z nich nowe zdania za pomocą następujących znaków¹:

α'	<i>czytamy jako</i>	<i>nie α</i>
$\alpha \wedge \beta$	<i>...</i>	<i>α i β</i>
$\alpha \vee \beta$	<i>...</i>	<i>α lub β</i>
$\alpha \Rightarrow \beta$	<i>...</i>	<i>jeżeli α to β (albo: nie α lub β)</i>
$\bigwedge_{x \in A} \alpha(x)$	<i>...</i>	<i>dla każdego $x \in A$ $\alpha(x)$</i>
$\bigvee_{x \in A} \alpha(x)$	<i>...</i>	<i>istnieje $x \in A$ takie, że $\alpha(x)$</i>

Tworzenie zaprzeczeń zdań złożonych:

¹ $\alpha(x)$ nie jest, ściśle biorąc, zdaniem, lecz formą zdaniową, czyli czymś, co staje się zdaniem po podstawieniu w miejsce x elementu zbioru A . Zamiast \bigwedge niektórzy piszą \forall , a zamiast \bigvee – \exists .

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta)' &\iff \alpha' \vee \beta' \\
(\alpha \vee \beta)' &\iff \alpha' \wedge \beta' \\
(\alpha')' &\iff \alpha \\
(\alpha \Rightarrow \beta)' &\iff \alpha \wedge \beta' \\
(\bigwedge_{x \in A} \alpha(x))' &\iff \bigvee_{x \in A} (\alpha(x))' \\
(\bigvee_{x \in A} \alpha(x))' &\iff \bigwedge_{x \in A} (\alpha(x))'
\end{aligned}$$

Przykład. Spróbujmy zapisać zdanie "Ciąg (a_n) jest ograniczony".

$$\bigvee_{M \in \mathbf{R}} \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} |a_n| \leq M$$

A tak wygląda jego zaprzeczenie:

$$\bigwedge_{M \in \mathbf{R}} \bigvee_{n \in \mathbf{N}} |a_n| > M$$

Widać, że nie trzeba przy tym dużo myśleć.



1.1.1 Zbiory

Pojęcie zbioru pojawiło się w matematyce bardzo późno (II połowa XIX w. – G.Cantor, R.Dedekind) w związku z problemami podstaw analizy matematycznej. Okazało się ono płodne i w innych dziedzinach. Interesować nas będą przede wszystkim sposoby określania zbiorów:

- Wypisanie elementów zbioru w nawiasach $\{\}$, np. $\{1,3,7\}$,
- Podanie zasady, według której z danego zbioru wyróżnia się niektóre elementy: $\{x \in A : \alpha(x)\}$. Napis tego rodzaju oznacza zbiór tych elementów x zbioru A , dla których $\alpha(x)$ jest prawdziwe. Przykłady: $\{x \in \mathbf{R} : x^2 > 1\}$, $\{n \in \mathbf{N} : \bigvee_{m \in \mathbf{N}} n = 3m\}$.
- Niektóre zbiory mają imiona własne:

\mathbf{R} – zbiór liczb rzeczywistych,
 \mathbf{N} – zbiór liczb naturalnych,
 \mathbf{C} – zbiór liczb zespolonych,
 \mathbf{Z} – zbiór liczb całkowitych,
 \mathbf{W} lub \mathbf{Q} – zbiór liczb wymiernych.

- Działania na zbiorach, czyli pewne sposoby tworzenia z danych zbiorów nowych, np. $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

1.1.2 Relacje



Często spotykamy wyrażenia typu $x < y$ lub $x + y = z$. Czy jest to coś istotnie różnego od zbiorów, czy też da się opisać za pomocą pojęcia zbioru? Zauważmy, że dotyczą one uporządkowanych par (lub trójek) liczb rzeczywistych. Rozważmy więc zbiór par uporządkowanych (x, y) liczb rzeczywistych. Zbiór ten oznaczajmy $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ i nazywajmy iloczynem kartezjańskim tych zbiorów. Relacja mniejszości jest jednoznacznie wyznaczona przez wyróżnienie podzbioru $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ złożonego z tych elementów, które ją spełniają. W dalszym ciągu relacją będziemy nazywali po prostu podzbiór iloczynu kartezjańskiego kilku zbiorów. Zachowamy jednak tradycyjną notację: nie będziemy pisać np. $(x, y) \in <$, lecz $x < y$. Szczególnie ciekawe są relacje równoważności.

Definicja 1 Niech A będzie zbiorem. Mówimy, że relacja $\sim \subset A \times A$ jest relacją równoważności, jeśli posiada ona następujące trzy własności:

1. $x \sim x$ (zwrotność),
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (symetria),
3. $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (przechodność).

Znaczenie relacji równoważności związane jest z tym, że wyznaczają one podział zbioru na części zwane *klasami abstrakcji*. Zachodzi mianowicie następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1 *Niech \sim będzie relacją równoważności na zbiorze A . Zbiór A przedstawia się wtedy (i to tylko na jeden sposób) w postaci sumy zbiorów $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ (zwanymi klasami) o takiej własności, że $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy x i y należą do tej samej klasy.*

Przykład. W zbiorze liczb naturalnych \mathbf{N} określamy następującą relację: $n \equiv m \pmod{3} \stackrel{\text{def}}{\iff} n - m$ jest podzielne przez 3. Sprawdzamy, że jest to relacja równoważności. Łatwo jest zauważyć, że $n \equiv m \pmod{3}$, gdy n i m przy dzieleniu przez 3 dają takie same reszty. Stąd już widać, jakie są klasy – jedną z nich tworzą wszystkie liczby podzielne przez 3, drugą liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 1 itd.

Inny przykład. Bawimy się figurami szachów magnetycznych. Figury te mają u podstawy małe płaskie magnesiki. Dwie różne figury zetknięte podstawami albo się przyciągają, albo odpychają. Która z relacji — przyciąganie, czy odpychanie może być relacją równoważności? Jaka własność tej relacji jest odpowiedzialna za to, że są dwie klasy?



1.1.3 Odwzorowania

Odwzorowanie i funkcja to właściwie synonimy. Nie będziemy odróżniali tych pojęć. Spróbujmy natomiast zorientować się w różnych sposobach definiowania funkcji:

- podanie wzoru, np. $f(x) = \sin(x^2)$. Pewną trudność sprawia w tym przypadku odróżnianie funkcji od jej wartości w punkcie x (co jest ważne, bo przecież przepis na babkę z rodzynekami to nie to samo, co taka babka). Dlatego czasami, aby zaznaczyć, że mamy na myśli funkcję, a nie jej wartość w punkcie x będziemy pisali $f(\cdot)$ albo po prostu f . Nie zawsze jednak jest to możliwe, bo jeśli zamiast $\sin(x)$ napiszemy $\sin(\cdot)$ lub \sin , to co napisać zamiast x^2 ?
- Można podać tablicę wartości funkcji dla kolejnych wartości argumentów. Bardzo dobrym przykładem są szkolne tablice funkcji trygonometrycznych, logarytmów itp. Praktyczne korzystanie z tablic zawiera w sobie umiejętność interpolacji czyli znajdowania

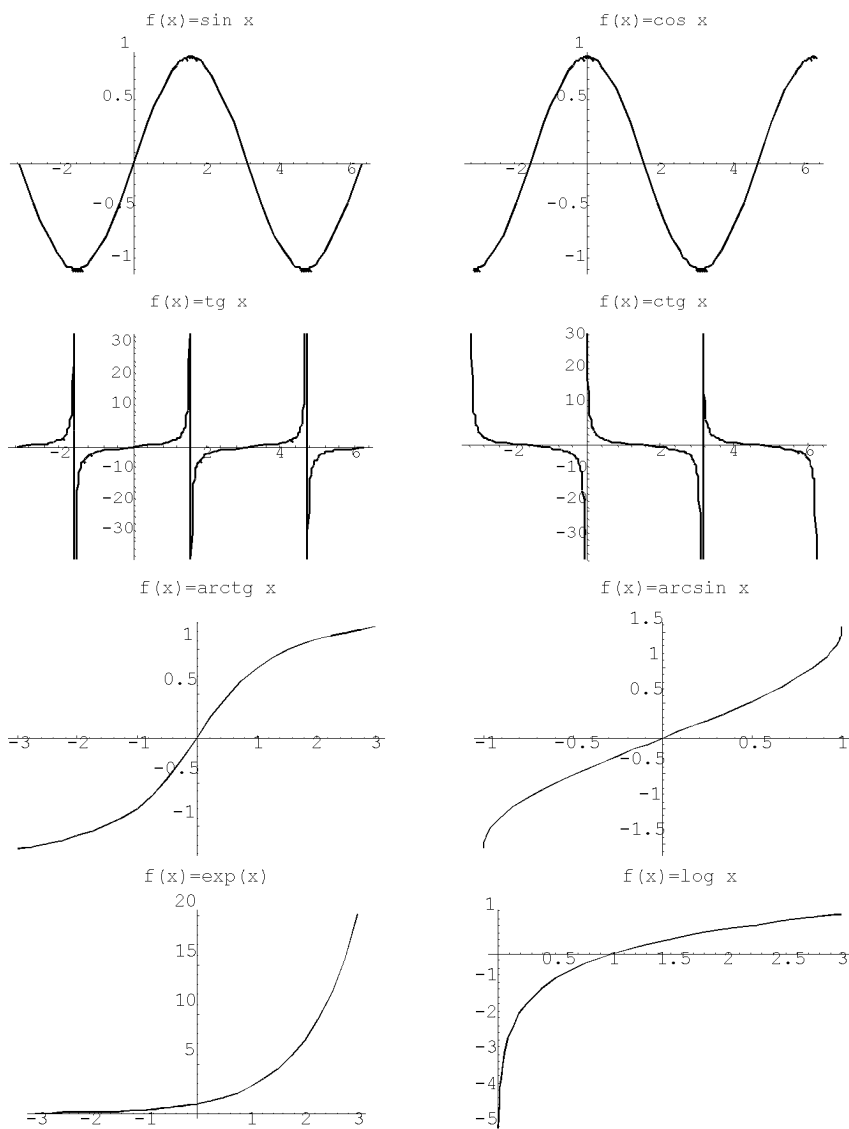
wartości funkcji, gdy argument znajduje się między wartościami podanymi w tablicy.

- Podanie metody postępowania prowadzącej do wyznaczenia wartości funkcji, gdy dana jest wartość argumentu. Czasami nie mamy wzoru, lecz program komputerowy do obliczania wartości funkcji, czasem trzeba wzór przekształcić w program. Nawiasem mówiąc, używanie wzorów zapoczątkował dopiero w II poł. XVI w. Vieta.

Aby zaznaczyć, jaki jest zbiór argumentów i w jakim zbiorze są wartości funkcji f będziemy czasem pisali $f : A \rightarrow B$ lub $A \xrightarrow{f} B$. Używa się też czasem takiej oto metody zapisu: $x \mapsto f(x)$ albo $A \ni x \mapsto f(x) \in B$.

Jeśli $A \xrightarrow{f} B$ oraz $B \xrightarrow{g} C$, to możemy określić *złożenie* tych funkcji: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Powiemy, że g jest funkcją *odwrotną* dla f , jeśli $g \circ f$ oraz $f \circ g$ są funkcjami tożsamościowymi (spróbujcie sami domyślić się, o co tu chodzi). Z funkcjami odwrotnymi związana jest pewna trudność, wynikająca stąd, że wiele funkcji nie posiada odwrotnych. Jeśli koniecznie potrzebujemy funkcji odwrotnej, postępujemy tak, jak w przypadku funkcji $\mathbf{R} \ni x \mapsto f(x) = x^2$. Pierwiastkiem kwadratowym z liczby y (nieujemnej, aby należała do zbioru wartości f) nazywamy taką liczbę *nieujemną* x , że $x^2 = y$. Wybór nieujemnego x oznacza to, że bierzemy funkcję odwrotną nie do f (która odwrotnej nie posiada), lecz do funkcji określonej takim samym wzorem, ale tylko dla x -ów nieujemnych. Płynie stąd dodatkowa nauka, że do określenia funkcji istotny jest nie tylko wzór, ale i dziedzina, czyli zbiór tych x -ów, do których wzór będzie stosowany. Wybór (a właściwie ograniczenie) dziedziny funkcji, aby miała ona funkcję odwrotną jest w znacznym stopniu dowolny. Dla kilku podstawowych funkcji warto jednak umówić się co do sposobu ograniczania dziedziny w celu uzyskiwania funkcji odwrotnej.

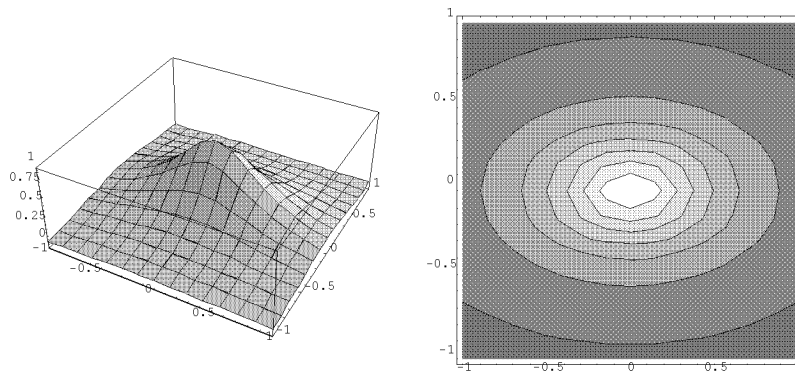
Własności funkcji bywają często dobrze widoczne na wykresach. Przypomnijmy sobie wykresy najważniejszych funkcji elementarnych, z którymi spotkaliśmy się w szkole. Przy okazji znajdziemy dziedziny funkcji, do których odwrotnymi są przedstawione na wykresach "arcusy".



Wykresy podstawowych funkcji elementarnych

Nie zawsze mamy do czynienia z funkcjami jednej zmiennej. Funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych można przedstawiać graficznie rysując powierzchnię w przestrzeni trójwymiarowej, lub też za pomocą

poziomic, podobnie, jak to czynią kartografowie. Oto dwa przedstawienia graficzne funkcji danej wzorem $f(x, y) = 1/(1 + 4x^2 + 10y^2)$.



Przedstawienia graficzne funkcji $f(x, y) = 1/(1 + 4x^2 + 10y^2)$

Zadania

1. Używając poznanych oznaczeń zapisać zdania: "Równanie $x^2 + x + 1 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych"
2. Dla jakich $a \in \mathbf{R}$ zdanie:

$$\bigvee_{x \in \mathbf{R}} x^2 + ax + 1 = 0$$

jest prawdziwe?

3. W zbiorze liczb rzeczywistych różnych od zera określamy relację \bowtie jak następuje:

$$x \bowtie y \stackrel{\text{def}}{\iff} xy > 0.$$

Czy jest to relacja równoważności? Jeśli tak, to jakie są klasy?

4. Funkcja f określona jest na \mathbf{R} wzorem $f(x) = 4x + 1$. Znaleźć funkcję odwrotną.
5. Naszkicować wykresy funkcji danych wzorami:

(a) $f(x) = \sin x$,

(b) $f(x) = \sin(x + \pi/4)$,

(c) $f(x) = (x^2 + 1)\sin(x + \pi/4)$,

(d) $f(x) = (x^2 + 1)\sin[5(x + \pi/4)]$.

6. Niech f będzie daną funkcją określoną na \mathbf{R} . W jaki sposób z wykresu funkcji f otrzymać wykresy następujących funkcji: $g(x) = f(3x + 5)$, $h(x) = 2f(x/2) - 3$?

7. Naszkicować i porównać wykresy funkcji

(a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$, $g(x) = \arcsin(\sin x)$,

(b) $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, $g(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

1.2 Zasada indukcji matematycznej



W tekstach matematycznych często spotyka się zwroty typu "i tak dalej", czy po prostu trzy kropki "...". Towarzyszą one zwykle zdaniom dotyczącym ciągu stwierdzeń, definicji, czy kolejnych kroków rozumowania. Często ukrywa się za nimi zastosowanie *zasady indukcji matematycznej*.

1.2.1 Dowodzenie przez indukcję



Przyjrzyjmy się najpierw przykładowi. Prześledzimy dowód wzoru:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Najpierw sprawdzamy, czy wzór ten jest prawdziwy dla $n = 1$:

$$1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2.$$

Następnie zauważamy, że jeśli wzór był słuszny dla $n = k-1$, to będzie słuszny dla $n = k$. Rzeczywiście, podstawiając $n = k-1$ mamy

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k-1)^3 = \left(\frac{(k-1)k}{2} \right)^2.$$

Dodajemy teraz do obu stron k^3 :

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + (k-1)^3 + k^3 &= \left(\frac{(k-1)k}{2} \right)^2 + k^3 = \\ \frac{(k^2 - 2k + 2)k^2 + 4k^3}{4} &= \left(\frac{(k+1)k}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Dowód wzoru dla $n = 6$ wyglądałby następująco:

Sprawdziliśmy, że jest on prawdziwy dla $n=1$, skąd wynika jego prawdziwość dla $n=2$, a stąd na tej samej podstawie prawdziwość dla $n=3$ i po kilkakrotnym powtórzeniu tego samego argumentu dochodzimy do przekonania o prawdziwości wzoru dla $n = 6$.

Skąd bierzemy przekonanie o prawdziwości dowodzonego wyżej wzoru dla wszystkich liczb naturalnych n ? Dowód według przytoczonego schematu nie jest taki sam dla wszystkich n — ma za każdym razem inną długość. Chodzi raczej o to, że każdą liczbę naturalną osiąga się po skończonej liczbie kroków (w naszym przypadku n osiągamy po $n - 1$ krokach). Mamy tu do czynienia z ważną własnością zbioru liczb naturalnych. Formułuje się ją w postaci zasady indukcji matematycznej:

Twierdzenie 2 (ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ). *Załóżmy, że dla każdej liczby naturalnej n mamy dane zdanie $T(n)$. Jeśli spełnione są następujące dwa warunki:*

1. $T(1)$ jest prawdziwe.
2. Dla każdego $k \in \mathbf{N}$ prawdziwość $T(l)$ dla wszystkich $l < k$ pociąga za sobą prawdziwość $T(k)$.

Wtedy dla każdego $n \in \mathbf{N}$ prawdziwe jest $T(n)$.

W praktyce najczęściej można zastąpić warunek 2 trochę mocniejszym:

- 2'. Dla każdego $k \in \mathbf{N}$ zachodzi wynikanie $T(k) \implies T(k + 1)$.

Rolę tych dwóch warunków zilustrujemy najpierw na przykładzie błędnych dowodów stwierdzeń oczywiście nieprawdziwych:

Przykład 1. Ciąg (a_n) spełnia warunki: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Twierdzimy, że ciąg ten jest rosnący. Rzeczywiście, jeśli $a_{k-1} < a_k$, to porównanie wzorów na a_k i a_{k+1} : $a_k = \sqrt{2 + a_{k-1}}$; $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}$ daje oczywisty wniosek $a_k < a_{k+1}$. Obliczając kolejne wyrazy ciągu mamy $a_1 \approx 2.45$, $a_2 \approx 2.11$, $a_3 \approx 2.03$, $a_4 \approx 2.01$. To już wystarczy do stwierdzenia, że (a_n) nie jest ciągiem rosnącym. Błąd w dowodzie polega na tym, że nie jest spełniony warunek 1.

Przykład 2. Spróbujemy udowodnić, że wszystkie proste na płaszczyźnie są równoległe. Ponieważ jest to oczywista nieprawda, dowód musimy trochę sformalizować.

$T(n)$ będzie oznaczało zdanie: "W dowolnym zbiorze zawierającym n prostych wszystkie proste są równoległe."

$T(1)$ jest oczywiście prawdziwe. Musimy jeszcze udowodnić, że $T(k) \implies T(k+1)$. Załóżmy więc, że $T(k)$ jest prawdziwe. Mamy na tej podstawie udowodnić $T(k+1)$. Weźmy dowolny $k+1$ -elementowy zbiór $C = \{p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}\}$ którego elementami są proste. Wydzielamy z niego dwa zbiory k -elementowe: $A = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ oraz $B = \{p_2, \dots, p_k, p_{k+1}\}$. $T(k)$ głosi, że jeśli dwie proste należą do jednego z tych zbiorów, to są równoległe. Wobec tego $p_1 \parallel p_2$ (obydwie proste należą do A) oraz $p_2 \parallel p_{k+1}$ (te dwie proste są w B). Wynika stąd, że $p_1 \parallel p_{k+1}$, a ponieważ $p_i \parallel p_j$ dla $i, j = 1, 2, \dots, k$ (zbiór A), wnioskujemy, że wszystkie proste należące do zbioru C są równoległe. Dowód został zakończony. Gdzie jest błąd? Przeprowadzony powyżej dowód wynikania $T(k) \implies T(k+1)$ jest poprawny dla wszystkich k z wyjątkiem $k=1$. To wystarcza, aby nie miała zastosowania zasada indukcji.

1.2.2 Definicje i wzory rekurencyjne



Zacznijmy od przykładu. Ciąg Fibonacciego (u_n) zdefiniowany jest za pomocą następujących relacji:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

Przekonanie o tym, że relacje te wystarczają do jednoznacznego wyznaczenia u_n dla każdego n bierze się właśnie z zasady indukcji. Biorąc rzecz formalnie, należałoby sformułować to w postaci ciągu twierdzeń, na przykład $T(n)$ mogłoby być z grubsza takim zdaniem: "Istnieje dokładnie jeden układ liczb u_1, u_2, \dots, u_n spełniający te relacje."

Wzory rekurencyjne często występują w zagadnieniach kombinatorycznych. Rozważmy najprostsze zagadnienie – znajdowanie liczby permutacji p_n zbioru n -elementowego. Ponieważ $n+1$ -szy element może być dodany do ustawionych n elementów dokładnie na $n+1$ sposobów, mamy wzór rekurencyjny $p_{n+1} = (n+1)p_n$. Ponadto wiemy, że $p_1 = 1$, co razem daje $p_n = n!$

Zadania

1. Udowodnić, że ciąg (a_n) z Przykładu 1. na stronie 6 jest malejący.
2. Udowodnić, że ciąg (a_n) z poprzedniego zadania jest ograniczony.
3. Udowodnić, że wyrazy ciągu Fibonacciego są równe:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

4. Wiedząc, że suma $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$ wyraża się przez wielomian piątego stopnia n znaleźć wzór na tę sumę.
5. Ciąg (a_n) dany jest za pomocą wzorów $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2(a_n + 1)$. Udowodnić, że $a_n - 1$ jest podzielne przez 3.

1.3 Ciągi



Na wstępie zwrócimy uwagę na pewne istotne rozróżnienie. Ciąg nie jest *zbiorem* elementów a_n – istotne jest uporządkowanie, wyrazy ciągu mogą się powtarzać. Bardziej precyzyjnie ujmuje to

Definicja 2 *Ciągiem o wyrazach ze zbioru A nazywamy odwzorowanie $a : \mathbf{N} \rightarrow A$. Zamiast $a(n)$ piszemy a_n , a zamiast $a(\cdot)$ piszemy (a_n) .*

Pewne nieporozumienia występują też w przypadku pojęcia podciągu. Z tego względu również podajemy definicję:

Definicja 3 *Niech $k \mapsto n_k$ będzie ściśle rosnącym (tzn. $n_k > n_{k'}$ dla $k > k'$) odwzorowaniem \mathbf{N} w \mathbf{N} . Nazwijmy je wyborem. Podciągiem ciągu (a_n) związanym z tym wyborem nazywamy ciąg $k \mapsto a_{n_k}$.*

W przyszłości będziemy stosowali następującą terminologię dotyczącą ciągów: Mówimy, że ciąg (a_n) jest

rosnący jeżeli $a_n > a_k$ dla $n > k$,

niemalejący jeżeli $a_n \geq a_k$ dla $n > k$,

malejący jeżeli $a_n < a_k$ dla $n > k$,

nierosnący jeżeli $a_n \leq a_k$ dla $n > k$,

monotoniczny jeśli jest nierosnący lub niemalejący,

ściśle monotoniczny jeśli jest rosnący lub malejący,

ograniczony jeżeli istnieje $M \in \mathbf{R}$ takie, że $|a_n| < M$ dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$,

ograniczony z góry (z dołu) jeżeli istnieje $M \in \mathbf{R}$ takie, że $a_n < M$ ($a_n > M$) dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$,

Oprócz określeń użytych powyżej spotyka się też terminy “ściśle rosnący” i “ściśle malejący”. Różnice te nie prowadzą na szczęście do nieporozumień. Jako bardzo łatwe zadanie warto zbadać powiązania między wymienionymi właśnie pojęciami.



1.3.1 Granica ciągu

Definicja 4 Mówimy, że ciąg (a_n) dąży do granicy g , jeżeli

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{N \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n > N} |a_n - g| < \epsilon.$$

Piszemy wtedy $\lim a_n = g$ albo $a_n \rightarrow g$. Mówimy, że ciąg (a_n) jest zbieżny, jeśli istnieje g takie, że $a_n \rightarrow g$.

Przykład 1. Wykażemy, że $\lim \frac{1}{n} = 0$. Niech będzie dane $\epsilon > 0$. Nierówność $|a_n - g| < \epsilon$ ma postać $\frac{1}{n} < \epsilon$, skąd $n > \frac{1}{\epsilon}$. Wystarczy więc wybrać jako N dowolną liczbę naturalną większą od $\frac{1}{\epsilon}$, a dla każdego $n > N$ będzie zachodziła nierówność $\frac{1}{n} < \epsilon$. To kończy dowód.

Do badania następnego przykładu potrzebna nam będzie pewna nierówność.

Twierdzenie 3 (NIERÓWNOŚĆ BERNOULLIEGO) Dla każdego $x > -1$ oraz $n \in \mathbf{N}$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Dowód. Skorzystamy z zasady indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ mamy $1 + x \geq 1 + x$, co jest prawdziwe. Załóżmy teraz, że nierówność Bernoulliego jest prawdziwa dla $n = k$:

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx.$$

Mnożymy obydwie strony przez $1 + x$:

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x.$$

To jest właśnie nierówność dla $n = k + 1$. Dowód jest zakończony.

Przykład 2. Udowodnimy, że jeśli $|a| < 1$, to $\lim a^n = 0$. Zaważmy najpierw, że wystarczy rozważyć przypadek $0 < a < 1$. Doberamy $x > 0$ tak, żeby $a = \frac{1}{1+x}$. Wtedy

$$a^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx}.$$

Na to, aby była spełniona nierówność $a^n < \epsilon$ wystarczy więc spełnienie nierówności $\frac{1}{1+nx} < \epsilon$, skąd $n > \frac{1}{x}(\frac{1}{\epsilon} - 1)$. N , podobnie jak w poprzednim przykładzie, może być jakąkolwiek liczbą naturalną większą od prawej strony ostatniej nierówności.

Przykład 3. Niech $a > 0$. Znajdziemy granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{a}$. Wystarczy rozpatrzyć przypadek $a > 1$; dla $a < 1$ rachunki są bardzo podobne. Jeśli $a > 1$, to z nierówności Bernoulliego mamy $1 < 1 + n(a_n - 1) \leq (a_n)^n = a$, skąd wynika, że $0 < a_n - 1 \leq \frac{a-1}{n}$. Argumentacja takiego samego rodzaju, jak w poprzednich przykładach prowadzi do wniosku, że $a_n \rightarrow 1$.

Następujące twierdzenia pozwalają na wykorzystanie przykładów 1. i 2. do znajdowania granic wielu ciągów:

Twierdzenie 4 *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowód. Niech $a_n \rightarrow a$. Bierzemy jakiegokolwiek $\epsilon > 0$. Z założenia o zbieżności ciągu (a_n) wiemy, że począwszy od pewnego miejsca (dla $n > N$) spełniona jest nierówność $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$. Aby znaleźć oszacowanie wyrazów ciągu z góry wystarczy wziąć największą z liczb: $a + \epsilon, a_1, a_2, \dots, a_N$. Ponieważ jest ich skończenie wiele, istnieje wśród nich największa. Oszacowanie z dołu znajdujemy w podobny sposób.

Twierdzenie 5 *Jeśli $a_n \rightarrow 0$ oraz ciąg (b_n) jest ograniczony, to $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$.*

Twierdzenie 6 (Działania na ciągach zbieżnych) *Jeżeli $a_n \rightarrow a$ oraz $b_n \rightarrow b$, to*

1. $a_n + b_n \rightarrow a + b$,
2. $a_n \cdot b_n \rightarrow ab$,
3. $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$, o ile b oraz b_n są różne od zera.

Twierdzenie 7 (TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH) *Jeżeli $a_n \leq c_n \leq b_n$ oraz $a_n \rightarrow g$ i $b_n \rightarrow g$, to $c_n \rightarrow g$.*

Twierdzeń tych nie będziemy tutaj dowodzili. Dowody można znaleźć w prawie wszystkich podręcznikach. Przy rozwiązywaniu zadań zamieszczonych na końcu tego paragrafu przydatny będzie następujący

Wniosek. *Jeżeli $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, to $a_n \rightarrow 0$.*

W następnym paragrafie będziemy nawiązywali do następującej własności ciągów zbieżnych:

Twierdzenie 8 (Cauchy) *Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, to*

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{N \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n, m > N} |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Dowód. Weźmy $\epsilon > 0$. Liczbę naturalną N w definicji granicy dobierzmy do $\epsilon/2$. Dla $n, m > N$ spełnione są nierówności: $|a_n - g| < \epsilon/2$ oraz $|a_m - g| < \epsilon/2$. Wobec tego

$$|a_n - a_m| = |(a_n - g) - (a_m - g)| \leq |a_n - g| + |a_m - g| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Własność ciągów zbieżnych wymienioną w powyższym twierdzeniu nazywana bywa *własnością Cauchy* a ciąg, który ją posiada nazywamy *ciągiem Cauchy*.



1.3.2 Nieelementarne własności ciągów

Rozpatrywane do tej pory własności ciągów mają wspólną cechę — dają się łatwo dowodzić. Obecnie zajmujemy się kilkoma własnościami, których nie tylko łatwo, ale w ogóle nie da się udowodnić metodami, które stosowaliśmy do tej pory. Przyczyna leży w tym, że potrzebne będą charakterystyczne własności zbioru liczb rzeczywistych. Możliwe są tutaj dwie drogi. Pierwsza z nich, często używana w obszernych kursach analizy polega na konstrukcji liczb rzeczywistych, i wtedy można udowodnić te własności. Drugą, którą tutaj wybieramy, to przyjęcie jednej z tych własności jako założenia i udowodnienie pozostałych na tej podstawie.

Twierdzenie 9 *Następujące własności ciągów są równoważne:*

1. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*
2. *Każdy ciąg Cauchy jest zbieżny.*
3. *Każdy ciąg ograniczony posiada podciąg zbieżny. (Bolzano–Weierstrass)*

Zamiast całego dowodu wykażemy tutaj tylko wynikanie $2 \Rightarrow 3$. Niech (a_n) będzie ciągiem ograniczonym, czyli $|a_n| < M$ dla pewnego M . Mamy wybrać podciąg (a_{n_k}) zbieżny. Metoda wyboru jest następująca: dzielimy przedział $[-M, M]$ na połowy. Conajmniej w jednej z nich jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Niech a_{n_1} będzie którymkolwiek z a_n należących do tej połowy. Wybraną połowę dzielimy znowu na połowy i stwierdzamy, że w conajmniej jednej z nich jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Jako a_{n_2} wybieramy którykolwiek z wyrazów ciągu należący do tej połowy (a właściwie ćwiartki), z tym tylko warunkiem, żeby jego numer n_2 był większy od n_1 (dlaczego). Ponieważ wyrazów a_n w wybranej części było nieskończenie wiele, zawsze takie a_{n_2} można znaleźć. Dalsze wyrazy podciągu wybieramy w analogiczny sposób. Zauważmy, że po wykonaniu N kroków wszystkie następne wyrazy podciągu będziemy wybierali z odcinka o długości $M/2^N$. Wobec tego wyrazy wybranego podciągu spełniają warunek: jeżeli $k, l > N$, to

$$|a_{n_k} - a_{n_l}| < \frac{M}{2^N}.$$

Ponieważ dla każdego $\epsilon > 0$ można znaleźć takie N , że $M/2^N < \epsilon$ (ciąg $M/2^N \rightarrow 0$), wnioskujemy, że (a_{n_k}) jest ciągiem Cauchy, a założyliśmy, że takie ciągi są zbieżne. \square^2

Kresy zbiorów

Niektóre zbiory ograniczone z góry, na przykład $]-\infty, 0]$ mają element największy (w tym przypadku zero) inne, jak $[0, 1[$ nie mają go, za

²Taki znaczek będziemy stawiali na końcu dłuższych dowodów, aby można było szybko zorientować się, gdzie ten koniec jest.

to istnieje najmniejsza liczba większa od wszystkich jego elementów. Obydwie te możliwości ujmuje pojęcie kresu zbioru.

Definicja 5 Niech $A \subset \mathbf{R}$ będzie niepustym zbiorem ograniczonym z góry. Kresem górnym zbioru A , oznaczanym $\sup A$ (supremum) A nazywamy najmniejszą liczbę c taką, że dla wszystkich $a \in A$ zachodzi $a \leq c$.

Analogicznie definiuje się kres dolny zbioru A ograniczonego z dołu oznaczany $\inf A$ (*infimum*). Definicja ta oczywiście nie gwarantuje istnienia kresów. Okazuje się, że istnienie kresów zbiorów ograniczonych jest równoważne nieelementarnym własnościom ciągów wymienionym w Twierdzeniu 9. Dowód tej równoważności jest bardzo dobrym, wcale nie trudnym ćwiczeniem.

Dla zbiorów, które nie są ograniczone z góry kresu górnego nie definiujemy. Przyjęło się jednak w takim przypadku pisać $\sup A = \infty$ i analogicznie $\inf A = -\infty$ w przypadku zbioru A , który nie jest ograniczony z dołu. Zapis taki oznacza tylko to, że dany zbiór nie jest ograniczony z góry ew. z dołu.



1.3.3 Ciągi rozbieżne do nieskończoności

Spośród ciągów rozbieżnych można wyróżnić te, które są co prawda rozbieżne, ale mają pewne własności podobne do ciągów zbieżnych.

Definicja 6 Ciąg (a_n) nazywamy rozbieżnym do nieskończoności i piszemy $a_n \rightarrow \infty$, jeżeli

$$\bigwedge_{M \in \mathbf{R}} \bigvee_{N \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n > N} a_n > M .$$

Zmieniając kierunek nierówności na $a_n < M$ otrzymamy definicję ciągu rozbieżnego do $-\infty$.

Zauważmy, że ciągi rozbieżne do nieskończoności mają niektóre własności ciągów zbieżnych. Na przykład $a_n \rightarrow \infty$ oraz $b_n \rightarrow \infty$ pociąga za sobą $a_n + b_n \rightarrow \infty$, natomiast nie można ogólnie niczego powiedzieć o ciągu $(a_n - b_n)$.

Zadania

1. Zbadać zbieżność i, o ile istnieją, znaleźć granice ciągów:

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}; \quad b_n = \frac{2n^2+5n-3}{100+n+n^2}; \quad c_n = \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n-1}};$$

$$d_n = \frac{2^{3n}+3^{2n}}{10^n}; \quad e_n = \frac{3^n}{2n^2}; \quad f_n = \frac{n^6}{2^n};$$

$$g_n = \frac{2^n}{n!}; \quad h_n = \frac{n!}{n^n}; \quad i_n = \frac{\sin n}{n};$$

$$j_n = \frac{n^2+2n}{n+5} - \frac{n^2+5}{n+1}; \quad k_n = \sqrt[n]{2^n+5}; \quad l_n = \sqrt{n^2+n} - n.$$

2. Znaleźć granice ciągów:

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2}; \quad b_{n+1} = \frac{1}{1+b_n}, \quad b_1 = 1.$$

3. Znaleźć kresy zbiorów:

$$A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 < 2\}, \quad B = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}.$$



1.4 Funkcje ciągłe

1.4.1 Definicja i podstawowe własności

Rozpocznijmy od przykładu. Mamy znaleźć granicę ciągu (a_n) zdefiniowanego rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}; \quad a_1 = \sqrt{2}.$$

Najpierw dowodzimy przez indukcję, że jest to ciąg rosnący i ograniczony. Następnie korzystamy z nieelementarnej własności zbioru liczb rzeczywistych — zbieżności ciągów monotonicznych i ograniczonych. Dochodzimy do wniosku, że (a_n) jest ciągiem zbieżnym. Aby znaleźć jego granicę zauważamy, że jeśli $a_n \rightarrow g$, to $a_{n+1} \rightarrow g$, zatem i prawa strona wzoru rekurencyjnego definiującego (a_n) musi być zbieżna do g . Granicę prawej strony znaleźlibyśmy łatwo, gdybyśmy wiedzieli, że $a_n \rightarrow g \implies \sqrt{2 + a_n} \rightarrow \sqrt{2 + g}$. Wiedzielibyśmy wtedy, że g spełnia równanie: $g = \sqrt{2 + g}$. Jedynym rozwiązaniem tego równania jest $g = 2$. Sprawdzamy:

$$|\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + g}| = \left| \frac{2 + a_n - 2 - g}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + g}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |a_n - g|.$$

Twierdzenie o trzech ciągach pozwala teraz na wniosek, że rzeczywiście zachodzi wynikanie $a_n \rightarrow g \implies \sqrt{2 + a_n} \rightarrow \sqrt{2 + g}$ i problem jest rozwiązany.

Uogólnienie własności funkcji $x \mapsto \sqrt{2 + x}$, z której tu korzystaliśmy jest jednym z podstawowych pojęć matematyki:

Definicja 7 (DEFINICJA CIĄGŁOŚCI WEDŁUG HEINEGO) *Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , jeżeli dla dowolnego ciągu $x_n \rightarrow x_0$ zachodzi $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.*

Równoważny warunek stawia inna definicja, pochodząca od Cauchy'ego.

Definicja 8 (DEFINICJA CIĄGŁOŚCI WEDŁUG CAUCHY'EGO) *Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , jeżeli*

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x: |x - x_0| < \delta} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Funkcję nazywamy *ciągłą na zbiorze A* , jeśli jest ciągła w każdym punkcie zbioru A . W powyższych definicjach milcząco zakładamy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Twierdzenie o działaniach na ciągach zbieżnych daje, jako prosty wniosek, następujące twierdzenie o działaniach na funkcjach ciągłych:

Twierdzenie 10 *Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 (ew. na zbiorze A). Wtedy funkcje $f + g$, fg , f/g ³ są ciągłe w punkcie x_0 (na zbiorze A).*

Korzystając z tego twierdzenia możemy znaleźć dosyć obszerną klasę funkcji o których wiemy, że są ciągłe. Stwierdzamy bowiem najpierw, że funkcje stałe są ciągłe oraz funkcja tożsamościowa: $f(x) = x$ też jest ciągła (bo $x_n \rightarrow x_0 \implies x_n \rightarrow x_0$). Wynika stąd, że wielomiany są ciągłe, a także ilorazy wielomianów (tzw. funkcje wymierne) są ciągłe.

Ciągłość innych funkcji elementarnych trzeba jednak osobno dowodzić. Zobaczmy, jak można to zrobić na przykładzie funkcji sinus. Skorzystamy z prostej nierówności:

$$|\sin x - \sin y| = \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq |x-y|.$$

Widać stąd, że $x_n \rightarrow x_0 \implies \sin x_n \rightarrow \sin x_0$.

Ciągłość złożenia funkcji ciągłych jest treścią następnego twierdzenia:

Twierdzenie 11 *Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , a funkcja g jest ciągła w punkcie $f(x_0)$, to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0 .*

1.4.2 Nielementarne własności funkcji ciągłych



Mniej elementarne własności funkcji ciągłych zawierają następujące twierdzenia:

³Tutaj zakładamy dodatkowo, że $g(x_0) \neq 0$.

Twierdzenie 12 (WŁASNOŚCI FUNKCJI CIĄGLYCH NA ODCINKU Z KOŃCAMI) *Założmy, że f jest funkcją ciągłą na $[a, b]$. Wtedy*

1. *f jest ograniczona,*
2. *f przybiera największą i najmniejszą wartość na $[a, b]$.*

Twierdzenia tego nie będziemy tutaj dowodzili, zauważymy tylko, że obydwie tezy przestają być prawdziwe, jeśli w założeniu zastąpić odcinek $[a, b]$ przez $]a, b[$.

Twierdzenie 13 (O CIĄGŁOŚCI FUNKCJI ODWROTNEJ) *Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$ i jest różnowartościowa, to funkcja odwrotna do f jest ciągła na $[f(a), f(b)]$.*

To twierdzenie daje od razu ciągłość funkcji odwrotnych do tych, o których ciągłości już wiemy, na przykład pierwiastków i funkcji odwrotnych do trygonometrycznych.

Przy rozwiązywaniu równań pomocna jest czasem następująca własność funkcji ciągłych:

Twierdzenie 14 (WŁASNOŚĆ DARBOUX FUNKCJI CIĄGLYCH) *Jeżeli funkcja f jest ciągła na odcinku $[a, b]$, a na końcach odcinka przybiera wartości o różnych znakach, np. $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, to istnieje $c \in [a, b]$ takie, że $f(c) = 0$.*

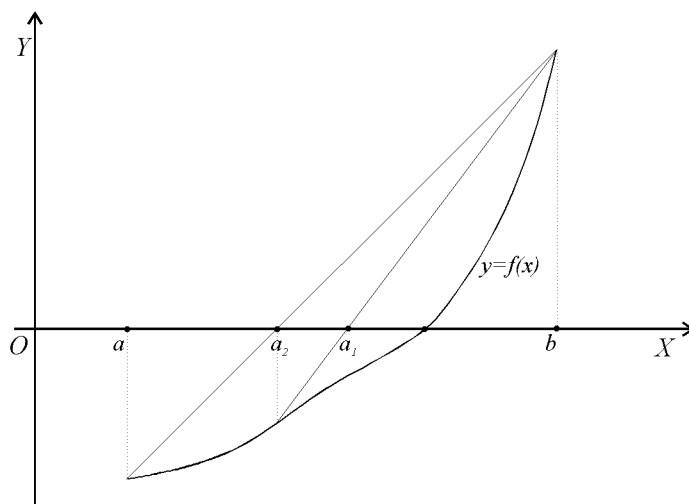
Dowód. Założmy, że $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Niech x_1 będzie środkiem odcinka $[a, b]$. Jeżeli $f(x_1) > 0$, to jako x_2 wybieramy środek odcinka $[x_1, b]$, jeśli $f(x_1) < 0$, to x_2 będzie środkiem odcinka $[a, x_1]$, a jeśli $f(x_1) = 0$, to problem jest rozwiązany i przerywamy zabawę. Dalej postępujemy analogicznie. Albo znajdziemy rozwiązanie w skończonej liczbie kroków, albo otrzymamy ciąg (x_n) o następujących własnościach:

1. Jeśli $n, m > N$, to $|x_n - x_m| < \frac{|b-a|}{2^N}$.
2. Dla każdego x_n istnieje y_n takie, że $|x_n - y_n| < \frac{|b-a|}{2^n}$ a funkcja f przyjmuje w y_n wartość innego znaku niż w x_n .

Pierwsza własność pociąga za sobą zbieżność ciągu (x_n) . Oznaczmy przez c granicę ciągu (x_n) . Wtedy $y_n \rightarrow c$. Z ciągłości funkcji f mamy $f(x_n) \rightarrow f(c)$ oraz $f(y_n) \rightarrow f(c)$, skąd wynika, że $f(x_n) \cdot f(y_n) \rightarrow f(c)^2$. Wiemy jednak, że $f(x_n) \cdot f(y_n) < 0$, wobec czego $f(c)^2 \leq 0$, czyli $f(c) = 0$. \square

Metoda zastosowana do udowodnienia istnienia rozwiązania równania $f(x) = 0$ jest całkiem niezłym sposobem przybliżonego rozwiązywania takich równań. Wystarczy znaleźć dwa punkty a i b , w których funkcja przyjmuje wartości o różnych znakach (metoda nasza nie wskazuje, jak to zrobić, trzeba mieć po prostu trochę szczęścia), zastosowanie tej metody daje po n krokach dokładność nie gorszą niż $\frac{b-a}{2^n}$.

Pewna modyfikacja tej metody daje niekiedy (ale nie zawsze) lepsze wyniki, tzn. szybszą zbieżność ciągu przybliżeń. Modyfikacja polega na tym, że zamiast brać za każdym razem środek odcinka, na końcach którego funkcja przyjmuje wartości o różnych znakach, bierzemy punkt odcinka, którego odległości od końców są proporcjonalne do wartości na końcach. Modyfikację tę nazywa się *metodą siecznych*. Ilustruje to rysunek:



Metoda siecznych

Zadania

1. Znaleźć przykład funkcji ciągłej na $]0, 1[$, która
 - (a) nie jest ograniczona,
 - (b) nie przybiera wartości największej.
2. Ocenić dokładność n -tego przybliżenia rozwiązania równania $f(x) = 0$ otrzymanego opisanymi wyżej metodami.

**1.4.3 Granica funkcji**

Przyjrzyjmy się definicji ciągłości funkcji według Heinego:

$$f \text{ jest ciągła} \iff [x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)]$$

Warunek, który tam występuje można podzielić na dwie części:

- Ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do pewnej liczby g .
- Granica g jest równa wartości funkcji $f(x_0)$.

Pierwszy z tych warunków nie wymienia wartości funkcji $f(x_0)$, ma więc sens niezależnie od tego, czy funkcja f jest określona w punkcie x_0 , czy też nie. Prowadzi to do pojęcia *granicy funkcji*:

Definicja 9 *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g , jeżeli dla każdego ciągu $x_n \rightarrow x_0$; $x_n \neq x_0$ zachodzi $f(x_n) \rightarrow g$. Stosuje się tutaj zapis $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$, albo $f(x) \rightarrow g$; $x \rightarrow x_0$, albo $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g$.*

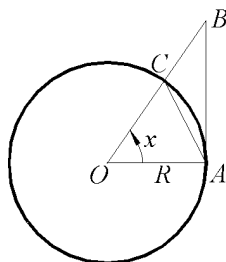
Analogicznie określa się granice funkcji w $\pm\infty$ i granice niewłaściwe. Granicami funkcji zajmiemy się szerzej trochę później, kiedy opanujemy metody ich znajdowania. Teraz udowodnimy następujący fakt, z którego będziemy korzystali w dalszym ciągu wykładu

Przykład

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Zaczniemy od udowodnienia nierówności

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$



Na rysunku mamy w kole o promieniu R kąt ostry AOC o mierze łukowej x , cięciwę AC i styczną AB do okręgu w punkcie A . Porównujemy pole $\triangle AOC$, wycinka kołowego AOC oraz $\triangle AOB$:

$$\frac{R^2 \sin x}{2} < \frac{R^2 x}{2} < \frac{R^2 \operatorname{tg} x}{2}.$$

Po uproszczeniu mamy tę nierówność.

Dzielimy $\sin x$ kolejno przez każdy z członów nierówności. Otrzymujemy:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

skąd

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Ale

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < x.$$

Wobec tego

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|,$$

Nierówność ta jest spełniona dla wszystkich $x \neq 0, |x| < \frac{\pi}{2}$. Jeśli ciąg $x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0$, to $|x_n| < \frac{\pi}{2}$ dla prawie wszystkich n i z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że

$$\frac{\sin x_n}{x_n} \rightarrow 1.$$

1.4.4 Metoda kolejnych przybliżeń

Zajmiemy się teraz rozwiązywaniem równań o postaci $f(x) = x$. Z równaniami takimi spotkaliśmy się już kilkakrotnie przy badaniu granic ciągów definiowanych wzorami rekurencyjnymi typu $a_{n+1} = f(a_n)$.

Stwierdzaliśmy, że jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a funkcja f ciągła, to granica g ciągu (a_n) spełnia równanie $f(g) = g$. Obecnie interesować nas będzie przede wszystkim rozwiązanie równania $f(x) = x$, a ciąg będzie odgrywał rolę pomocniczą. Poza tym zobaczymy, że dla wielu funkcji f nie trzeba dowodzić osobno zbieżności ciągu, bo z góry wiemy, że jest on zbieżny.

Przykład. Rozwiązujemy równanie $x^2 = 2$ w następujący sposób: Przepisujemy je w postaci $x/2 = 1/x$ i do obydwu stron dodajemy $x/2$. Otrzymujemy równanie:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

Prawą stronę tego równania oznaczamy przez $f(x)$. Konstruujemy ciąg przybliżeń rozwiązania równania $f(x) = x$: Bierzemy $x_0 = 1$, a następne wyrazy określamy wzorem rekurencyjnym: $x_{n+1} = f(x_n)$. Obliczmy kilka pierwszych wyrazów ciągu (x_n) :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.5; \\ x_2 &= 1.416666666667; \\ x_3 &= 1.414215686275; \\ x_4 &= 1.414213562375; \\ x_5 &= 1.414213562373; \\ x_6 &= 1.414213562373. \end{aligned}$$

Można przypuszczać, że ciąg (x_n) jest zbieżny.

Zobaczmy, co otrzymamy inaczej przekształcając równanie $x^2 = 2$: Jest ono oczywiście równoważne równaniu $x = 2/x$. Bierzemy $f(x) = 2/x$, $y_0 = 1$, $y_{n+1} = f(y_n)$. Wychodzi wtedy $y_1 = 2$; $y_2 = 1$; $y_3 = 2$; $y_4 = 1$ itd.

Widać, że taki sposób stosowania metody kolejnych przybliżeń nie zawsze prowadzi do sukcesu w postaci rozwiązania równania. Przedstawimy tutaj twierdzenie dające warunki wystarczające na to, żeby ciąg kolejnych przybliżeń był zbieżny do rozwiązania równania $x = f(x)$. Potrzebne nam będzie przy tym wyróżnienie pewnej ważnej klasy podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych \mathbf{R} .

Definicja 10 Podzbiór A zbioru liczb rzeczywistych nazywamy zupełnym, jeżeli granica każdego ciągu Cauchy o elementach ze zbioru A należy do zbioru A .

Pojęcia tego nie będziemy gdzie indziej wykorzystywać, wystarczy wiedzieć, że zbiorami zupełnymi są m.in.: $[a, b]$, $[a, \infty[$, $] - \infty, b]$, \mathbf{R} .

Twierdzenie 15 (ZASADA BANACHA) Niech A będzie zbiorem zupełnym, a f funkcją spełniającą dwa warunki:

1. $f(A) \subset A$.
2. $\forall_{q < 1} \wedge_{x, y \in A} |f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ ⁴

Wtedy

1. Istnieje dokładnie jeden punkt $\tilde{x} \in A$ taki, że $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$.
2. Dla dowolnego $x_0 \in A$ ciąg (x_n) zdefiniowany wzorami:

$$x_1 = f(x_0),$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

jest zbieżny do \tilde{x} .

3.

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_0 - x_1|.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że każda funkcja zbliżająca jest ciągła. Następnie bierzemy jakiegokolwiek $x_0 \in A$ i definiujemy ciąg (x_n) wzorami: $x_1 = f(x_0)$; $x_{n+1} = f(x_n)$. Odległości między kolejnymi wyrazami ciągu (x_n) można łatwo oszacować:

$$\begin{array}{rcll} |x_2 - x_1| & = & |f(x_1) - f(x_0)| & \leq q|x_1 - x_0| \\ |x_3 - x_2| & = & |f(x_2) - f(x_1)| & \leq q|x_2 - x_1| \leq q^2|x_1 - x_0| \\ \dots & & \dots & \dots \\ |x_{n+1} - x_n| & \leq & \dots & \dots \leq q^n|x_1 - x_0| \end{array}$$

⁴Takie funkcje nazywamy *zblizającymi* albo *kontrakcjami*.

Wobec tego

$$\begin{aligned}
 |x_{n+k} - x_n| &= |(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \cdots \\
 &\quad + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)| \\
 &\leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \cdots \\
 &\quad + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \\
 &\leq (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + \cdots + q^{n+1} + q^n)|x_1 - x_0| \\
 &\leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.
 \end{aligned}$$

Wynika stąd, że (x_n) jest ciągiem Cauchy, bowiem dla $n, m > N$ zachodzi (nie zmniejszając ogólności możemy przyjąć, że $m > n$)

$$|x_n - x_m| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leq \frac{q^N}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Z założenia o zupełności zbioru A wnioskujemy, że (x_n) jest zbieżny do pewnego elementu zbioru A . Oznaczmy go przez \tilde{x} . Przechodząc do granicy po obydwu stronach równania

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

i korzystając z ciągłości funkcji f mamy

$$\tilde{x} = f(\tilde{x}).$$

Punkt \tilde{x} jest jedynym spełniającym to równanie. Gdyby istniał jakiś inny punkt y taki, że $f(y) = y$, to mielibyśmy

$$|\tilde{x} - y| = |f(\tilde{x}) - f(y)| \leq q|\tilde{x} - y|.$$

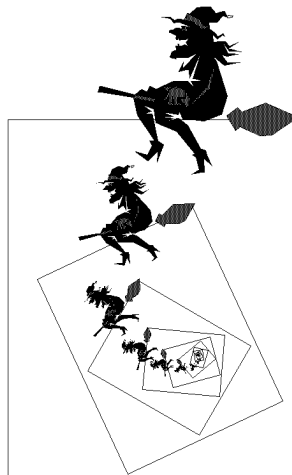
Ponieważ $q < 1$, z nierówności tej wynika, że $|\tilde{x} - y| = 0$, czyli $\tilde{x} = y$.

Przez przejście do granicy z x_m (x_n trzymamy ustalone) otrzymujemy nierówność :

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Ponieważ wynika z niej również punkt 2. tezy twierdzenia, dowód jest zakończony. \square

Oto rysunek ilustrujący zasadę Banacha. Odwzorowanie polega na zmniejszeniu przez podobieństwo w stosunku ok. 60% i obrocie o kąt ok. 15°.



Wróćmy do naszego przykładu. Najpierw sprawdzimy, że funkcja f dana wzorem $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ przeprowadza przedział $[1, 2]$ w jego podzbiór. Rzeczywiście, z nierówności $x \geq 1$ wynika $\frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$, a z nierówności $x \leq 2$ wynika $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$, więc dla $x \in [1, 2]$ mamy $f(x) \geq 1$. Następnie, $x \leq 2 \Rightarrow \frac{x}{2} \leq 1$ oraz $x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 1$, skąd wynika, że dla $x \in [1, 2]$ mamy $f(x) \leq 2$.

Do zbadania, czy f jest kontrakcją właściwsze są metody rachunku różniczkowego (które niebawem poznamy), tutaj spróbujemy zrobić to bezpośrednio:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{y}{2} - \frac{1}{y} \right| =$$

$$\left| (x - y) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right) \right| \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

Uwzględniliśmy tutaj założenie, że $x, y \in [1, 2]$.

Zadania

1. Wykorzystując zasadę Banacha udowodnić zbieżność i znaleźć granice ciągów:

(a) $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$; $a_1 = 1$,

(b) $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$; $a_1 = \sqrt{2}$.

2. Zbadać zbieżność ciągu kolejnych przybliżeń dla równania $f(x) = x$ i ocenić, które przybliżenie daje dokładność nie gorszą, niż 10^{-4} :

(a) $\cos x = x$; $x_0 = 0$,

(b) $\sin x = x$; $x_0 = 1$,⁵

(c) $\operatorname{tg} x = x$; $x_0 = 1$.⁶

⁵Uwaga! Tutaj zasada Banacha nic nie daje. Trzeba samemu coś wymyślić.

⁶Jeszcze gorzej, niż w poprzednim zadaniu.

1.5 Rachunek różniczkowy



1.5.1 Pochodna

Oglądając w dostatecznie dużym powiększeniu wycinki wykresów różnych funkcji obserwujemy, że wyglądają one jak proste. Czy tak musi być dla każdej funkcji? Nie, ale skonstruowanie przykładu wcale nie jest proste. Zastanówmy się, na czym polega ta własność. Prosta ma równanie $y = ax + b$, a wykres funkcji f bierze się z równania $y = f(x)$. Weźmy jakiś punkt x_0 . Niech $y_0 = f(x_0)$. Podstawiając $h = x - x_0$ mamy równanie prostej przechodzącej przez punkt (x_0, y_0) : $y = f(x_0) + ah$. Porównujemy to z równaniem wykresu funkcji $y = f(x_0 + h)$. Oznaczmy przez $r(x_0, h)$ różnicę $r(x_0, h) = f(x_0 + h) - [f(x_0) + ah]$. Wykres funkcji ma być (gdy oglądamy mały wycinek w powiększeniu) podobny do prostej. Oznacza to, że można dobrać taki współczynnik kierunkowy a prostej, żeby różnica między nimi była "mała". To właśnie podobieństwo precyzuje pojęcie różniczkowalności.

Definicja 11 Funkcję f nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0 , jeżeli istnieje takie $a \in \mathbf{R}$, że w rozkładzie

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + r(x_0, h)$$

różnica $r(x_0, h)$ spełnia warunek

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0, h)}{h} = 0 .$$

Funkcję f nazywamy różniczkowalną na zbiorze A , jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru A . Iloczyn ah nazywamy różniczką funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającą przyrostowi h i oznaczamy $df(x_0, h)$.

Łatwo stwierdzić, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to a , o którym mówi definicja, jest tylko jedno. Rzeczywiście, niech \tilde{a} spełnia warunek podany w definicji. Wtedy

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \tilde{a}h + r_1(x_0, h)$$

i spełniony jest warunek

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(x_0, h)}{h} = 0 .$$

Wobec tego

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0, h) - r_1(x_0, h)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah - [f(x_0 + h) - f(x_0) - \tilde{a}h]}{h} = \tilde{a} - a .$$

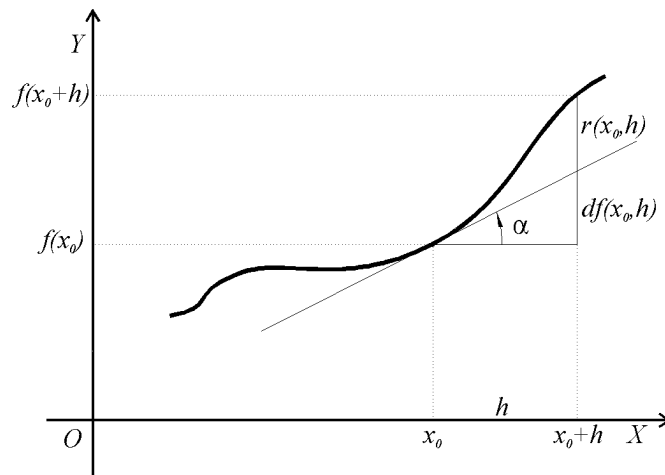
Współczynnik a można obliczyć:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah + r(x_0, h)}{h} = a .$$

Definicja 12 Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \stackrel{df}{=} f'(x_0) .$$

Odzworowanie $x_0 \mapsto f'(x_0)$ nazywamy pochodną funkcji f i oznaczamy przez f' .



Pochodna funkcji w punkcie

Przyda się tutaj uwaga na temat terminologii. Przyrost h zmiennej niezależnej x nazywany bywa *różniczką* tej zmiennej i oznaczany dx , co daje taki oto wzór na różniczkę:

$$df(x_0, dx) = f'(x_0) \cdot dx, \text{ a w skrócie } df = f' dx.$$

Można z tym wiązać oznaczenie pochodnej wywodzące się od Leibniza

$$f' = \frac{df}{dx}.$$

Wzór ten trzeba traktować ze szczególną ostrożnością, bo łatwo dojść do nonsensów. Dlatego będziemy go traktowali wyłącznie jako jedno z oznaczeń pochodnej.

Interpretacje geometryczna pochodnej nasuwa się sama, jeśli wiemy, jaka jest rola współczynnika a w równaniu prostej $y = ax$. Jest to tangens kąta α nachylenia prostej (w naszym przypadku stycznej) do wykresu funkcji.

Zapiszemy definicję pochodnej (tę drugą) jeszcze inaczej, pisząc Δx zamiast h oraz Δf zamiast $f(x_0 + h) - f(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Z pojęciem pochodnej w takim sformułowaniu spotykaliście się w kursie fizyki. Jeżeli argumentem funkcji jest czas, to pochodna funkcji określa "szybkość zmian" tej funkcji. Przykłady są tu następujące:

- pochodną funkcji $t \mapsto x(t)$ opisującej zależność położenia od czasu jest prędkość chwilowa. Definicja pochodnej to określenie prędkości chwilowej jako granicy prędkości średniej, gdy przyrost czasu dąży do zera.
- przyspieszenie jest pochodną prędkości.
- w prawie indukcji elektromagnetycznej Faraday'a występuje szybkość zmian strumienia indukcji magnetycznej. Jest to też pochodna.
- natężenie prądu elektrycznego jest pochodną funkcji opisującej zależność ładunku, który przepłynął przez przewodnik od czasu.



1.5.2 Podstawowe własności i obliczanie pochodnych

Twierdzenie 16 *Jeśli funkcje f, g są różniczkowalne, to $f+g, fg, f/g$ ⁷ są różniczkowalne i*

$$(f + g)' = f' + g',$$

$$(fg)' = f'g + fg',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Udowodnimy tylko drugi z tych wzorów.

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} &= f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\quad + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \end{aligned}$$

Jeśli uwzględnimy fakt, że funkcja różniczkowalna musi być ciągła (spróbuj to udowodnić), to zobaczymy że granica prawej strony przy $h \rightarrow 0$ równa się

$$f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Twierdzenie 17 (POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ)

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Po wstawieniu argumentu x ostatnie twierdzenie zapisuje się tak:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Różniczkując stronami tożsamość $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ otrzymujemy

⁷Tutaj potrzebne jest takie samo zastrzeżenie jakie czyniliśmy kilka razy w podobnych sytuacjach.

Twierdzenie 18 (POCHODNA FUNKCJI ODWROTNEJ) *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x , posiada funkcję odwrotną f^{-1} różniczkowalną⁸ w punkcie $y = f(x)$, to*

$$\left(\frac{-1}{f}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Na podstawie tych twierdzeń możemy znaleźć pochodne bardzo obszernej klasy funkcji. Najpierw zauważmy że pochodna funkcji stałej jest równa zero. Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = x$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1.$$

Zastosowanie wzoru na pochodną iloczynu daje (c – stała)

$$(cf)' = cf',$$

$$\begin{aligned} (x^n)' &= (x \cdot x^{n-1})' = 1 \cdot (x^{n-1})' + x \cdot (x^{n-1})' = \\ &= x^{n-1} + x(x^{n-2} + x(x^{n-2})') = \dots = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Mając te dwa wzory możemy znaleźć pochodną dowolnego wielomianu, wykorzystanie wzoru na pochodną ilorazu daje pochodne funkcji wymiernych.

Wykorzystamy teraz twierdzenie 18 do znalezienia pochodnej funkcji $g(x) = \sqrt{x}$. Wiemy że g jest funkcją odwrotną dla funkcji $f(x) = x^2$ ograniczonej do $[0, \infty[$. Do zastosowania twierdzenia 18 potrzebny jest jeszcze dowód, że g jest funkcją różniczkowalną. Na razie to pomijamy, ale powrócimy do tej sprawy, kiedy będziemy mieli ogólne twierdzenie na ten temat.

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x},$$

co po podstawieniu $x = \sqrt{y}$ daje

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

⁸Zobaczymy niebawem, że znajomość pochodnej f' na ogół pozwala na stwierdzenie, czy f^{-1} istnieje i czy jest funkcją różniczkowalną.

Pochodne funkcji trygonometrycznych.

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \frac{2x+h}{2} = \cos x .
 \end{aligned}$$

Korzystaliśmy tutaj z faktu, że $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$ oraz z ciągłości funkcji \cos .

$$\begin{aligned}
 (\cos x)' &= [\sin(\frac{\pi}{2} - x)]' = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (\frac{\pi}{2} - x)' = -\sin x , \\
 (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} , \\
 (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} , \\
 (\operatorname{arc} \sin x)' &= \frac{1}{\cos(\operatorname{arc} \sin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} , \\
 (\operatorname{arc} \cos x)' &= \frac{1}{-\sin(\operatorname{arc} \cos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} , \\
 (\operatorname{arctg} x)' &= \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x)} \\
 &= \frac{1}{1+x^2} , \\
 (\operatorname{arcctg} x)' &= -\sin^2(\operatorname{arcctg} x) = \frac{-\sin^2(\operatorname{arcctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arcctg} x) + \sin^2(\operatorname{arcctg} x)} \\
 &= -\frac{1}{1+x^2} .
 \end{aligned}$$

Aby lista była pełniejsza podamy jeszcze wzory na pochodne funkcji wykładniczej i logarytmu, o których szerzej będziemy mówili nieco później.

$$\begin{aligned}
 (e^x)' &= e^x , \\
 (\ln x)' &= \frac{1}{x} .
 \end{aligned}$$

1.5.3 Twierdzenia o wartości średniej i ich konsekwencje



Twierdzenie 19 (ROLLE'A) *Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na $]a, b[$ oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje $c \in]a, b[$ takie, że $f'(c) = 0$.*

Dowód. Funkcja f na mocy twierdzenia 10 przybiera największą i najmniejszą wartość w przedziale $[a, b]$. Jeśli te wartości są równe to f jest stała i punkt c znajdziemy bez trudu. Załóżmy więc, że największa wartość, przyjmowana przez f na $[a, b]$, jest większa od $f(a)$. Oznaczmy przez c punkt, w którym f ma największą wartość. Oczywiście $c \in]a, b[$. Wykażemy, że $f'(c) = 0$.

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Ponieważ $f(c)$ jest największą wartością funkcji f , mamy $f(c+h) \leq f(c)$. Wobec tego dla $h > 0$ mamy

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0,$$

a dla $h < 0$ znak nierówności jest przeciwny. Wynika stąd, że $f'(c) = 0$.

□

Twierdzenie 20 (LAGRANGE'A O WARTOŚCI ŚREDNIEJ.) *Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na $]a, b[$, to istnieje $c \in]a, b[$ takie, że*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

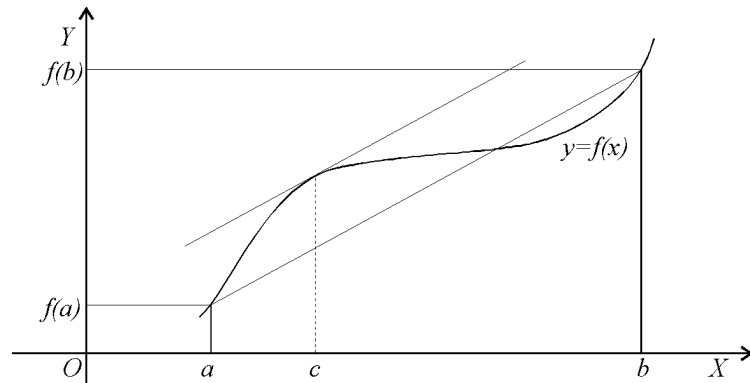
Dowód. Weźmy funkcję pomocniczą

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

F spełnia takie same warunki ciągłości i różniczkowalności jak f , ponadto $F(a) = f(a) = F(b)$, można więc zastosować twierdzenie Rolle'a, które daje

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

Twierdzenie to ilustruje rysunek:



Ilustracja twierdzenia Lagrange'a

Twierdzenie 21 (CAUCHY'EGO O WARTOŚCI ŚREDNIEJ) *Niech f i g będą funkcjami ciągłymi na $[a, b]$ i różniczkowalnymi na $]a, b[$. Załóżmy ponadto, że g' ma stale ten sam znak w $]a, b[$. Wtedy istnieje $c \in]a, b[$ takie, że*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dowód. Weźmy funkcję pomocniczą

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Sprawdzamy, że $F(a) = f(a) = F(b)$. Zastosowanie twierdzenia Rolle'a daje

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c),$$

a stąd mamy tezę twierdzenia. \square

Wnioski z twierdzenia Lagrange'a.

Jeśli znajdziemy takie M , że dla każdego $c \in]a, b[$ zachodzi $|f'(c)| \leq M$, to z twierdzenia Lagrange'a będziemy mieli nierówność $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ dla wszystkich $x, y \in]a, b[$.

Twierdzenie 22 *Jeżeli $f'(x) = 0$ dla wszystkich $x \in]a, b[$, to f jest stała na $]a, b[$.*

Rzeczywiście, na podstawie twierdzenia Lagrange'a mamy dla $x, y \in]a, b[$ $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) = 0$, bo $f'(c) = 0$.

Twierdzenie 23 *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na $]a, b[$ oraz $f' > 0$ na $]a, b[$, to*

1. f jest funkcją rosnącą $]a, b[$,
2. funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna.

Dowód. Weźmy $x < y$, $x, y \in]a, b[$. Z twierdzenia Lagrange'a mamy

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c), \quad c \in]a, b[.$$

Z założenia $f'(c) > 0$, więc $f(y) > f(x)$. Ciągłość funkcji odwrotnej wynika z (odpowiednio użytego) twierdzenia 11. Badamy różniczkowalność f^{-1} . Bierzymy $y, y + k \in f(]a, b[)$ i wprowadzamy następujące oznaczenia: $x = f^{-1}(y)$, $x + h = f^{-1}(y + k)$. Wtedy

$$\frac{f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{x + h - x}{f(x + h) - f(x)}.$$

Ciągłość f^{-1} oznacza, że $k \rightarrow 0$ ⁹ $\implies h \rightarrow 0$, wobec czego prawa strona tego równania przy $k \rightarrow 0$ dąży do $1/f'(x)$. Przy okazji po raz drugi znaleźliśmy wzór na pochodną f^{-1} . \square

⁹Wyrażenia typu $k \rightarrow 0$ należy czytać: "dla każdego ciągu $k_n \rightarrow 0$ itd."

Reguła de l'Hospitala

Zajmiemy się teraz pewnym prostym twierdzeniem dającym wygodne narzędzie do znajdowania granic funkcji.

Twierdzenie 24 (REGUŁA DE L'HOSPITALA) *Niech f i g będą funkcjami ciągłymi na $[a, b]$ i różniczkowalnymi na $]a, b[$. Załóżmy ponadto, że $f(a) = g(a) = 0$, a $g(x)$ i $g'(x)$ są różne od zera dla $x \neq a$. Jeżeli istnieje granica*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

to istnieje również granica

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

i obydwie te granice są równe.

Dowód. Korzystamy z twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej dla odcinka $[a, x]$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

gdzie $a < c < x$. Jeśli teraz ciąg $x_n \rightarrow 0$, to $c_n \rightarrow 0$ i twierdzenie jest udowodnione. \square

Uwagi.

- Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeżeli granicę w punkcie a zastąpi się przez $+\infty$ lub $-\infty$, a także, jeśli warunek $f(a) = g(a) = 0$ zastąpi się przez $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$. Dowody są wtedy trochę trudniejsze, szczególnie w tym ostatnim przypadku.
- Istnienie granicy ilorazu pochodnych jest warunkiem *wystarczającym* istnienia granicy ilorazu funkcji. To, że nie jest warunkiem *koniecznym* widać z następującego przykładu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + \cos x}{2x + \cos x} = 2,$$

natomiast granica ilorazu pochodnych

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \sin x}{2 - \sin x}$$

nie istnieje.

Przykłady. Można wyróżnić kilka typów granic, do znajdowania których przydaje się reguła l'Hospitala. Typy te będziemy oznaczali symbolami:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Musimy jednak zawsze pamiętać, że są to oznaczenia *typów problemów*, a nie liczb. Nie dowiemy się tutaj, ile to jest np. $\frac{0}{0}$ — w dalszym ciągu przez zero dzielić nie wolno.

Typ $\frac{0}{0}$ 1. Znajdziemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Licznik i mianownik dążą do zera przy $x \rightarrow 0$. Badamy iloraz pochodnych

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Wobec tego szukana granica jest równa 1.

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}.$$

Zastosowanie reguły l'Hospitala sprowadza zadanie do szukania granicy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x},$$

a to jest znowu zadanie typu $\frac{0}{0}$. Jeszcze raz stosujemy regułę l'Hospitala i otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

Wobec tego poprzednia granica jest równa 1, a na tej podstawie szukana granica też jest równa 1.

Typ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 .$$

Typ $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 .$$

Typ $\infty - \infty$

Wyrażenie typu $f - g$, gdzie $f \rightarrow \infty$ i $g \rightarrow \infty$ można sprowadzić do typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ stosując np. tożsamość

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} .$$

Przykład:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0 . \end{aligned}$$

Typy 1^∞ , 0^0 i ∞^0

Zadania tego rodzaju możemy próbować rozwiązywać przedstawiając wyrażenia typu f^g w postaci $e^{g \ln f}$ lub, co na jedno wychodzi, logarytmując badane wyrażenie. Oto przykłady:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

Badamy więc granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Wobec tego (korzystamy z ciągłości funkcji wykładniczej)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp(1) = e .$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x \ln x) = \exp(\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x) = \exp(0) = 1 .$$

Zadania.

1. Funkcja f spełnia warunek $f' = f^n$. Zakładając, że funkcja odwrotna f^{-1} istnieje i jest różniczkowalna znaleźć jej pochodną.

2. Znaleźć granice funkcji

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3};$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right), \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{1/\ln x} .$$

1.5.4 Pochodne wyższych rzędów



Jeżeli pochodna f' funkcji f jest funkcją różniczkowalną, to jej pochodną $(f')'$ nazywamy drugą pochodną funkcji f i oznaczamy f'' . Stosuje się także oznaczenie $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Analogicznie wprowadza się pojęcie pochodnej n -tego rzędu (oznaczenie: $f^{(n)}$ lub $\frac{d^n f}{dx^n}$). Funkcję, która posiada pochodną n -tego rzędu nazywamy n -krotnie różniczkowalną.

Wzór Taylora i zastosowania

Wprowadzając pojęcie funkcji różniczkowalnej stwierdziliśmy, że różniczkowalność funkcji w punkcie x_0 polega na możliwości przybliżania tej funkcji w pobliżu x_0 przez wielomian pierwszego stopnia. Twierdzenie, które zaraz podamy, umożliwi przybliżanie funkcji n -krotnie różniczkowalnej w okolicy x_0 przez wielomian stopnia n , przy czym reszta będzie spełniała znacznie mocniejszy warunek — będzie “małą rzędu n ”.

Twierdzenie 25 (WZÓR TAYLORA Z RESZTĄ W POSTACI LAGRANGE’A) *Niech f będzie funkcją $(n + 1)$ -krotnie różniczkowalną na $]a, b[$. Jeżeli $x, x_0 \in]a, b[$, to istnieje $c \in]x_0, x[$ takie, że*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x_0, x),$$

przy czym

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} .$$

Komentarze.

- Podstawiając $x_0 = 0$ otrzymamy wzór *Maclaurina*¹⁰:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(0, x) .$$

- Twierdzenie 25 jest mocniejsze niż zapowiadaliśmy, przypomina ono twierdzenie Lagrange’a o wartości średniej. Dlatego właśnie musieliśmy założyć, że f jest $n + 1$ razy różniczkowalna.

¹⁰Dla dociekliwych — zbadać, czyja praca była wcześniej, Taylora, czy Maclaurina i wyjaśnić paradoks.

Dowód. Bierzemy funkcję pomocniczą

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots \\ - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - A \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!},$$

przy czym wartość stałej A dobieramy tak, żeby $F(x_0) = 0$, tzn.

$$A = \left[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \dots \\ - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right] \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}. \quad (1.1)$$

Funkcja f spełnia założenia twierdzenia Rolle'a: $F(x) = F(x_0) = 0$, a różniczkowalność F wynika z $(n+1)$ -krotnej różniczkowalności f . Istnieje więc $c \in]x_0, x[$ takie, że $F'(c) = 0$, czyli

$$0 = -f'(c) + f'(c) - f''(c)(x-c) + f''(c)(x-c) \\ - \frac{f'''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} \\ - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + A \frac{(x-c)^n}{n!}, \quad (1.2)$$

Z równania (1.2) otrzymujemy

$$A = f^{(n+1)}(c),$$

co po podstawieniu do (1.1) daje tezę twierdzenia. \square

Przykłady

1. Wzór Maclaurina dla funkcji sinus daje

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{(2n+1)}(c),$$

przy czym $c \in]0, x[$.

2. Dla funkcji $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ ze wzoru Maclaurina mamy

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + R_2(0, x).$$

Podstawiając we wzorze

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$x = -v^2/c^2$ otrzymujemy

$$E = m_0c^2 \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} \right] + R_2 = m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2} + \frac{3m_0v^4}{8c^2} + R_2.$$

Czytelnik zechce poświęcić trochę czasu, aby sprawdzić, czy nie ma błędów w następujących wzorach:

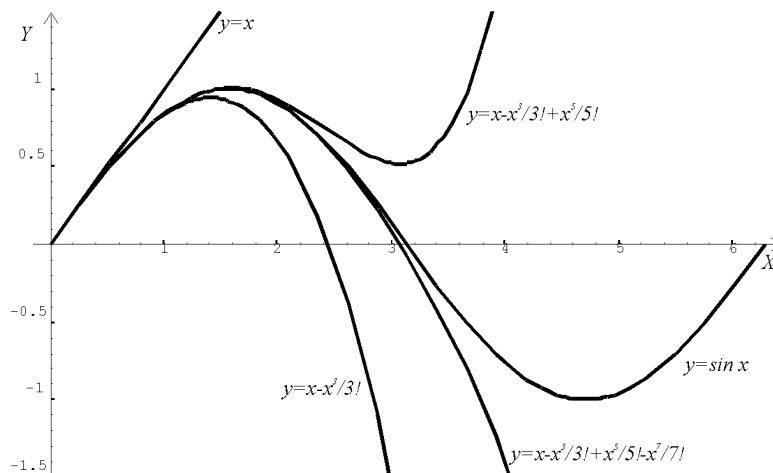
$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + R_n \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + R_n \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + R_n \\ (1+x)^q &= 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3 + \cdots + R_n \\ \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + R_n \end{aligned}$$

Zajmijmy się teraz oceną wielkości reszty R_n we wzorze Taylora. Jeżeli $f^{(n+1)}$ jest funkcją ograniczoną w otoczeniu punktu x_0 , to, pamiętając, że $c \in]x_0, x[$ mamy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0) = 0.$$

Używając wzoru Taylora do przybliżania funkcji nie powinniśmy jednak zapominać o tym, że kolejne człony wzoru dają coraz lepsze

przybliżenie w pewnym otoczeniu x_0 . Jak duże jest to otoczenie i dokładność przybliżenia z góry nie są dane; można coś o nich powiedzieć przyglądając się wyrażeniu opisującemu resztę. Pewną ilustracją może być przyjrzenie się wykresowi funkcji sinus i jej przybliżeń wzorem Taylora.



Funkcja sinus i jej rozwinięcia Taylora

Zadanie. W jakim przedziale przybliżenie $\sin x \approx x$ ma błąd mniejszy niż 10^{-4} ? W jakim przedziale błąd względny tego przybliżenia jest mniejszy od 10^{-4} ?

1.5.5 Badanie funkcji



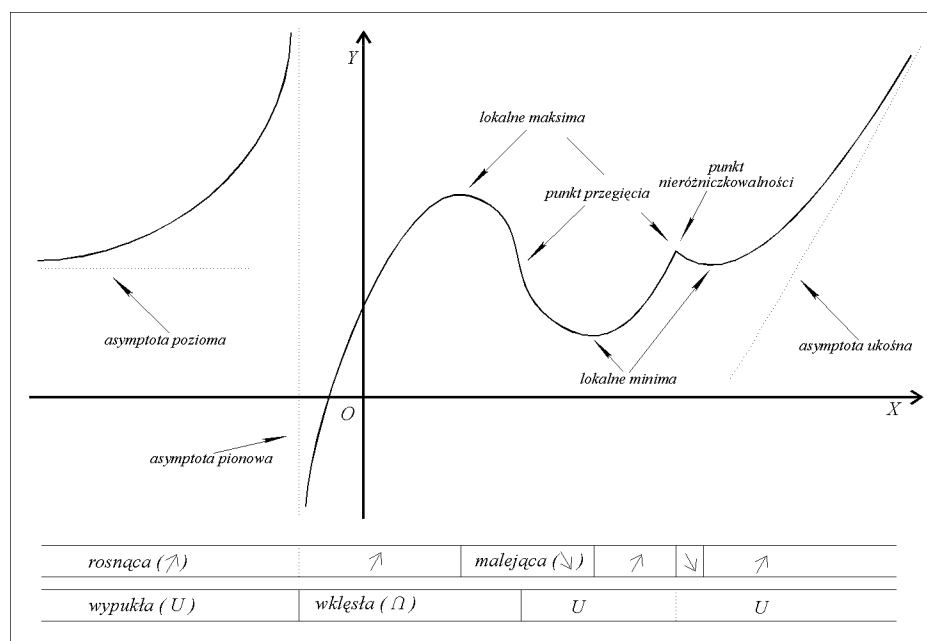
Przez badanie funkcji rozumie się bardzo różne rzeczy. W zależności od konkretnego problemu, np. fizycznego, zadajemy pytania dotyczące jakiejś funkcji. Spośród ogromnej różnorodności pytań, jakie można zadać, wybieramy kilka takich, które są szczególnie ważne, a może po prostu takie na które potrafimy odpowiadać. Są to pytania o:

ekstrema lokalne i globalne – patrz definicja poniżej,

monotoniczność – podział dziedziny funkcji na przedziały, w których funkcja jest monotoniczna,

wypukłość – wyróżnienie przedziałów, w których funkcja jest wypukła lub wklęsła (definicja niebawem),

inne interesujące własności badanej funkcji.



Przykład badania funkcji

Ekstrema

Definicja 13 Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 lokalne minimum (maksimum), jeżeli istnieje $\epsilon > 0$ takie, że dla wszystkich x spełniających warunek $|x - x_0| < \epsilon$ zachodzi $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$). Funkcja f ma ekstremum globalne w x_0 , jeżeli jedna z tych nierówności zachodzi dla wszystkich x z dziedziny funkcji.

Warunek konieczny na lokalne ekstremum funkcji podaje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 26 Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 lokalne ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.

Dowód. Jeśli f ma w x_0 lokalne maksimum, to iloraz

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

jest dla dostatecznie małych dodatnich h niedodatni, a dla dostatecznie małych nieujemnych h – nieujemny. Ponieważ granica tego ilorazu istnieje, musi być równa zeru. \square

Znajomość pierwszej pochodnej umożliwia czasem rozstrzygnięcie, czy w punkcie x_0 , takim, że $f'(x_0) = 0$ funkcja f rzeczywiście ma ekstremum.

Twierdzenie 27 (WARUNEK WYSTARCZAJĄCY EKSTREMUM) *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu x_0 , $f'(x_0) = 0$, a pochodna zmienia znak w punkcie x_0 , to f ma w x_0 lokalne ekstremum. Przy tym:*

- *Jeśli f' zmienia znak z dodatniego na ujemny (czyli $f'(x) > 0$ dla $x < x_0$ i $f'(x) < 0$ dla $x > x_0$), to f ma lokalne maksimum w x_0 .*
- *Jeśli f' zmienia znak z ujemnego na dodatni, to jest lokalne minimum.*

Dowód. Przyjmijmy, że zachodzi pierwsza z wymienionych możliwości. Korzystamy z twierdzenia Lagrange'a: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Niech $x < x_0$. Wtedy $f'(c) > 0$, $x - x_0 < 0$, więc $f(x) - f(x_0) < 0$, czyli $f(x) < f(x_0)$. Jeśli $x > x_0$, to $f'(c) < 0$, $x - x_0 > 0$ i dostajemy również $f(x) < f(x_0)$, a więc f ma maksimum w punkcie x_0 . \square

Wykorzystanie wyższych pochodnych daje inny warunek wystarczający. Sformułujemy go przyjmując trochę mocniejsze, niż trzeba założenia o różniczkowalności funkcji f . W praktyce zwykle spotykamy się z funkcjami dowolnie wiele razy różniczkowalnymi.

Twierdzenie 28 (WARUNEK WYSTARCZAJĄCY EKSTREMUM) *Jeżeli funkcja f jest k -krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu x_0 oraz $f^{(k)}$ jest ciągła w tym otoczeniu, a ponadto*

$$f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0,$$

to:

- Jeżeli k jest nieparzyste, to nie ma ekstremum.
- Jeżeli k jest parzyste, to jest ekstremum, przy czym:
 - gdy $f^{(k)} > 0$, jest to minimum,
 - gdy $f^{(k)} < 0$, jest to maksimum.

Dowód. Podstawiamy do wzoru Taylora

$$f(x) = f(x_0) + 0 + \dots + 0 + R_{k-1}(x_0, x) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - x_0)^k .$$

Z założenia o ciągłości $f^{(k)}$ wnioskujemy, że dla x dostatecznie bliskich x_0 $f^{(k)}(c)$ ma taki sam znak, jak $f^{(k)}(x_0)$.

Jeżeli k jest parzyste, to $(x - x_0)^k > 0$ dla $x \neq x_0$, wobec tego różnica $f(x) - f(x_0)$ ma zawsze ten sam znak, taki, jak znak $f^{(k)}(x_0)$. Zatem, gdy $f^{(k)}(x_0) > 0$ mamy minimum, a gdy $f^{(k)}(x_0) < 0$ – maksimum.

Jeśli k jest nieparzyste, to $(x - x_0)^k$ zmienia znak w punkcie x_0 , więc na pewno nie ma ekstremum. \square

Twierdzenie to nie rozstrzyga jednak, jak mogłaby się wydawać, wszystkich sytuacji. Nie wszystkie funkcje są różniczkowalne, a poza tym, co ciekawsze, istnieją funkcje (różne od stałych), dowolnie wiele razy różniczkowalne, których wszystkie pochodne w jakimś punkcie są równe zero. Najprostszym przykładem jest funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

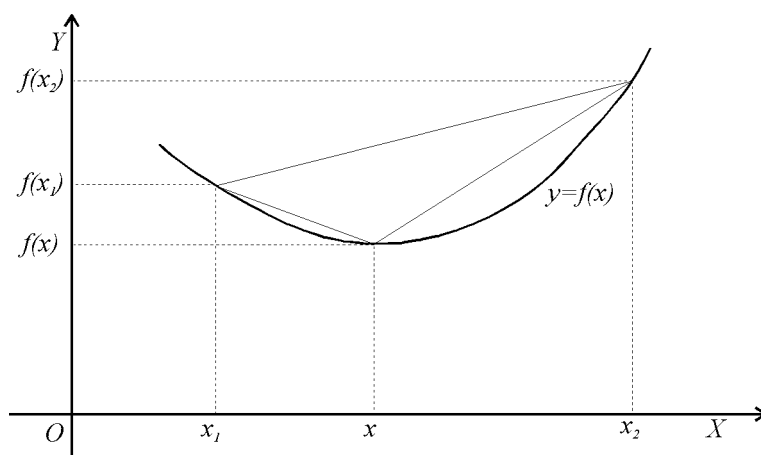


1.5.6 Funkcje wypukłe

Definicja 14 Niech f będzie funkcją określoną na odcinku $[a, b]$. Funkcję f nazywamy wypukłą, jeżeli dla dowolnych punktów $x_1, x_2 \in [a, b]$ oraz dowolnych liczb dodatnich λ_1, λ_2 spełniających warunek $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ zachodzi nierówność:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Definicja ta ma prosty sens geometryczny. Zauważmy najpierw, że $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ jest punktem leżącym między x_1 i x_2 , którego odległości od x_1 i x_2 mają się do siebie jak $\lambda_2 : \lambda_1$. Prawa strona nierówności wyznacza punkt y na osi Y , którego odległości od $f(x_1)$ i $f(x_2)$ są w tym samym stosunku. Punkty $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, (x, y) leżą więc na jednej prostej. Warunek wypukłości funkcji oznacza w rezultacie to, że fragment wykresu funkcji pomiędzy dowolnymi dwoma punktami leży poniżej cięciwy łączącej te punkty. Ilustracją tego jest poniższy rysunek:



Funkcja wypukła

Wypukłość funkcji można badać za pomocą pochodnych. Przytoczymy tu bez dowodu dwa twierdzenia na ten temat. Drugie z nich formułuje najczęściej stosowane kryterium wypukłości funkcji, a jednocześnie daje pewną pogładową interpretację drugiej pochodnej funkcji.

Twierdzenie 29 *Funkcja f różniczkowalna na $]a, b[$ jest na tym odcinku wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest funkcją niemalejącą.*

Twierdzenie 30 *Funkcja f dwukrotnie różniczkowalna na $]a, b[$ jest na tym odcinku wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f'' \geq 0$.*

Zadania

1. Zakładając, że promień świetlny wybiera zawsze taką drogę, żeby czas, w którym ją przebywa był najkrótszy, wyprowadzić prawo załamania światła.
2. Obwód elektryczny składa się z baterii o stałej sile elektromotorycznej \mathcal{E} i oporze wewnętrznym r_w . Jaki opór wewnętrzny należy podłączyć, żeby moc wydzielana na nim była największa?



1.5.7 Funkcja pierwotna (całka nieoznaczona)

Przedmiotem naszego zainteresowania będzie teraz operacja w pewnym sensie odwrotna do różniczkowania. Zajmiemy się takim oto zadaniem: Dana jest funkcja f , znaleźć, o ile istnieje, funkcję F taką, że $F' = f$. Nie będziemy na razie w stanie odpowiedzieć ogólnie na pytanie o istnienie funkcji F ; sprawa ta wyjaśni się w następnym rozdziale, poświęconym rachunkowi całkowemu. Teraz zajmiemy się metodami znajdowania funkcji pierwotnych dla różnych klas funkcji. Znajdowanie funkcji pierwotnej nazywane jest zwykle całkowaniem, co sugeruje, że jest to część rachunku całkowego. Tak jednak nie jest, mamy tu do czynienia z pojęciem z dziedziny rachunku różniczkowego, a nazwa wskazuje na bardzo ważne i piękne twierdzenie łączące te dwa rozdziały analizy matematycznej.

Definicja 15 Funkcją pierwotną funkcji f nazywamy funkcję F taką, że $F' = f$. Używać będziemy również nazwy całka nieoznaczona oraz oznaczeń

$$F = \int f, \quad \text{albo} \quad F = \int f(x) dx .$$

Na samym początku zauważmy, że zadanie, które sobie postawiliśmy, nie ma jednoznacznego rozwiązania. Jeśli f spełnia warunek $F' = f$, a C jest dowolną funkcją stałą, to $(F + C)' = f$. Odwrotnie, jeśli $F' = f$ i $G' = f$, to $(F - G)' = 0$, skąd wynika (o ile mamy na myśli funkcje określone np. na odcinku), że $F - G$ jest funkcją stałą.

Co należy więc rozumieć przez symbol typu $\int f(x) dx$? Można myśleć o zbiorze wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f , a można też myśleć o jednym (którymkolwiek) elemencie tego zbioru.

Zajmiemy się teraz metodami całkowania. We wszystkich twierdzeniach będziemy zakładali, że występujące tam funkcje posiadają funkcje pierwotne.

Twierdzenie 31 *Niech f i g oznaczają funkcje, a α i β liczby. Wtedy*

1. $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$,
2. $\int f'g = fg - \int fg'$ (całkowanie przez części),
3. $\int (F' \circ g)g' = F \circ g$ (całkowanie przez podstawienie).

Dowód. Punkty 1 i 3 to inny zapis wzorów na pochodną sumy i pochodną funkcji złożonej. Aby otrzymać wzór na całkowanie przez części, we wzorze na pochodną iloczynu $(fg)' = f'g + fg'$ przenosimy fg' na drugą stronę i bierzemy funkcję pierwotną (czyli całkujemy) obu stron.

Przykłady.

1. Zaczniemy od wzorów na całki nieoznaczone wynikających z podstawowych wzorów na pochodne:

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}, & n \neq -1 \\ \int \cos x dx &= \sin x, \\ \int \sin x dx &= -\cos x, \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \operatorname{arc} \sin x, \\ \int e^x dx &= e^x, \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x|. \end{aligned}$$

2. Kilka zastosowań wzoru na całkowanie przez części:

(a)

$$\int x e^x dx = (f' = e^x, g = x) = x e^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x,$$

(b)

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x,$$

(c)

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = \\ &= (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x, \end{aligned}$$

(d)

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1),$$

(e)

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \sin x \cdot \sin x dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = \\ &= -\sin x \cos x + \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wzór niewątpliwie prawdziwy, ale zadanie nie jest rozwiązane. Rozwiążemy je jeśli zatrzymamy się po pierwszym całkowaniu przez części i zastąpimy $\cos^2 x$ przez $1 - \sin^2 x$. Otrzymamy wtedy

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx.$$

Przenosząc $\int \sin^2 x dx$ na drugą stronę równości i dzieląc przez 2 mamy w końcu wynik:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{(f)} \quad \int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} &= \left(f' = \frac{1}{1+x^2}, g = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right) \\
 &= 1 + \int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}.
 \end{aligned}$$

Otrzymany wynik nie prowadzi do wniosku, że $0 = 1$, tylko zwraca uwagę na to, że funkcja pierwotna określona jest z dokładnością do stałej. Całkę tę oczywiście łatwiej jest znaleźć inną metodą, o której mowa będzie w następnym punkcie.

3. W następnych przykładach będziemy wykorzystywali metodę całkowania przez podstawienie. Aby usprawnić stosowanie tej metody wprowadzimy kilka umownych oznaczeń. Zauważmy najpierw, że w całce $\int f'(g(x))g'(x) dx$ podział na iloczyn $f'(g(x))$ i $g'(x)$ wcale nie jest dany z góry. Drugą rzeczą jest to, że jeśli już zdecydujemy się na wydzielenie $g'(x)$ w funkcji podcałkowej, to pozostaje problem znalezienia funkcji f , gdy dana jest jej pochodna f' , czyli znowu całkowanie. W rachunkach praktyczne okazuje się wykorzystanie następujących oznaczeń:

Zamiast $g(x)$ będziemy pisali jedną literę traktując ją jak nową zmienną, np. $y = g(x)$. Problem znajdowania funkcji f będzie zapisywany w postaci $\int f'(y) dy$. Wygląda to tak, jakby w miejsce $g'(x) dx$ zostało wstawione dy . Będziemy tak właśnie robili, pamiętając o konieczności wstawienia z powrotem $g(x)$ w miejsce y w wyniku końcowym. Przejdźmy do przykładów.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \int x e^{x^2} dx &= (y = x^2, dy = 2x dx) = \int \frac{1}{2} e^y dy = \\
 &= \frac{1}{2} e^y = \frac{1}{2} e^{x^2},
 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = (y = \cos x, dy = -\sin x dx) =$$

$$\int -\frac{1}{y} dy = -\ln |y| = -\ln |\cos x|,$$

$$(c) \quad \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = (y = e^x, dy = e^x dx) = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \\ \arctg y = \arctg e^x,$$

$$(d) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} = (y^6 = x, 6y^5 dy = dx) = \\ \int \frac{6y^5 dy}{y^3(1 + y^2)} = \int \left[6 - \frac{6}{1 + y^2} \right] dy = \\ 6y - 6\arctg y = 6\sqrt[6]{x} - 6\arctg \sqrt[6]{x},$$

Szukanie funkcji pierwotnej to wyrażanie jej za pomocą znanych funkcji. Okazuje się, że funkcje pierwotne wielu nawet bardzo prostych funkcji nie dają się wyrazić za pomocą kombinacji funkcji, które już znamy. Przykładem są tu całki:

$$\int e^{x^2} dx, \int \sin x^2 dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}.$$

Zajmiemy się teraz dosyć wąską klasą funkcji, dla których funkcje pierwotne można wyrazić przez funkcje elementarne (czyli te, które już znamy).

Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k}{b_0 + a_1x + b_2x^2 + \dots + b_lx^l} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Wśród funkcji wymiernych można wyróżnić kilka szczególnie prostych, które będziemy nazywali *ułamkami prostymi*:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{B}{(x-a)^n}, \quad n \geq 2,$$

$$\text{III. } \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}, \quad \Delta < 0, \quad \text{IV. } \frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad \Delta < 0, \quad n \geq 2.$$

Stosujemy tutaj oznaczenie $\Delta = b^2 - 4ac$.

Okazuje się (jest to ciekawe twierdzenie z dziedziny algebry), że każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i kilku ułamków prostych. Zamiast dowodu przedstawimy na przykładach, jak się taki rozkład znajduje. Całkowanie funkcji wymiernych sprowadza się w ten sposób do całkowania ułamków prostych.

I.

$$\int \frac{dx}{x-a} = (y = x-a) = \int \frac{dy}{y} = \ln y = \ln |x-a|.$$

II.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}.$$

III. Trójmian kwadratowy występujący w mianowniku sprowadza się najpierw do postaci $(x-a)^2 + b^2$, podstawienie $y = x-a$ daje całkę, w której mianownik jest równy $y^2 + b^2$. Potem przedstawiamy całkę w postaci sumy całek zgodnie z rozkładem licznika na sumę $Cy + D$. Sprowadziliśmy zadanie do obliczenia całek

$$\int \frac{y dy}{y^2 + b^2} \quad \text{oraz} \quad \int \frac{dy}{y^2 + b^2}.$$

Obliczymy je po kolei.

$$\int \frac{y dy}{y^2 + b^2} = (z = y^2 + b^2, dz = 2y dy) = \int \frac{dz}{2z} =$$

$$\frac{1}{2} \ln |z| = \ln \sqrt{y^2 + b^2}.$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + b^2} = \int \frac{dy}{b^2[(\frac{y}{b})^2 + 1]} = (z = \frac{y}{b}, dz = \frac{dy}{b}) =$$

$$\frac{1}{b} \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} z = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{y}{b}.$$

IV. Podobnie, jak w przypadku III. zadanie sprowadzamy do obliczenia całek

$$\int \frac{y dy}{(y^2 + b^2)^n} \quad \text{oraz} \quad \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^n}.$$

Pierwsza z nich jest prosta:

$$\begin{aligned} \int \frac{y dy}{(y^2 + b^2)^n} &= (z = y^2 + b^2, dz = 2y dy) = \int \frac{dz}{2z^n} = \\ &= \frac{1}{2(1-n)z^{n-1}} = \frac{1}{2(1-n)(y^2 + b^2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Druga całka jest trudniejsza do obliczenia. Znajdziemy tylko wzór pozwalający na zmniejszenie wykładnika potęgi dwumianu kwadratowego w mianowniku. Oznaczmy obliczaną całkę przez I_n .

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^n} = \int \frac{y^2 + 1 - y^2}{(y^2 + 1)^n} dy = \\ &= \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^{n-1}} - \int \frac{y^2}{(y^2 + 1)^n} dy = \\ I_{n-1} - \int y \frac{y}{(y^2 + 1)^n} dy &= \left(f' = \frac{y}{(y^2 + 1)^n}, g = x, \right. \\ f &= \int \frac{y dy}{(y^2 + 1)^n} = \frac{1}{2(1-n)(y^2 + 1)^{n-1}} \left. \right) = \\ I_{n-1} - \frac{y}{2(1-n)(y^2 + 1)^{n-1}} + \int \frac{dy}{2(1-n)(y^2 + 1)^{n-1}} &= \\ &= \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{y}{2(1-n)(y^2 + 1)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Ponadto wiemy, że $I_1 = \arctg y$, możemy więc obliczyć I_n dla dowolnego n .

Pozostała jeszcze sprawa rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste. Metodę podamy ilustrując ją jednocześnie przykładem. Weźmy funkcję wymierną

$$f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}{x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3}.$$

1. Rozkładamy mianownik na czynniki będące wielomianami pierwszego stopnia lub nierozkładalnymi wielomianami stopnia drugiego.

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3 = (x - 3)(x^2 + 1)^2.$$

2. Piszemy ogólną postać rozkładu funkcji f na sumę wielomianu i ułamków prostych. Wiemy przy tym, że:

- Wielomian wystąpi w rozkładzie tylko wtedy, gdy stopień licznika jest większy lub równy stopniowi mianownika. Stopień wielomianu jest wtedy równy różnicy stopni licznika i mianownika.
- Jeśli w rozkładzie mianownika na czynniki któryś z nich występuje w potęgę n , to mogą wystąpić ułamki proste, mianownikiem których jest ten właśnie czynnik podniesiony kolejno do potęgi $1, 2, \dots, n$.

W naszym przypadku oznacza to, że wielomian ma stopień zero, a ułamki proste mają mianowniki $x - 3$, $x^2 + 1$ oraz $(x^2 + 1)^2$. Okazuje się, że informacje te wystarczają do znalezienia rozkładu. Szukamy następującego rozkładu:

$$\frac{x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}{x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3} = A + \frac{B}{x - 3} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2}.$$

Mnożymy obydwie strony równania przez

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3 = (x - 3)(x^2 + 1)^2.$$

Otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 &= A(x - 3)(x^2 + 1)^2 + B(x^2 + 1)^2 + \\ &+ (Cx + D)(x - 3)(x^2 + 1) + \\ &+ (Ex + F)(x - 3). \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach otrzymujemy układ równań:

$$\begin{array}{l|l} x^5 & 1 = A \\ x^4 & -1 = -3A + B + C \\ x^3 & 2 = 2A - 3C + D \\ x^2 & -3 = -6A + 2B + C - 3D + E \\ x^1 & 5 = A - 3C + D - 3E + F \\ x^0 & -4 = -3A + B - 3D - 3F \end{array}$$

Rozwiązanie tego układu: $A = 1$, $B = 2$, $C = 0$, $D = 0$, $E = -1$, $F = 1$. Wobec tego

$$\frac{x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}{x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3} = 1 + \frac{2}{x-3} + \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Sprowadzanie niektórych typów całek do całkowania funkcji wymiernych

Całkę wyrażenia typu $R(\sin x, \cos x)$, będącego funkcją wymierną $\sin x$ i $\cos x$ zawsze można sprowadzić do całkowania funkcji wymiernej stosując podstawienie $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Mamy wtedy

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Podstawienie to zawsze prowadzi do funkcji wymiernej, ale w wielu przypadkach otrzymuje się bardzo skomplikowane wyrażenie. Pewne symetrie funkcji podcałkowej pozwalają na podstawienia prowadzące do znacznie prostszych wyrażeń. Dla skrócenia zapisu oznaczamy $u = \sin x$, $v = \cos x$.

1. Jeśli $R(-u, v) = -R(u, v)$, to podstawiamy $t = \cos x$,
2. Jeśli $R(u, -v) = -R(u, v)$, to podstawiamy $t = \sin x$,
3. Jeśli $R(-u, -v) = R(u, v)$, to podstawiamy $t = \operatorname{tg} x$,

Aby się o tym przekonać, wystarczy wykonać podstawienie $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ w poniższych przykładach.

Przykłady.

1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = (t = \cos x) = \int \frac{dt}{t^2 - 1} =$$

$$\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right] = \log \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}}.$$

2.

$$\int \sin^2 x \cos^5 x = (t = \sin x) = \int t^2(1-t^2)^4 dt =$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{4 \sin^5 x}{5} + \frac{6 \sin^7 x}{7} - \frac{4 \sin^9 x}{9} + \frac{\sin^{11} x}{11}.$$

3.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} \cos^2 x = (t = \operatorname{tg} x) =$$

$$\int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}.$$

Całki z wymiernych kombinacji funkcji wykładniczej (i funkcji hiperbolicznych) sprowadzają się do całek funkcji wymiernych przez podstawienie $t = e^x$.

Całki wyrażeń zawierających pierwiastki z trójmianów kwadratowych możemy sprowadzać do całek z funkcji wymiernych różnymi sposobami. Najpierw sprowadzamy wyrażenie podpierwiastkowe do najprostszej (jednej z wymienionych poniżej) postaci, a potem stosujemy podstawienie.

1. $\sqrt{1-x^2}$ — podstawiamy $x = \cos t$ lub $x = \sin t$,
2. $\sqrt{1+x^2}$ — podstawiamy $x = \operatorname{sh} t$,
3. $\sqrt{x^2-1}$ — podstawiamy $x = \operatorname{ch} t$.

Tą drogą otrzymuje się całki z wyrażeń trygonometrycznych lub hiperbolicznych, które prowadzą do całek z funkcji wymiernych.

Łatwiejsze rachunki występują przy zastosowaniu tzw. *podstawień Eulera*. Przyjmijmy, że w wyrażeniu podcałkowym występuje pierwiastek postaci $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

1. Jeśli $a > 0$, to można przyjąć $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$,
2. Jeśli $c > 0$, to można przyjąć $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$,
3. Jeśli trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 , to można podstawić $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$.

Przy tych podstawieniach trzeba trochę popracować, aby do końca wyrugować x z wyrażenia podcałkowego. Zobaczmy to na przykładzie:

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Można tu zastosować pierwsze lub drugie podstawienie Eulera. Wybieramy pierwsze. Podstawiamy $\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x$. Wtedy

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}, \quad dx = 2 \frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2} dt,$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t - 1)^2} dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t - 1} + 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |2t - 1| = \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1} - 3 \ln |2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1| + \\ &\quad 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - x + 1}|. \end{aligned}$$



1.6 Rachunek całkowy

1.6.1 Całka Riemanna

W kilku zagadnieniach fizycznych omawianych w szkole spotkaliście się z problemem znajdowania “pola powierzchni pod wykresem” danej funkcji. Dla przypomnienia wymieńmy niektóre z tych zagadnień:

- Znajdowanie przebytej drogi, gdy dana jest prędkość, w szczególności wyprowadzenie wzoru na drogę w ruchu jednostajnie zmiennym.
- Praca w polu danych sił zewnętrznych, a stąd wzory na energię potencjalną w polu jednorodnym, w polu sił ciężkości związanych z masą punktową, w polu sił elektrostatycznych ładunku punkowego, a także wzór na energię potencjalną oscylatora harmonicznego.
- Praca związana z przepływem prądu elektrycznego i związane z nią wzory na energię naładowanego kondensatora, zwojnicy, przez którą płynie prąd oraz wzór na pracę prądu zmiennego.

Pojęcie matematyczne, o które tutaj chodzi nazywa się całką. Wprowadzimy je stosując metodę podobną do tej, z którą mogliście spotkać się w szkole. Najpierw wprowadzimy pewien termin ułatwiający ściślejsze formułowanie definicji. Będziemy używali oszacowań wartości funkcji na różnych przedziałach. Oczywiście najlepszym oszacowaniem z góry byłaby największa wartość funkcji, a z dołu — najmniejsza. Kłopot tkwi w tym, że nie zawsze funkcja przybiera wartość największą i najmniejszą. Można wykazać (nie jest to jednak zupełnie proste), że albo funkcja ograniczona przybiera wartość największą, albo wśród liczb większych od wszystkich wartości funkcji istnieje najmniejsza. Liczbę tę (albo największą wartość funkcji, jeśli istnieje) nazywamy *kresem górnym* funkcji na interesującym nas zbiorze A i oznaczamy $\sup_{x \in A} f(x)$ (supremum). Podobnie określamy kres dolny funkcji, oznaczamy go $\inf_{x \in A} f(x)$ (infimum).

Niech f będzie funkcją ograniczoną określoną na przedziale $[a, b]$. Podzielmy przedział $P = [a, b]$ na n części $P_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ wybierając jakiegokolwiek punkty x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ spełniające warunek $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Dla skrócenia zapisu podział będziemy oznaczali jedną literą, np. π . Szczególnie interesujące będą podziały na bardzo drobne części. Z tego względu wprowadzamy następujące pojęcie:

Definicja 16 Średnicą podziału π nazywamy największą z liczb $x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Oznaczać ją będziemy przez $\delta(\pi)$.

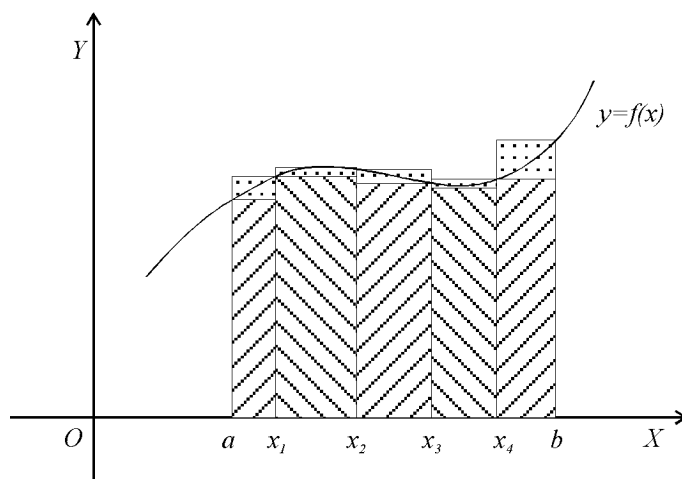
Całkę funkcji f definiować będziemy za pomocą pewnego ciągu przybliżeń. Przybliżeniami tymi (z góry i z dołu) są tzw. *sumy Riemanna*.

Definicja 17 Sumą górną funkcji f odpowiadającą podziałowi π nazywamy liczbę

$$\overline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in P_i} f(x).$$

Analogicznie określamy sumę dolną

$$\underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in P_i} f(x).$$



Sumy Riemanna

Definicja 18 Funkcję f nazywamy całkowną w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, jeżeli istnieje ciąg (π_n) podziałów przedziału $[a, b]$ taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\overline{S}(f, \pi_n) - \underline{S}(f, \pi_n)] = 0.$$

Twierdzenie 32 *Jeżeli funkcja f jest całkowna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, to dla dowolnego ciągu (π_n) podziałów $[a, b]$ o tej własności, że $\delta(\pi_n) \rightarrow 0$ istnieją granice*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, \pi_n) \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, \pi_n)$$

i są równe.

Dowód tego twierdzenia nie jest trudny, ale go pominiemy.

Definicja 19 *Niech f będzie całkowna w sensie Riemanna na $[a, b]$. Całką funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę*

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, \pi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, \pi_n).$$

Wprowadzamy ponadto następujące oznaczenie:

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{gdy } a < b, \\ -\int_{[a,b]} f & \text{gdy } a > b, \\ 0 & \text{gdy } a = b. \end{cases}$$

Pozostaje jeszcze do rozstrzygnięcia pytanie, czy klasa funkcji całkownych w sensie Riemanna jest dostatecznie obszerna. Okazuje się, że zawiera ona wszystkie funkcje ciągłe, o czym mówi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 33 (RIEMANN) *Każda funkcja ciągła na $[a, b]$ jest całkowna w sensie Riemanna na $[a, b]$.*

Tego twierdzenia również nie będziemy dowodzili, ale z innego powodu. Dowód wymaga użycia pojęcia jednostajnej ciągłości funkcji (nawiasem mówiąc, stworzonego przez Heinego specjalnie dla dowodu tego twierdzenia).

Twierdzenie 34 (ELEMENTARNE WŁASNOŚCI CAŁKI)

1.

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx,$$

2.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

3.

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$



1.6.2 Twierdzenie podstawowe

Twierdzenie 35 (O WARTOŚCI ŚREDNIEJ RACHUNKU CAŁKOWEGO) *Niech f będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$. Istnieje $c \in [a, b]$ takie, że*

$$\int_{[a,b]} f = (b - a)f(c).$$

Dowód. Oznaczmy: $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Z definicji całki łatwo wynika, że

$$m(b - a) \leq \int_{[a,b]} f \leq (b - a)M, \text{ czyli } m \leq \frac{1}{b - a} \int_{[a,b]} f \leq M.$$

Ale funkcja f jest ciągła, zatem przybiera wartość największą (M) i najmniejszą (m), ponadto ma własność Darboux, czyli przybiera wszystkie wartości między m i M , więc istnieje $c \in [a, b]$ takie, że

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_{[a,b]} f. \quad \square$$

Twierdzenie 36 (PODSTAWOWE TWIERDZENIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO) *Niech f będzie funkcją ciągłą na $]a, b[$, $x_0 \in]a, b[$. Wtedy funkcja F określona na $]a, b[$ wzorem*

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

jest różniczkowalna oraz

$$F'(x) = f(x).$$

Dowód.

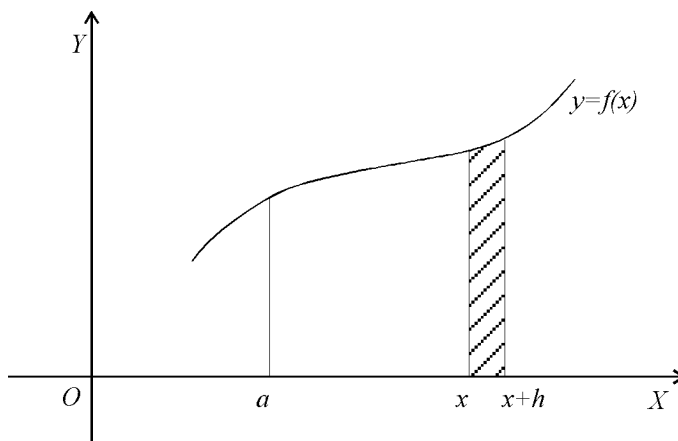
$$\frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)] = \frac{1}{h} \left[\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Twierdzenie o wartości średniej orzeka, że istnieje $c \in [x, x+h]$ takie, że

$$f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Jeśli teraz weźmiemy ciąg $h_n \rightarrow 0$, to odpowiadający mu ciąg (c_n) zbiega do x , więc (po raz drugi korzystamy z ciągłości f) $f(c_n) \rightarrow f(x)$. Wykazaliśmy więc, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)] = f(x). \quad \square$$



Ilustracja dowodu twierdzenia

Sformułujemy teraz twierdzenie podstawowe w postaci, która jest jednocześnie przepisem na obliczanie całki z funkcji, gdy znana jest jej

funkcja pierwotna. Niech F_1 będzie funkcją pierwotną funkcji ciągłej f . Twierdzenie podstawowe daje nam inną funkcję pierwotną f :

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Mamy $(F - F_1)' = 0$, więc $F - F_1$ jest funkcją stałą. Obliczmy tę stałą. Oznaczamy ją przez C . $C = F(x_0) - F_1(x_0) = -F_1(x_0)$, bo $F(x_0) = 0$, skąd mamy

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = F_1(x) + C = F_1(x) - F_1(x_0).$$

Zapiszemy to w postaci twierdzenia zastępując x_0, x przez a, b .

Twierdzenie 37 *Niech f będzie funkcją ciągłą, a F jej funkcją pierwotną (jakąkolwiek). Wtedy*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Powszechnie stosuje się zapis:

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Przykłady.

1.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2.

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

3.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = (y = \sin x, dy = \cos x dx) = \arctg(\sin x) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

W ostatnim przykładzie stosowaliśmy podstawienie. Można w takim przypadku, zamiast powracać do zmiennej x w funkcji pierwotnej, a potem podstawiać granice całkowania, dokonać zmiany granic całkowania. Mianowicie, oznaczając przez F funkcję pierwotną funkcji f mamy

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy.$$

I tak, podstawiając $u = 1 + x^2$ otrzymujemy

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2} dx = \int_1^5 \frac{du}{2u} = \log \sqrt{5}.$$

Przykłady (Całki występujące w programie szkoły średniej.)

1. Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

$$s = \int_{t_0}^t (v_0 + at') dt' = v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}.$$

2. Momenty bezwładności

(a) Pręta o długości l i masie m względem osi prostopadłej do niego przechodzącej przez jego koniec.

$$\mathcal{I} = \int_0^l \frac{m}{l} r^2 dr = \frac{m}{l} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^l = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}.$$

(b) Walca o masie m i promieniu R względem osi.

$$\mathcal{I} = \int_0^R \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r \cdot r^2 dr = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{mR^2}{2}.$$

(c) Kuli o masie m i promieniu R względem osi przechodzącej przez jej środek.

$$\mathcal{I} = \int \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^2 dr =$$

$$\begin{aligned} (y = \sqrt{R^2 - r^2}, \quad dy = \frac{-r \, dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}) \\ = \frac{3m}{R^3} \left[\frac{R^2 y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_0^R = \frac{2}{5} m R^2. \end{aligned}$$

3. Energia potencjalna sił sprężystości.

$$E = \int_0^x kx' \, dx' = \frac{kx'^2}{2} \Big|_0^x = \frac{kx^2}{2}.$$

4. Energia potencjalna w polu sił Coulomba.

$$E = \int_{r_0}^r \frac{Qq}{r'^2} \, dr' = -\frac{Qq}{r} \Big|_{r_0}^r = Qq \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right].$$

1.7 Szeregi



1.7.1 Szeregi liczbowe

Pod nazwą szeregu ukrywa się problem znajdowania granicy pewnego szczególnego rodzaju. Niech będzie dany ciąg (a_n) . Chcemy znaleźć

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Granice tę, jeśli istnieje, nazywamy *sumą szeregu* i zapisujemy jako $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Mówimy wtedy, że szereg jest *zbieżny*. Sumy $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ nazywamy *sumami cząstkowymi* szeregu. Następujące twierdzenie daje prosty warunek konieczny zbieżności szeregu.

Twierdzenie 38 *Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $a_n \rightarrow 0$.*

Dowód. Ciąg (s_n) , jako zbieżny, musi być ciągiem Cauchy, czyli dla dowolnego $\epsilon > 0$ różnica $|s_n - s_m| < \epsilon$, o ile tylko n i m są dostatecznie duże. Biorąc $m = n - 1$ mamy $|a_n| < \epsilon$ dla dostatecznie dużych n , a to właśnie znaczy, że $a_n \rightarrow 0$.

Warunek ten nie jest jednak dostateczny, o czym przekonuje prosty a ważny przykład:

Przykład. Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Widać, że (s_n) nie może być ciągiem Cauchy, a więc nie może być zbieżny.

Pożyteczny warunek wystarczający, ale o dosyć wąskim zakresie zastosowań daje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 39 (KRYTERIUM LEIBNIZA) *Jeżeli ciąg (a_n) jest malejący i dąży do zera, to szereg $\sum (-1)^{n+1} a_n$ jest zbieżny.*

Dowód. Najpierw zbadamy zbieżność podciągów (s_{2n}) i (s_{2n-1}) ciągu sum cząstkowych (s_n) . Podciąg (s_{2n}) jest rosnący, bo

$$s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+2} + a_{2n+1} > 0.$$

Podciąg (s_{2n-1}) jest malejący, bo

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n+1} - a_{2n} < 0.$$

Stwierdzamy ponadto, że każdy wyraz podciągu (s_{2n}) jest mniejszy od każdego wyrazu podciągu (s_{2n-1}) . Rzeczywiście, $s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n} < 0$, więc $s_{2n} < s_{2n-1}$, następnie dla dowolnych k, l można wziąć $n > k, l$ i na podstawie udowodnionych już nierówności mamy $s_{2k} < s_{2n} < s_{2n-1} < s_{2l-1}$. Wnioskujemy stąd, że obydwa podciągi są monotoniczne i ograniczone, a więc zbieżne. Granice ich są równe, bo $s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n} \rightarrow 0$. Wobec tego rozważany szereg jest zbieżny. \square

Przykład. Szereg

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \cdots$$

jest zbieżny.

Zbieżność bezwzględna i bezwarunkowa szeregów

Zobaczmy teraz, że szeregi zachowują się czasem zupełnie niepodobnie do zwykłych sum skończonych. Niech

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots,$$

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots.$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots.$$

W ostatnim szeregu występują wszystkie wyrazy pierwszego szeregu, tylko w innym porządku. W przypadku skończonych sum zmiana kolejności składników nie zmienia sumy. Albo dokonaliśmy jakichś niedozwolonych operacji, albo rzeczywiście suma szeregu może zależeć od kolejności wyrazów. Jak zobaczymy, rachunek nasz był poprawny. Suma szeregu (zbieżność też) *może* zależeć od kolejności wyrazów.

Jeżeli dwa szeregi, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to z twierdzenia o sumie ciągów zbieżnych zastosowanego do ciągów sum cząstkowych otrzymujemy natychmiast zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ oraz równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

czyli rachunek przeprowadzony na początku tego rozdziału był poprawny. Należy więc wyróżnić klasę tych szeregów, dla których takie sztuczki są niemożliwe.

Definicja 20 Przystawieniem zbioru liczb naturalnych \mathbf{N} będziemy nazywali odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne $\pi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy bezwarunkowo zbieżnym, jeżeli dla dowolnego przestawienia π szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ jest zbieżny i ma taką samą sumę.

Dość łatwo można wykazać, że w definicji tej wystarczy założyć, że szereg uzyskany po przestawieniu zawsze jest zbieżny; równość sum jest konsekwencją takiego założenia. Okazuje się, że bezwarunkową zbieżność szeregu można scharakteryzować w inny sposób, znacznie łatwiejszy do sprawdzania.

Definicja 21 Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Zachodzi następujące twierdzenie, którego dowód, choć niezbyt trudny, pomijamy.

Twierdzenie 40 Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwarunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwzględnie zbieżny.

Zauważmy, że dla szeregów o wyrazach nieujemnych bezwzględna (a więc i bezwarunkowa) zbieżność to tyle samo, co zwykła zbieżność. Praktyczne narzędzie do badania zbieżności szeregów daje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 41 (KRYTERIUM PORÓWNAWCZE) Jeżeli zachodzi nierówność $0 \leq a_n \leq b_n$ oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

Jako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ można wziąć szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Łatwo się przekonać, że jest on bezwzględnie zbieżny dla $|q| < 1$, a rozbieżny dla $|q| \geq 1$. Otrzymujemy stąd następujące dwa kryteria zbieżności szeregów:

Twierdzenie 42

1. (KRYTERIUM CAUCHY'EGO). Jeżeli istnieje granica

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

to dla $q < 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, a dla $q > 1$ rozbieżny.

2. (KRYTERIUM D'ALEMBERTA) Jeżeli istnieje granica

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

to dla $q < 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, a dla $q > 1$ rozbieżny.

Przykłady.

1. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest, jak już widzieliśmy, rozbieżny.

2. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

jest zbieżny, ponieważ jego n -ta suma cząstkowa

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

3. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

jest zbieżny bowiem $1/(n+1)^2 < 1/n(n+1)$.

4. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

jest rozbieżny, bo $1/n \leq 1/\sqrt{n}$, a na mocy kryterium porównawczego jego zbieżność pociągałaby za sobą zbieżność szeregu z Przykładu 1.

5. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

jest zbieżny, bo $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+1) = 0$.

1.7.2 Szeregi potęgowe



Przyjrzyjmy się wzorowi Taylora dla funkcji wykładniczej

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n, \quad R_n = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Ponieważ $e^{\Theta x} \leq e^{|x|}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, więc dla każdego $x \in \mathbf{R}$ wartość funkcji e^x jest sumą szeregu

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Jest to przykład *szeregu potęgowego*. Ogólnie, szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Kryterium Cauchy'ego pozwala na ustalenie, dla jakich x szereg potęgowy jest zbieżny. Należy obliczyć granicę $\sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \sqrt[n]{|a_n|}$. Wynik można podsumować w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 43¹¹ *Załóżmy, że istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$. Niech $R = 1/\rho$. Wtedy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest*

- (bezwzględnie) zbieżny dla $|x - x_0| < R$
- rozbieżny dla $|x - x_0| > R$.

R nazywa się *promieniem zbieżności* szeregu potęgowego. Jeżeli $\rho = 0$, to szereg potęgowy jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$. Piszemy wtedy $R = \infty$. Okazuje się, że funkcje dające się przedstawić jako sumy szeregów potęgowych (nazywane *funkcjami analitycznymi*) mają wiele bardzo interesujących własności. Najpierw zobaczmy, że na szeregach potęgowych można wykonywać działania takie, jak różniczkowanie i całkowanie, byle tylko x było wewnątrz przedziału zbieżności. Niech

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

¹¹Twierdzenie to podajemy w bardzo okrojonym sformułowaniu, wystarczającym jednak do zrozumienia, o co chodzi i do wielu zastosowań.

będzie szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $R = 1/\rho$. Utwórzmy szereg potęgowy, którego wyrazy są pochodnymi wyrazów szeregu S :

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1}.$$

Znajdujemy promień zbieżności szeregu T :

$$\rho' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|na_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

Stwierdzamy więc, że szereg T ma ten sam promień zbieżności. Trochę trudniej jest udowodnić, że suma szeregu T jest pochodną sumy szeregu S i dowód ten pomijamy.

Przykłady.

1. Dla $|x| < 1$ suma szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Różniczkujemy stronami

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Podstawiając np. $x = 1/2$ otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4.$$

2. Dla $|x| < 1$ zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Całkując stronami mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \log(1+x),$$

co jest znanym nam skądinąd rozwinięciem logarytmu.

Rozdział 2

Algebra liniowa i geometria

2.1 Liczby zespolone



Liczby zespolone zostały wynalezione (odkryte?) na przełomie XVI i XVII wieku w związku z rozwiązywaniem równań trzeciego stopnia. Na początku miały jednak nienajlepszą opinię. Chodziło przede wszystkim o to, że powątpiewano w ich istnienie. Trudno bowiem przyjąć bez wyjaśnień istnienie liczby i takiej, że $i^2 = -1$. Stąd wzięła się nazwa *liczby urojone* oraz symbol i – *imaginarius*, urojony. Ze względu na to rozwój ich teorii i zastosowań był stosunkowo powolny aż do XIX wieku, kiedy rozwiązano problem ich istnienia. Był to jednocześnie krok w kierunku zrozumienia, na czym polega istnienie przedmiotów matematycznych. Okazało się mianowicie, że liczby zespolone można opisać jako dość proste obiekty skonstruowane z liczb rzeczywistych. Jeśli istnieją liczby rzeczywiste, to istnieją i liczby zespolone. Jednej z takich konstrukcji użyjemy do wprowadzenia liczb zespolonych.

Rozważać będziemy uporządkowane pary (a, b) liczb rzeczywistych. Zbiór wszystkich takich par oznaczymy literą \mathbf{C} . W zbiorze \mathbf{C} wprowadzimy dwa działania: dodawanie i mnożenie:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).¹$$

¹Zaraz zobaczymy, dlaczego przyjęliśmy tutaj taką dziwną definicję.

Zbiór \mathbf{C} wyposażony w zdefiniowane powyżej dwa działania matematyczne nazywają ciałem liczb zespolonych. Termin *ciało* przypomina o tym, że w tym zbiorze określone są działania posiadające takie własności, jakich spodziewamy się po mnożeniu i dodawaniu.

W dalszym ciągu będziemy stosowali praktyczniejszy zapis: zamiast (a, b) będziemy pisali $a + bi$. Działania w \mathbf{C} zdefiniowane są w ten sposób, że symbole typu $a + bi$ dodaje się i mnoży jak zwykle wielomiany, uwzględniając tylko warunek $i^2 = -1$. Sprawdźmy to dla mnożenia:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

A co z dzieleniem liczb zespolonych? Nie wchodząc w subtelności dotyczące definicji dzielenia pokażemy, jak się to robi. Mamy dane dwie liczby zespolone $z_1 = a + bi$ oraz $z_2 = c + di \neq 0$. Chodzi o to, żeby ich iloraz doprowadzić do postaci $x + iy$.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną. *Częścią rzeczywistą* liczby z nazywamy a i oznaczamy przez $\operatorname{Re} z$, a *częścią urojoną* oznaczaną przez $\operatorname{Im} z$ nazywamy b . Liczbą *sprzężoną* do z nazywamy liczbę $\bar{z} = a - bi$. Zachodzą następujące tożsamości:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Modułem albo *wartością bezwzględną* liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Oto podstawowe własności modułu:

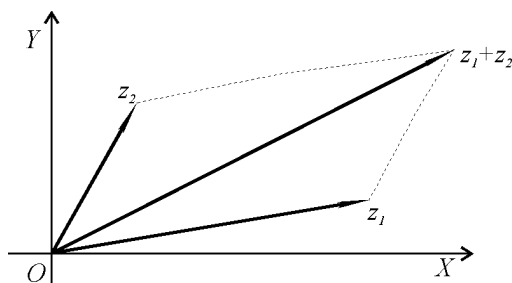
$$|z|^2 = z\bar{z},$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

2.1.1 Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

Liczby zespolone, jako pary liczb rzeczywistych, można interpretować jako punkty płaszczyzny. Wystarczy, żeby na płaszczyźnie był wybrany jakiś układ współrzędnych. Dodawanie liczb zespolonych reprezentuje się wtedy jako dodawanie odpowiadających im wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych.

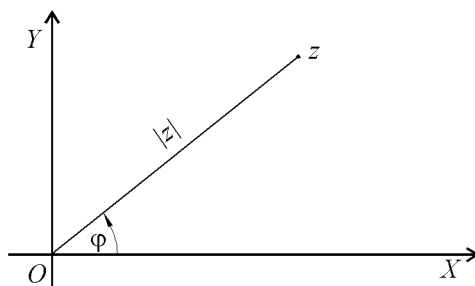


Dodawanie liczb zespolonych.

Zauważmy, że jeśli liczbie $z = a + bi$ odpowiada punkt o współrzędnych (a, b) , to moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ jest równy odległości tego punktu od początku układu współrzędnych. Oznaczając przez φ kąt (skierowany) między osią X a wektorem \vec{oz} otrzymamy $a = |z| \cos \varphi$, $b = |z| \sin \varphi$, czyli

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Kąt φ nazywa się *argumentem* liczby z . Argument nie jest wyznaczony przez z jednoznacznie — można do niego dodać całkowitą wielokrotność 2π , a dla $z = 0$ w ogóle nie ma sensu określanie argumentu. Dla $z \neq 0$ można ujednoznaczyć wybór argumentu umawiając się np., że $\varphi \in [0, 2\pi[$.



Przedstawienie trygonometryczne liczby zespolonej.

Znaczenie trygonometrycznego przedstawienia liczb zespolonych stanie się widoczniejsze, gdy znajdziemy przedstawienie trygonometryczne iloczynu. Niech $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Wtedy

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= |z_1| |z_2| [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &\quad i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \\ &= |z_1| |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Tożsamość ta jest bardzo ważna, sformułujemy ją więc jeszcze raz — słowami:

Przy mnożeniu liczb zespolonych
moduły się mnożą a argumenty dodają.

Zasada ta w bardzo prosty sposób przedstawia wzory na funkcje trygonometryczne sumy kątów, a to chyba oznacza głębsze ich rozumienie. Wniosek praktyczny może być ten, że wiele wzorów trygonometrycznych będzie można łatwiej wyprowadzić korzystając z przedstawienia trygonometrycznego liczb zespolonych. Zanim się tym zajmiemy, wprowadzimy ważne oznaczenie (wzór Eulera):

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Wiemy już, że prawdziwy jest wzór $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$. Wzór Eulera jest czymś więcej niż tylko oznaczeniem. Jeżeli w szeregach Taylora funkcji wykładniczej, sinusa i kosinusa dopuścimy podstawianie zmiennej zespolonej, to wzór ten staje się twierdzeniem wyrażającym głębokie powiązanie tych funkcji. Ze wzoru Eulera mamy natychmiast

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \\ \sin \varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \end{aligned}$$

Oto przykład zastosowania liczb zespolonych do wyprowadzania tożsamości trygonometrycznych: Niech $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Wtedy $z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$, $\cos \varphi = (z + \bar{z})/2$. Mamy stąd, zauważając, że $z\bar{z} = 1$ i zakładając, że n jest nieparzyste

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^n} (z + \bar{z})^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} \bar{z}^k = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos(n-2k)\varphi.$$

Zadania

1. Rozwiązać równanie $z^2 = 3 + 4i$.
2. Wykazać, że jeśli $\operatorname{Im} z > 0$, to

$$\left| \frac{z+i}{z-i} \right| > 1.$$

3. Przedstawić w zwiniętej postaci sumę $\sum_{k=0}^n \cos k\varphi$.

2.1.2 Pierwiastkowanie liczb zespolonych



Zajmiemy się teraz pierwiastkowaniem liczb zespolonych. Zauważmy najpierw, że wyciąganie pierwiastka n -tego stopnia z liczby w oznacza rozwiązywanie równania $z^n = w$. Przedstawmy w w postaci trygonometrycznej: $w = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Szukana liczba z przedstawia się w postaci $z = |z|(\cos \psi + i \sin \psi)$. Równanie $z^n = w$ przybierze teraz postać:

$$z^n = |z|^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = w = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Wobec tego

$$|z|^n = |w|, \quad \cos n\psi + i \sin n\psi = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Stąd mamy

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ostateczny wynik:

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

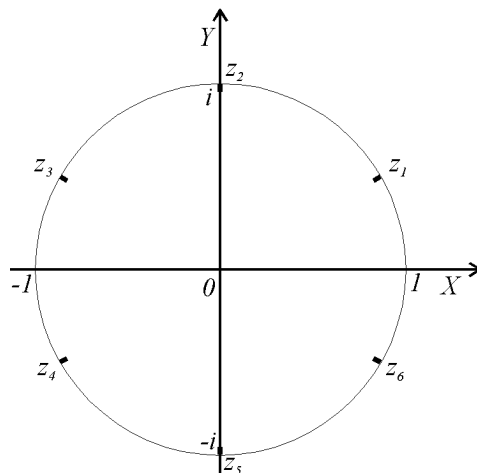
Uwagi.

- $\sqrt[n]{|w|}$ oznacza pierwiastek n -tego stopnia znany ze szkoły, czyli taką liczbę nieujemną, której n -ta potęga równa się $|w|$.
- Zauważmy, że każda liczba zespolona różna od zera ma dokładnie n różnych pierwiastków n -tego stopnia.

Przykład. Znajdziemy pierwiastki szóstego stopnia z -1 . Przedstawienie trygonometryczne liczby $w = -1$ jest następujące: $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$, czyli $|w| = 1$, $\varphi = \pi$. Podstawiając do wzoru mamy sześć pierwiastków:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \\ z_2 &= \cos \frac{\pi + 2\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{6} = i, \\ z_3 &= \cos \frac{\pi + 4\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \\ z_4 &= \cos \frac{\pi + 6\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \\ z_5 &= \cos \frac{\pi + 8\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 8\pi}{6} = -i, \\ z_6 &= \cos \frac{\pi + 10\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 10\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \end{aligned}$$

Zauważmy, że liczby z_1, z_2, \dots, z_6 na płaszczyźnie zespolonej są wierzchołkami sześciokąta foremnego.

Pierwiastki szóstego stopnia z -1

2.1.3 Własności wielomianów w dziedzinie zespolonej



Na podstawową rolę liczb zespolonych wskazuje następujące twierdzenie

Twierdzenie 44 (ZASADNICZE TWIERDZENIE ALGEBRY) *Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych stopnia conajmniej 1 ma pierwiastek zespolony.*

Inaczej można to sformułować jak następuje:

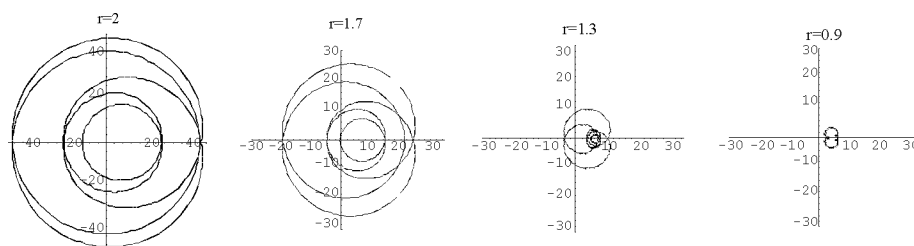
Niech w będzie wielomianem stopnia $n \geq 1$ o współczynnikach zespolonych

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Istnieje $z \in \mathbf{C}$ takie, że $w(z) = 0$.

Twierdzenie to dowodzone na wiele istotnie różnych sposobów. Przedstawimy tutaj szkic jednego z nich. Zauważmy najpierw, że bez ograniczenia ogólności można założyć, że $a_n = 1$. Niech z przebiega okrąg o środku zero i promieniu r w kierunku przeciwnym do ruchu

wskazówek zegara. Wtedy z^n przebiega okrąg o środku w zerze i promieniu r^n n -krotnie. Można przekonać się, że jeśli r jest dostatecznie duże, to $|z^n|$ jest większe od modułu pozostałej części wielomianu. Wtedy (co jest intuicyjnie dosyć jasne, ale nie tak proste do udowodnienia, a nawet do precyzyjnego sformułowania) $w(z)$ również obiega n -krotnie zero. Zmniejszamy teraz promień r do zera. Krzywa, którą przebiegało $w(z)$ deformuje się w sposób ciągły do punktu a_0 . Jeśli $a_0 = 0$, to nie ma czego dowodzić, bo $z = 0$ jest szukany rozwiązaniem, a dla $a_0 \neq 0$ krzywa podczas ciągłej deformacji musiała kiedyś przejść przez zero. Na rysunku przedstawione są krzywe zakreślone przez $w(z) = z^5 + z^4 - z^2 - 2z + 5$, gdy z zakreśla okręgi o podanych promieniach.



Ilustracja dowodu zasadniczego twierdzenia algebry.

Zanim przyjrzymy się konsekwencjom tego twierdzenia, musimy powtórzyć pewne własności wielomianów znane ze szkoły średniej. Sposób (czyli algorytm) dzielenia wielomianów prowadzi do takiego oto wyniku: Jeśli dane są dwa wielomiany w i u , to dzielenie w przez u , dając w wyniku p oraz resztę r , prowadzi do równości:

$$w = p \cdot u + r,$$

przy czym stopień wielomianu r jest niższy od stopnia dzielnika, którym jest u .

Zobaczmy to na przykładzie. Dzielimy wielomian $w(x) = z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 2z + 5$ przez wielomian $u(z) = z - 2$:

$$\begin{array}{r}
 z^3 \quad -3z^2 \quad -3z \quad -4 \\
 \hline
 z^4 \quad -5z^3 \quad +3z^2 \quad +2z \quad +5 \quad : \quad z - 2 \\
 z^4 \quad -2z^3 \\
 \hline
 \quad -3z^3 \quad +3z^2 \\
 \quad -3z^3 \quad +6z^2 \\
 \hline
 \qquad \quad -3z^2 \quad +2z \\
 \qquad \quad -3z^2 \quad +6z \\
 \hline
 \qquad \qquad \quad -4z \quad +5 \\
 \qquad \qquad \quad -4z \quad +8 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \quad -3
 \end{array}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób tożsamość

$$z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 2z + 5 = (z^3 - 3z^2 - 3z - 4)(z - 2) - 3.$$

Reszta -3 rzeczywiście jest stopnia niższego niż stopień dzielnika $z - 2$. Podstawmy do obydwu stron tej tożsamości $z = 2$. Lewa strona daje wartość wielomianu w w tym punkcie, czyli $w(2)$, a prawa strona daje wartość reszty -3 . Uogólnijmy naszą obserwację: Dzielimy dowolny wielomian w przez $z - a$. W wyniku otrzymujemy

$$w(z) = p(z)(z - a) + r,$$

przy czym reszta r jest stopnia niższego niż stopień $z - a$, jest więc stałą. Podstawiając $z = a$ mamy wartość tej stałej:

$$w(a) = r.$$

Jeśli zapytamy teraz, kiedy reszta r jest równa zeru, otrzymamy następującą odpowiedź:

Wielomian w dzieli się (bez reszty) przez $z - a$
wtedy i tylko wtedy,
gdy $w(a) = 0$.

Jeśli weźmiemy pod uwagę to, że iloraz wielomianu w przez $z - a$ jest wielomianem stopnia niższego o jeden, to powtarzając postępowanie przedstawione powyżej dostatecznie wiele razy, otrzymamy

Twierdzenie 45 *Każdy wielomian w stopnia n o współczynnikach zespolonych daje się przedstawić w postaci*

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

gdzie z_1, \dots, z_n są pierwiastkami w .

Uwaga: Czynniki po prawej stronie mogą się powtarzać. Pierwiastek nazywamy wtedy *wielokrotnym*, a to, ile razy występuje w rozkładzie nazywamy jego *krotnością*.

Niech teraz $w(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach **rzeczywistych**. Wielomian taki może mieć zarówno pierwiastki rzeczywiste, jak i nierzeczywiste. Przypuśćmy, że z_0 jest pierwiastkiem w , czyli

$$w(z_0) = z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_0 = 0,$$

Sprzęgamy to równanie stronami, pamiętając o tym, że współczynniki a_{n-1}, \dots, a_0 są rzeczywiste, więc sprzężenie ich nie zmienia.

$$\bar{z}_0^n + a_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + a_0 = w(\bar{z}_0) = 0.$$

Widzimy więc, że \bar{z}_0 też jest pierwiastkiem wielomianu w . Jeżeli z_0 było liczbą rzeczywistą, stwierdzenie to nic ciekawego nie mówi, natomiast dla $z_0 = a + bi$, $b \neq 0$ stwierdzamy, że w dzieli się bez reszty przez iloczyn $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$, czyli

$$w(z) = (z - a - bi)(z - a + bi)u(z) = ((z - a)^2 + b^2)u(z).$$

Wielomian u jako iloraz dwóch wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, też ma współczynniki rzeczywiste. Powtarzając opisane wyżej postępowanie odpowiednio wiele razy, otrzymujemy

Twierdzenie 46 *Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych da się rozłożyć na iloczyn wielomianów stopnia pierwszego i drugiego o współczynnikach rzeczywistych.*

2.1.4 O pewnym zastosowaniu liczb zespolonych

Omówimy teraz pewne zastosowanie liczb zespolonych, często używane przez inżynierów elektryków przy obliczeniach dotyczących obwodów prądu przemiennego. Ciekawe jest ono zresztą i z innego, bardziej teoretycznego punktu widzenia. Wielkości charakteryzujące prąd przemienny — napięcie i natężenie chwilowe — opisywane są funkcjami postaci

$$f(t) = C \cos(\omega t + \varphi).$$

ω związane jest z częstotliwością prądu i będzie zawsze takie samo aż do końca tego rozdziału. Funkcji takiej przypisujemy liczbę zespoloną

$$\hat{f} = C e^{i\varphi}.$$

Zauważmy najpierw, że sumie funkcji odpowiada suma liczb zespolonych przypisanych tym funkcjom. Aby to zobaczyć, przedstawimy daną funkcję f trochę inaczej.

$$f(t) = C \cos(\omega t + \varphi) = C \cos \varphi \cos \omega t - C \sin \varphi \sin \omega t.$$

Funkcji tej przypisujemy liczbę

$$\hat{f} = C e^{i\varphi} = C \cos \varphi + iC \sin \varphi.$$

Widać stąd, że funkcji opisanej wzorem $A \cos \omega t + B \sin \omega t$ odpowiada liczba zespolona $A - Bi$. Teraz już staje się jasne, że dodawaniu funkcji odpowiada dodawanie współczynników przy $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ (oznaczonych tutaj A i B), a to z kolei odpowiada dodawaniu liczb zespolonych przypisanych tym funkcjom.

Zobaczmy teraz jak wyglądają związki między funkcjami opisującymi zależność napięcia i natężenia prądu od czasu dla trzech najbardziej typowych elementów obwodu elektrycznego oraz wynikające z tych związków relacje między liczbami zespolonymi przypisanymi owym funkcjom.

1. Opór tzw. omowy o oporności R . Z prawa Ohma $U = IR$ wynika, że jeśli $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$, to $U(t) = RI_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Jeśli \hat{I} oraz \hat{U} oznaczają liczby zespolone przypisane tym funkcjom, to $\hat{I} = I_0 e^{i\varphi}$ oraz $\hat{U} = RI_0 e^{i\varphi}$, skąd mamy

$$\hat{U} = R\hat{I}.$$

2. Kondensator o pojemności C . Relacja $Q = CU$ między ładunkiem Q na kondensatorze a napięciem U po zróźniczkowaniu po czasie daje²

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -C\frac{dU}{dt}.$$

Podstawiając

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

otrzymujemy

$$I(t) = CU_0\omega \sin(\omega t + \varphi) = CU_0\omega \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

skąd $\hat{U} = U_0 e^{i\varphi}$; $\hat{I} = \omega CU_0 e^{i(\varphi - \pi/2)} = -i\omega CU_0 e^{i\varphi}$. Wobec tego

$$\hat{U} = \frac{1}{i\omega C}\hat{I}.$$

3. Cewka o indukcyjności L . Napięcie zewnętrzne U przyłożone do cewki spełnia zależność

$$U = L\frac{dI}{dt},$$

skąd po podstawieniu $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ otrzymujemy

$$U = -L\omega I_0 \sin(\omega t + \varphi) = L\omega \cos(\omega t + \varphi + \pi/2),$$

skąd $\hat{I} = I_0 e^{i\varphi}$; $\hat{U} = \omega LI_0 e^{i(\varphi + \pi/2)} = i\omega LI_0 e^{i\varphi}$. Wobec tego

$$\hat{U} = i\omega L\hat{I}.$$

²Minus we wzorze wynika z przyjętych reguł dotyczących tego, który kierunek prądu i jakie napięcie uznaje się za dodatnie.

Znajdowanie napięcia i natężenia prądu (pamiętajmy, że chodzi o zależność tych wielkości od czasu) na poszczególnych elementach obwodu można sprowadzić do rozwiązywania układu równań wynikającego z zastosowania następujących trzech argumentów:

1. Pierwsze prawo Kirchhoffa (suma natężeń prądów (chwilowych) w dowolnym węźle równa się zero).
2. Drugie prawo Kirchhoffa (suma spadków napięć (również chwilowych) i sił elektromotorycznych równa się zero).
3. Omówione wyżej prawa dotyczące poszczególnych elementów obwodu — oporników, kondensatorów i cewek indukcyjnych.

Jeśli teraz zastąpimy wielkości zależne od czasu występujące w tych równaniach odpowiedzającymi im liczbami zespolonymi, to, ponieważ sumie funkcji odpowiada suma przypisanych im liczb zespolonych, pierwsze i drugie prawo Kirchhoffa będzie wyglądało tak samo, a prawa dotyczące elementów obwodu przybiorą postać bardzo podobną do prawa Ohma, przez co układ równań różniczkowych zamienia się w układ równań algebraicznych. Układ równań układa się tak jakby wszystkie elementy były oporami omowymi, ale wartości oporów mogą być zespolone, o następujących wartościach:

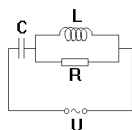
Opornik o oporności R	—	R
Kondensator o indukcyjności C	—	$\frac{1}{i\omega C}$
Cewka o indukcyjności L	—	$i\omega L$.

Moduły obliczonych napięć i natężeń prądów są to ich amplitudy, natomiast argumenty dają informację o przesunięciach fazowych między nimi. Podobnie, moduł oporu zastępczego fragmentu obwodu określa stosunek amplitud napięcia i natężenia, a jego argument jest różnicą faz napięcia i natężenia.

Zadania

1. Rozłożyć na czynniki stopnia drugiego o współczynnikach rzeczywistych wielomiany $w(x) = x^4 + 1$ i $u(x) = x^6 + 1$.

2. Dany jest obwód prądu przemiennego



Napięcie $U = U_0 \cos \omega t$; R , L , C są dane. Znaleźć natężenie prądu na oporniku R .



2.1.5 O historii liczb zespolonych

³Odkrycie liczb zespolonych związane było nie, jak się czasem słyszy, z rozwiązywaniem równania $x^2 = -1$, lecz z równaniami trzeciego stopnia. Badaniem równań trzeciego stopnia zajmowali się już starożytni Grecy (np. zagadnienie trysekcji kąta). W średniowieczu ważną rolę w rozwoju matematyki odegrali Arabowie. Opanowanie przez nich w VII-VIII w. ogromnego terytorium od brzegów Atlantyku aż do Indii (w środku był Egipt z Aleksandrią, gdzie najdłużej przetrwały tradycje greckiej geometrii) zaowocowało między innymi rozwojem matematyki⁴. Równaniami trzeciego stopnia zajmował się m.in. Omar Alhaiami (zm. 1123 r.). Znalazł on metodę konstrukcji rozwiązań wykorzystująca przecięcia krzywych drugiego stopnia. Dzieła arabskie miały z kolei wielki wpływ na rozwój matematyki europejskiej począwszy od XII wieku. Dość blisko algebraicznego rozwiązania równania trzeciego stopnia był Leonardo z Pizy o przydomku Fibonacciego, autor książki “Liber abaci” (1202 r.). Rozważał on sumę pierwiastków trzeciego stopnia

$$x = \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{4}.$$

Wykorzystując wzór na sześciąt sumy wykazał, że $x^3 = 108$.

Dopiero na początku XVI w. Scipione del Ferro⁵ znalazł algebra-

³Źródła: S.Kulczycki, *Opowieści z dziejów liczb*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1976, Г.М.Шапиро, *Высшая Алгебра*, Москва 1935.

⁴Od Arabów pochodzi wiele terminów matematycznych np. “algebra”, “algorytm” (Alchwarizmi-VIII/IX w.)

⁵(1465-1526), profesor uniwersytetu w Bolonii.

iczne rozwiązanie równania postaci

$$x^3 + px + q = 0.$$

Rozwiązania jednak nie opublikował. W tamtych czasach o pozycji matematyka nie decydowała liczba publikacji, tylko udział w publicznych dysputach i pojedynkach między uczonymi. Przeciwnicy dawali sobie zadania, które należało rozwiązać w określonym terminie. Posiadanie ogólnej metody rozwiązywania równań trzeciego stopnia było w tej sytuacji potężną bronią. Tajemnica była więc pilnie strzeżona. Już po śmierci del Ferro jeden z posiadaczy sekretu, Antonio Maria del Fiore zmierzył się w publicznej dyspucie z jednym z największych matematyków owego czasu Niccolo Tartaglią (1500-1557). Każdy z przeciwników zadał drugiemu 20 zadań. Wszystkie zadania del Fiore dotyczyły równań typu $x^3 + px = q$. Tartaglia dowiedział się, że del Fiore dysponuje ogólną metodą, którą dostał od “pewnego wielkiego matematyka”. Postawiwszy przed sobą zadanie znalezienia tej metody Tartaglia “dzięki przychylnemu losowi” osiągnął cel 12 lutego 1535 roku, osiem dni przed wyznaczonym terminem, a rozwiązanie zadań przeciwnika zajęło mu dwie godziny.

Tartaglia również nie opublikował swojego rozwiązania. Wiadomość o tym że posiada on ogólną metodę dotarła do innego wybitnego uczonego tej epoki, Hieronimo Cardano (1501-1576).

Cardano zwrócił się w 1539 r. do Tartaglii z prośbą o udostępnienie mu tajemnicy odkrycia. Uzyskał ją dopiero po złożeniu przysięgi, że dochowa tajemnicy. Rozwiązanie przedstawił Tartaglia w formie wierszowanej, miara wiersza była taka, jak w “Boskiej komedii” Dantego.

Cardano natknął się na pewne istotne trudności, które później doprowadziły do wprowadzenia liczb zespolonych. Próba wyjaśnienia tych trudności w korespondencji z Tartaglią nie powiodła się. W 1542 r. Cardano przebywając w Bolonii zapoznał się z rękopisem del Ferro zawierającym opis odkrycia.

W 1545 r. pojawiło się dzieło Cardana “Ars magna, sive de rebus algebraicis liber unus”, w którym po raz pierwszy opublikowana została algebraiczna metoda rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Cardano pisze przy tym, że metodę tę podał mu “po wielu prośbach jego przyjaciel Tartaglia”. Przedstawienie Cardana zawierało wiele

istotnych uzupełnień do tego, co uzyskali del Ferro i Tartaglia. Uczeń Cardana, Luigi Ferrari (1522-1565) wykazał, że rozwiązywanie równań czwartego stopnia sprowadza się do rozwiązywania równań stopnia drugiego i trzeciego.

Zajmiemy się teraz metodą. Najpierw bardzo ważna, moim zdaniem, uwaga. W wielu książkach, a szczególnie w poradnikach encyklopedycznych można znaleźć “wzory Cardana”. Zastosowanie tych wzorów wprost, bez znajomości metody, która do nich doprowadziła w pewnych przypadkach jest niemożliwe. Dlatego zajmiemy się tutaj samą metodą, a wzory końcowe nie będą nawet napisane. Mamy rozwiązać równanie

$$z^3 + pz + q = 0. \quad (2.1)$$

Szukamy rozwiązania w postaci sumy $z = x + y$. Wzór na sześciąt sumy daje nam

$$z^3 = (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 3xyz + x^3 + y^3.$$

Przenosząc na lewą stronę mamy

$$z^3 - 3xyz - (x^3 + y^3) = 0. \quad (2.2)$$

Jeżeli x i y uda się dobrać tak, żeby

$$-3xy = p \quad (2.3)$$

$$-x^3 - y^3 = q, \quad (2.4)$$

to równania (2.1) i (2.2) będą identyczne. Problem sprowadza się więc do rozwiązania układu równań (2.3),(2.4). Pierwsze równanie podniosimy do trzeciej potęgi i otrzymujemy łatwy do rozwiązania układ równań na x^3 i y^3 . Potrzebna tu jest jeszcze pewna ostrożność związana z tym, że podnoszenie równania do trzeciej potęgi może wprowadzić dodatkowe rozwiązania.

W trakcie rozwiązywania tego układu powstaje równanie kwadratowe, którego wyróżnik jest równy $(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2$. Stosowanie tej metody do równań o wyróżniku ujemnym (mających trzy pierwiastki rzeczywiste) (proponuję sprawdzenie na przykładzie równania $z^3 - z = 0$) prowadzi do wyrażeń, w których występują pierwiastki kwadratowe

liczb ujemnych. Właśnie w tym miejscu Cardano wyrażał wątpliwości w korespondencji z Tartaglią. Cardano wykonał nawet próbę przyjrzenia się takim wyrażeniom, wycofał się jednak natychmiast pisząc “nie wiadomo, co by takie wyrażenia miały znaczyć, a niepodobna przy tym wykonywać na nich działań”.

Tym, który ośmielił się porzucić dziedzinę dobrze określonych wielkości był Rafael Bombelli, z zawodu inżynier kierujący wielkimi pracami przy osuszaniu błot w Toskanii. Zajął się on pierwiastkami kwadratowymi z liczb ujemnych znajdując reguły, według których należało operować wyrażeniami zawierającymi takie pierwiastki. Wykazał, że można je sprowadzić do postaci $a + b\sqrt{-1}$. Sam $\sqrt{-1}$ traktował jako rodzaj znaku, taki, jak $+$ czy $-$. Stąd zresztą wzięło oznaczenie “più di meno”, w skrócie “pdm”, bowiem “nie może być nazwany ani $+$ (più), ani $-$ (meno)”. Rozważania swoje przedstawił w dziele “*L’Algebra parte maggiore dell’ arithmetica*. Bologna 1572”. Było to pierwsze, ale daleko posunięte przedstawienie liczb zespolonych. Bombelli dowodził na przykład, używając metod geometrycznych, że każde równanie trzeciego stopnia posiada rozwiązanie w dziedzinie liczb zespolonych.

Pozostały dwa istotne problemy. Pierwszy, to istnienie liczb zespolonych, a drugi to pytanie o to, czy dla równań stopnia wyższego niż czwarty (równania czwartego stopnia, jak wykazał Ferrari, redukują się do równań stopnia drugiego i trzeciego) nie będzie trzeba wymyślać coraz nowych rodzajów liczb. Obydwa te problemy zostały rozwiązane na przełomie XVIII i XIX wieku dzięki pracom d’Alemberta, Cauchy’ego, Gaussa, Hamiltona i innych. Wątpliwości dotyczące istnienia rozwiązało sprowadzenie teorii liczb zespolonych do geometrii (liczby zespolone jako punkty płaszczyzny) albo do teorii liczb rzeczywistych (liczby zespolone jako pary liczb rzeczywistych). Rozwiązanie drugiego problemu, rozwiązalności równań, zostało nazwane zasadniczym twierdzeniem algebry. Pierwszy dowód, metodami niealgebraicznymi i nie w pełni ścisły przedstawił w 1746 roku d’Alembert. Pierwszy ścisły dowód podał w 1799 roku Gauss.

Dalszy rozwój liczb zespolonych to ich przenikanie do wszystkich działów matematyki i wpływ na tworzenie nowych, z których wymienię tylko teorię funkcji zmiennej zespolonej i teorię ciał.

Zadania

1. Udowodnić, że

$$\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1.$$

2. Rozwiązać metodą Cardana równanie $x^3 + 6x - 20 = 0$. Sprawdzić, że $x = 2$ jest jedynym rzeczywistym pierwiastkiem tego równania. Wyjaśnić problem, który tu powstaje.
3. Znaleźć błąd w rachunku:

$$-2 = \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{(-2) \cdot (-2)} = \sqrt{4} = 2.$$

2.1.6 O funkcjach elementarnych z innego punktu widzenia

Powrócimy tutaj do funkcji wykładniczej, funkcji trygonometrycznych i logarytmu, żeby, posługując się metodami rachunku różniczkowego i całkowego, odpowiedzieć na dwa zasadnicze pytania dotyczące tych funkcji. Oto te pytania:

- Dlaczego funkcję wykładniczą i logarytm definiuje się używając dziwnej liczby e ?
- Na czym polegają związki między funkcją wykładniczą a sinusem i kosinusem. Funkcje te mają trochę podobne szeregi potęgowe, a pochodne funkcji trygonometrycznych spełniają równanie $f'' = -f$ podobne do równania $f' = f$, które spełnia funkcja wykładnicza. Ci, którzy policzyli wiele całek mogli natrafić na takie, w których w zależności od użytej metody dostaje się w wyniku wyrażenia zawierające logarytmy albo funkcje cyklometryczne (arcusy).

Drugie pytanie znajdzie odpowiedź wtedy, gdy rozszerzymy dziedzinę badanych funkcji na liczby zespolone. Najzgrabniej można to wykonać rozpatrując szeregi potęgowe, na które rozwijają się te funkcje. Okaze się, że funkcje trygonometryczne są tak blisko związane z funkcją wykładniczą, że można uważać je za jeden obiekt.

Odpowiedź na pierwsze pytanie narzuca się od razu – funkcja wykładnicza e^x wyróżniona jest tym, że $(e^x)' = e^x$, a przy innej podstawie mamy $(a^x)' = a^x \ln a$. Czy można więc funkcję wykładniczą e^x zdefiniować jako taką funkcję f , że $f' = f$ i stąd wydedukować wszystkie jej własności, z definicją liczby e włącznie? Definicja taka byłaby przede wszystkim *bardziej naturalna*, bo za punkt wyjścia brałoby się bardziej podstawową własność funkcji e^x .

Warunek $f' = f$ wygląda bardzo prosto, ale nie wiadomo, czy istnieje funkcja, która go spełnia. Zaczniemy więc od innej strony. Gdyby taka funkcja istniała i miała funkcję odwrotną, to pochodna tej funkcji odwrotnej (oznaczymy ją przez g) byłaby równa $g'(x) = 1/f'(g(x)) = 1/f(g(x)) = 1/x$. Będziemy definiowali najpierw funkcję odwrotną g , bo jej istnienie potrafimy uzasadnić na podstawie twierdzeń o całkowaniu. Przechodzimy teraz do ścisłych definicji.

Definicja 22 (Definicja logarytmu) *Niech $x \in]0, \infty[$.*

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt .$$

Istnienie tej całki wynika z ciągłości funkcji $1/x$ i twierdzenia o całkowalności funkcji ciągłych. Stała całkowania została wybrana tak, żeby $\ln 1 = 0$.

Z twierdzenia podstawowego mamy teraz $(\ln x)' = 1/x$. Ponieważ $1/x$ jest w rozpatrywanym zbiorze dodatnie, logarytm jest funkcją ściśle rosnącą i posiada funkcję odwrotną, którą nazwiemy wykładniczą i oznaczymy $\exp x$. Funkcja ta określona jest na zbiorze wartości logarytmu, czyli na $] - \infty, \infty[$ (tutaj trzeba wykazać, że $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x 1/t dt = -\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x 1/t dt = \infty$, co pominiemy). Zbiór wartości funkcji wykładniczej to dziedzina logarytmu, czyli $]0, \infty[$. Ciągłość logarytmu wynika z ciągłości całki, a ciągłość funkcji wykładniczej z twierdzenia

o ciągłości funkcji odwrotnej. Ponadto

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = (t = ys) = \int_{\frac{1}{y}}^x \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{ds}{s} + \int_{\frac{1}{y}}^1 \frac{ds}{s} = (r = ys) \\ &= \int_1^x \frac{ds}{s} + \int_1^y \frac{dr}{r} = \ln x + \ln y. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dla funkcji odwrotnej mamy stąd

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y). \quad (2.6)$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$e := \exp(1)$$

Sprawdźmy, że $e^x = \exp(x)$. Ponieważ obydwie strony są ciągłe, wystarczy to sprawdzić dla wymiernych x . Z (2.6) wynika, że $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$. Z kolei $e = \exp(1) = \exp(m \cdot 1/m) = (\exp(1/m))^m$, skąd $\exp(1/m) = e^{1/m}$, a więc $\exp(n/m) = e^{n/m}$.

Wprowadzimy teraz znane wzory wiążące funkcję wykładniczą i logarytm z pewnymi granicami.

$$\frac{1}{x} = (\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}.$$

Podstawiamy $t = 1/x$:

$$t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+th)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+th)^{1/h}$$

Dla funkcji odwrotnej oznacza to (pamiętamy o ciągłości)

$$e^t = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{t/h},$$

a stąd w szczególności

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n.$$

Rozwinięcie funkcji wykładniczej na szereg potęgowy przeprowadza się tak samo, jak poprzednio, wykorzystując wzór Taylora. Przypomnimy tutaj ten szereg

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Podstawmy $z = x + iy$:

$$e^{x+iy} = e^x \left(1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \frac{y^5}{5!} + \dots \right) = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (2.7)$$

Jak widzimy, szereg potęgowy pozwala na określenie funkcji wykładniczej dla dowolnych argumentów zespolonych. Podobna sztuka dla logarytmu daje znacznie skromniejszy wynik, ponieważ szereg potęgowy dla logarytmu ma skończony promień zbieżności, np.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

ma promień zbieżności równy 1. Można definiować logarytm w dziedzinie zespolonej jako funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej. Trzeba jednak zachować ostrożność, ponieważ funkcja wykładnicza nie jest różnowartościowa, jest ona okresowa w kierunku urojonym. Konkretnie – jeśli $z \neq 0$, $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ to

$$\ln z = \ln |z| + i\varphi + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Aby taki wzór określał funkcję trzeba zdecydować się na wybór argumentu φ oraz k . Jest to sytuacja bardzo podobna do tej, z którą ma się do czynienia przy odwracaniu funkcji trygonometrycznych. Jeśli się trochę zastanowić, to dojdzie się do wniosku, że te sytuacje nie są podobne, tylko to jest to samo.

Równanie (2.7) daje następujące związki między funkcją wykładniczą a funkcjami trygonometrycznymi:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Dodając i odejmując stronami otrzymujemy

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Funkcje hiperboliczne zdefiniowane są wzorami:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Porównanie tych wzorów daje związki między funkcjami trygonometrycznymi i hiperbolicznymi

$$\sin iz = i \sinh z,$$

$$\cos iz = \cosh z.$$

Tożsamość $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ zachowuje się przy przejściu do dziedziny zespolonej (aby to zobaczyć wystarczy ją udowodnić używając szeregów potęgowych). Podstawiając $x = iy$ otrzymujemy

$$1 = \sin^2 iy + \cos^2 iy = \cosh^2 y - \sinh^2 y.$$

Zadanie. Rozwiązać w dziedzinie liczb zespolonych równanie

$$\sin z = 2.$$

2.2 Wektorowa przestrzeń euklidesowa



Będziemy się tutaj zajmowali pewnym szczególnym podejściem do przestrzeni euklidesowej, blisko związanym z metodą geometrii analitycznej. Podejście to wykorzystuje język i metody algebry do badania problemów geometrycznych. Jednocześnie zyskuje się nowy punkt widzenia na niektóre problemy algebry. Zaczniemy od konkretnego modelu. Niech \mathbf{E}^3 będzie zbiorem uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych. Z pewnych względów trójki te będziemy zapisywać pionowo. W \mathbf{E}^3 wprowadzamy dwa działania — dodawanie:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

oraz mnożenie przez liczbę rzeczywistą

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

Działania te mają następujące proste własności (aby oszczędzić miejsca, zamiast trójek będziemy pisali jedną literę, np. p, q):

$$\begin{aligned} p + q &= q + p, \\ (p + q) + r &= p + (q + r), \\ \lambda(p + q) &= \lambda p + \lambda q, \\ \lambda(\mu p) &= (\lambda\mu)p, \\ (\lambda + \mu)p &= \lambda p + \mu p, \\ 1p &= p. \end{aligned}$$

Wśród elementów \mathbf{E}^3 szczególną rolę odgrywa jeden, trójka, której wszystkie elementy są zerami. Oznaczamy go⁶ znakiem $\mathbf{0}$. Jego charakterystyczną własnością jest to, że $p + \mathbf{0} = p$ dla każdego $p \in \mathbf{E}^3$.

⁶Później, gdy nie będzie obaw o nieporozumienie, będziemy pisali zwykłe zero.

Można łatwo sprawdzić, że dla każdego $p \in \mathbf{E}^3$ istnieje takie $q \in \mathbf{E}^3$, że $p + q = \mathbf{0}$. Wymienione wyżej własności składają się na to, co matematycy nazywają strukturą *przestrzeni wektorowej*.

Aby wzbogacić przedmiot naszych badań w własności geometryczne wprowadzimy jeszcze *iloczyn skalarny*. Niech

$$p = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Iloczynem skalarnym p i q nazywamy liczbę

$$(p|q) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Posiada on następujące podstawowe własności:

$$\begin{aligned} (p|q) &= (q|p), \\ (p + p'|q) &= (p|q) + (p'|q), \\ (\lambda p|q) &= \lambda(p|q), \\ (p|p) &> 0 \quad \text{dla } p \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Bardzo ważną konsekwencją wymienionych wyżej własności jest następująca nierówność:

Twierdzenie 47 (NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA)

$$|(p|q)| \leq \sqrt{(p|p)(q|q)}.$$

Dowód. Niech $t \in \mathbf{R}$.

$$0 \leq (p + tq|p + tq) = (p|p) + 2t(p|q) + t^2(q|q).$$

Prawa strona jest trójmianem kwadratowym względem t , a ponieważ przyjmuje tylko wartości nieujemne, jej wyróżnik musi być niedodatni.

$$\Delta = 4[(p|q)]^2 - 4(p|p)(q|q) \leq 0.$$

Porządkując tę nierówność dostajemy tezę. □

Mając iloczyn skalarny możemy zdefiniować dwa następne ważne pojęcia geometryczne: długość wektora i kąt między wektorami. *Długością wektora* p nazywamy liczbę

$$\|p\| = \sqrt{(p|p)}.$$

Spełniona jest następująca nierówność, zwana *nierównością trójkąta*:

$$\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|.$$

Rzeczywiście, podnosząc ją stronami do kwadratu, otrzymujemy

$$\|p + q\|^2 = (p|p) + 2(p|q) + (q|q) \leq (p|p) + (q|q) + 2\|p\|\|q\|,$$

i po uproszczeniach mamy nierówność Schwarz'a.

Aby określić kąt między wektorami zauważmy najpierw, że dla wektorów $p, q \neq \mathbf{0}$ nierówność Schwarz'a daje $\frac{|(p|q)|}{\|p\|\|q\|} \leq 1$. Wobec tego istnieje (jedyne) kąt $\angle(p, q) \in [0, \pi[$ taki, że

$$\cos(\angle(p, q)) = \frac{(p|q)}{\|p\|\|q\|}.$$

Mamy więc, tak samo, jak w szkole

$$(p|q) = \|p\|\|q\| \cos(\angle(p, q)).$$

W szczególności wektory p i q są prostopadłe (czasem używa się słowa ortogonalne), gdy $(p|q) = 0$.

2.2.1 Baza i wymiar przestrzeni wektorowej



Wybieramy następujące trzy wektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbf{E}^3$:

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Łatwo jest sprawdzić, że dla każdego wektora $p \in \mathbf{E}^3$ można znaleźć liczby α, β, γ takie, że $p = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}$. Co więcej, istnieje tylko jeden taki układ liczb. Rzeczywiście, równanie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ma jedyne rozwiązanie $\alpha = x, \beta = y, \gamma = z$.

Układ wektorów mający taką własność, jak powyżej (każdy wektor jest ich kombinacją liniową, a współczynniki można wybrać tylko na jeden sposób) nazywamy *bazą* przestrzeni wektorowej. Współczynniki występujące w tej kombinacji nazywamy *współrzędnymi* danego wektora w tej bazie. W przestrzeni \mathbf{E}^3 można wybrać bardzo wiele różnych baz. Mają one jednak zawsze tyle samo elementów – trzy. Ogólnie, zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 48 *Każde dwie bazy danej przestrzeni wektorowej mają tyle samo elementów.*

Liczbę elementów (jakiegokolwiek) bazy przestrzeni wektorowej nazywamy *wymiarem* tej przestrzeni.

Możemy więc stwierdzić, że przestrzeń \mathbf{E}^3 jest trójwymiarowa. Dalsze nasze rozważania ograniczymy do przestrzeni, które posiadają skończoną bazę.

Niech E będzie przestrzenią wektorową. Podzbiór $F \in E$ nazywamy *podprzestrzenią* przestrzeni E , jeżeli dla dowolnych dwu wektorów $p, q \in F$ wszystkie ich kombinacje liniowe $\alpha p + \beta q$ należą do F . Można wykazać, że wymiar podprzestrzeni $F \neq E$ jest mniejszy od wymiaru E .

Przykłady.

1. Niech $F = \{p \in \mathbf{E}^3 : p = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, x + y + z = 0\}$. Zobaczmy, że F jest dwuwymiarową podprzestrzenią \mathbf{E}^3 . Niech $p, q \in F$, $p = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $x + y + z = 0$, $q = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$, $x' + y' + z' = 0$. Współrzędne wektora $\alpha p + \beta q$ w bazie $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ są równe $(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$. Aby stwierdzić, że $\alpha p + \beta q \in F$ trzeba sprawdzić, czy suma współrzędnych tego wektora jest równa zeru, co

jest natychmiastowe. Wymiar przestrzeni F wyznaczmy znajdując jakąś jej bazę. Czytelnik zechce potraktować jako zadanie domowe sprawdzenie, że układ wektorów $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ jest bazą przestrzeni F .

2. Weźmy jakiś wektor $q \in \mathbf{E}^3$, $q \neq 0$. Niech $F = \{p \in \mathbf{E}^3 : (p|q) = 0\}$. Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, F jest dwuwymiarową podprzestrzenią E . Sprawdzając to zauważmy, że przykład 1. jest szczególnym przypadkiem przykładu 2., gdy q jest wektorem o współrzędnych $(1, 1, 1)$ w bazie $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

3. Niech F będzie zbiorem elementów \mathbf{E}^3 postaci $\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$. Tutaj stwierdzamy, że F jest dwuwymiarową podprzestrzenią \mathbf{E}^3 , a jedną z baz tej przestrzeni jest układ \mathbf{i}, \mathbf{j} .

Ogólniejszym przykładem wektorowej przestrzeni euklidesowej jest \mathbf{E}^n – przestrzeń, której “punktami” są n -elementowe ciągi liczb rzeczywistych, a działania oraz iloczyn skalarny określone są analogicznie, jak w \mathbf{E}^3 . Łatwo stwierdzić, że wektory

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

są bazą tej przestrzeni. Wymiar \mathbf{E}^n jest więc równy n . Dla nas najbardziej interesujące będą przypadki $n = 2$ i $n = 3$.

2.2.2 Równania prostych i płaszczyzn



Równanie prostej w \mathbf{E}^2 najczęściej podaje się w jednej z dwóch postaci

$$Ax + By = C, \tag{I}$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned} \tag{II}$$

Opis (II) nazywa się parametrycznym.

Spróbujemy przedstawić te opisy w takiej formie, w której nie występują współrzędne x, y . Tego rodzaju przedstawienie pozwala na ogół

lepiej uwidocznic sens geometryczny opisu, sugeruje sposób rozwiązywania niektórych zadań i wskazuje drogę do uogólnień. Oznaczmy $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Równanie (I) ma postać

$$(p|q) = C. \quad (I')$$

Czym jest dla tej prostej wektor q ? Weźmy dwa punkty p i p' leżące na tej prostej. Wtedy $(p|q) = C$, $(p'|q) = C$. Odejmując stronami mamy $(p - p'|q) = 0$. Ponieważ $p - p'$ możemy interpretować jako wektor łączący punkty p i p' , stwierdzamy, że q jest wektorem prostopadłym do badanej prostej. Możemy teraz rozwiązać zadanie: znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt p_0 i prostopadłej do wektora q . Ma ono postać $(p - p_0|q) = 0$, co można przekształcić do postaci $(p|q) = (p_0|q)$, czyli mamy równanie (I') dla $C = (p_0|q)$.

W przestrzeni \mathbf{E}^3 mamy trochę większą liczbę analogicznych obiektów:

$$Ax + By + Cz = D$$

jest równaniem płaszczyzny, a układ równań

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

opisuje prostą – przecięcie dwóch płaszczyzn⁷. Interpretacja współczynników A, B, C w równaniu płaszczyzny jest oczywista – są to współrzędne wektora prostopadłego do tej płaszczyzny.

Opis prostej w \mathbf{E}^3 w postaci (II) po wprowadzeniu oznaczeń $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ przybiera postać

$$p = p_0 + vt. \quad (II')$$

Tak samo wygląda opis prostej w \mathbf{E}^n dla dowolnego n . Wektor v nazywany jest *wektorem kierunkowym* prostej, co związane jest z tym, że wektor łączący dowolne dwa punkty prostej jest do niego proporcjonalny.

⁷Potrzebne są tutaj pewne dodatkowe bardzo proste założenia, np. takie że współczynniki A, B, C nie są wszystkie równe zeru. Zostawimy tę sprawę na później, kiedy będziemy się zajmowali układami równań pierwszego stopnia.

Równanie płaszczyzny w \mathbf{E}^3 można napisać w podobnej postaci

$$p = p_0 + vt + us, \quad (II'')$$

gdzie u jest wektorem, a s drugim parametrem.

Równania tego typu łatwo jest uzyskać jako równanie prostej przechodzącej przez zadane dwa punkty p_1 i p_2 :

$$p = p_1 + (p_2 - p_1)t,$$

lub płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty p_1, p_2, p_3 :

$$p = p_1 + (p_2 - p_1)t + (p_3 - p_1)s.$$

Przechodzenie od opisu typu (I) do opisu typu (II) i odwrotnie można robić manipulując tymi równaniami (rugowanie albo wprowadzanie parametrów), co przy pewnej wprawie jest najskuteczniejszą metodą. Można jednak też korzystać z interpretacji geometrycznej, co zobaczymy na przykładach.

Przykłady.

1. Przejście od równania $Ax + By = C$ do opisu parametrycznego. Wektor $q = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ jest prostopadły do opisywanej prostej. Do niego jest prostopadły wektor $v = \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$, co łatwo sprawdzić obliczając iloczyn skalarny $(q|v)$. Pozostaje jeszcze znaleźć współrzędne jakiegokolwiek punktu p_0 prostej, co można zrobić np. podstawiając dowolną liczbę jako y i wyznaczając x z równania (o ile $A \neq 0$). Wtedy $p = p_0 + vt$ jest szukanym równaniem parametrycznym prostej. Na przykładzie wygląda to tak: Mamy równanie

$$x - 2y = 7.$$

Wektor prostopadły $q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Wektor kierunkowy $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Na prostej leży punkt p_0 o współrzędnych $x = 1$, $y = -3$. Wobec tego równanie parametryczne tej prostej może być podane w postaci

$$x = 1 + 2t$$

$$y = -3 + t.$$

2. Przejście od opisu parametrycznego płaszczyzny do równania. Mamy opis parametryczny $p = p_0 + vt + us$. Znajdujemy wektor q prostopadły do obydwu wektorów v, u . Później będziemy mieli na to sposób – iloczyn wektorowy, ale na razie musimy po prostu napisać układ równań $(q|v) = 0$, $(q|u) = 0$ i znaleźć jakieś q spełniające ten układ. Po znalezieniu q możemy już napisać równanie naszej płaszczyzny: $(p|q) = (p_0|q)$. Na przykładzie:

Mamy opis parametryczny płaszczyzny:

$$x = 1 - t + 2s$$

$$y = 2 + t - s$$

$$z = t \quad .$$

Najpierw szukamy wektora q prostopadłego do wektorów

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Współrzędne A, B, C wektora q muszą spełniać układ równań

$$\begin{aligned} -A + B + C &= 0 \\ 2A - B &= 0. \end{aligned}$$

Jednym z rozwiązań tego układu jest $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$. Możemy teraz napisać równanie płaszczyzny

$$(p|q) = x + 2y - z = (p_0|q) = 1 + 4 + 0 = 5.$$



2.2.3 Współrzędne

Skąd biorą się pary czy trójki liczb używane przez nas przy opisywaniu prostych i płaszczyzn? Jeżeli wszystko dzieje się w przestrzeni \mathbf{E}^2 lub \mathbf{E}^3 , to sprawa jest prosta — punkty tych przestrzeni są parami albo trójkami liczb. W przypadku ogólnym trzeba te układy liczb dopiero wprowadzić. Kluczową rolę odgrywa wtedy pojęcie bazy. Przypomnijmy – bazą przestrzeni wektorowej E nazywamy taki układ

wektorów $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$, że dowolny wektor $p \in E$ jednoznacznie przedstawia się w postaci

$$p = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Układ liczb x_1, x_2, \dots, x_n nazywamy *współrzędnymi wektora p w bazie $e_1, e_2,$*

\dots, e_n . Zauważmy, że do określenia wektora nie wystarczy podanie jego współrzędnych, trzeba jeszcze powiedzieć, w jakiej to jest bazie, bo ten sam wektor w różnych bazach ma na ogół różne współrzędne.

Jest jeszcze inny aspekt tej sprawy. Łatwo jest zauważyć, że, jeśli wybierzemy jakąś bazę przestrzeni E i nie będziemy jej zmieniali, to działania na wektorach (dodawanie wektorów i mnożenie wektora przez liczbę) na współrzędnych wyglądają tak samo, jak w \mathbf{E}^n . Iloczyn skalarny wyraża się przez współrzędne wektorów następująco: Niech $p = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, $q = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$. Wtedy

$$(p|q) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (e_i|e_j).$$

Wzór ten wygląda tak samo, jak w przypadku \mathbf{E}^n , jeżeli baza spełnia warunki

$$(e_i|e_j) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j \end{cases}$$

W takiej sytuacji nie ma właściwie różnicy między E i \mathbf{E}^n .

2.3 Układy równań i przekształcenia liniowe



Przedmiotem naszych rozważań będą układy równań pierwszego stopnia, nazywane również układami równań liniowych. Jak zobaczymy, są one powiązane z pewnymi przekształceniami przestrzeni wektorowych. Związek ten pozwoli nam z innej strony spojrzeć na problemy układów równań liniowych. Napiszmy najpierw w ogólnej formie układ

m równań liniowych z n niewiadomymi:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Potraktujmy układ liczb x_1, x_2, \dots, x_n jako element $x \in \mathbf{E}^n$, a układ liczb b_1, b_2, \dots, b_m jako $b \in \mathbf{E}^m$. Lewa strona równania może być interpretowana jako wzór określający przekształcenie $A : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$. Przekształcenie A ma bardzo proste ogólne własności:

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= \lambda A(x), \\ A(x + y) &= A(x) + A(y). \end{aligned}$$

Ogólnie, jeśli E i F są przestrzeniami wektorowymi, to odwzorowanie $A : E \rightarrow F$ mające powyższe własności nazywamy *liniowym*. Ze względów praktycznych często będziemy opuszczali nawias pisząc Ax zamiast $A(x)$. Nasz układ zapisze się więc w skrótovej postaci jako

$$Ax = b.$$

Lewa strona danego układu równań, jak również odwzorowanie liniowe A wyznaczone są przez współczynniki a_{ij} ; $i, j = 1, 2, \dots, n$. Współczynniki te będziemy zapisywali w prostokątnej tabeli nazywanej *macierzą*

$$\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Niech x i x' będą dwoma rozwiązaniami rozważanego układu, tzn. $Ax = b$ oraz $Ax' = b$. Odejmując stronami otrzymujemy $A(x - x') = 0$. Różnica $y = x - x'$ dwóch rozwiązań spełnia więc układ równań

$$Ay = 0$$

nazywany *układem jednorodnym*. Biorąc pod uwagę to, że $x' = x + y$ otrzymujemy bardzo prosty, a ważny w zastosowaniach wniosek:

Aby znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań

$$Ax = b$$

wystarczy znaleźć jedno rozwiązanie x_0 tego układu i wszystkie rozwiązania układu jednorodnego. Każde rozwiązanie ma postać

$$x = x_0 + y,$$

gdzie y jest rozwiązaniem układu jednorodnego $Ay = 0$.

2.3.1 Rząd macierzy



Przy badaniu warunków rozwiązalności układów równań liniowych zasadniczą rolę odgrywa, jak zobaczymy, znajdowanie wymiarów różnych podprzestrzeni. W związku z tym wprowadzimy kilka nowych pojęć.

Układ wektorów v_1, v_2, \dots, v_k nazywamy *liniowo niezależnym*⁸, jeżeli $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ pociąga za sobą $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Dla dowolnego układu wektorów v_1, v_2, \dots, v_k zbiór ich kombinacji liniowych $F = \{v \in E : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k; \lambda_i \in \mathbf{R}\}$ jest, co łatwo sprawdzić, podprzestrzenią. Mówimy, że podprzestrzeń ta jest *rozpnięta* przez wektory v_1, v_2, \dots, v_k . Zauważmy, że gdy układ v_1, v_2, \dots, v_k jest liniowo niezależny, to jest on bazą podprzestrzeni F . Rzeczywiście, każdy wektor $v \in F$ daje się przedstawić jako kombinacja liniowa układu v_1, v_2, \dots, v_k , a jednoznaczność wynika z liniowej niezależności: Niech będą dane dwa takie przedstawienia

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k,$$

$$v = \lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2 + \dots + \lambda'_k v_k.$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$v = (\lambda_1 - \lambda'_1)v_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)v_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda'_k)v_k.$$

⁸Zauważmy, że liniowa niezależność jest własnością *układu* wektorów, a nie każdego z nich z osobna.

Z założenia, że v_1, v_2, \dots, v_k jest układem liniowo niezależnym mamy $\lambda_1 - \lambda'_1 = \lambda_2 - \lambda'_2 = \dots = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda'_1$, $\lambda_2 = \lambda'_2$, \dots , $\lambda_k = \lambda'_k$.

Zajmiemy się teraz macierzami. Rządki poziome macierzy nazywamy *wierszami*, a pionowe *kolumnami*. Wiersze i kolumny można traktować jak elementy przestrzeni \mathbf{E}^k , gdzie k jest liczbą elementów wiersza ew. kolumny. *Rzędem wierszowym* macierzy nazywamy wymiar podprzestrzeni rozpiętej przez wierszetej macierzy, a *rzędem kolumnowym* – wymiar podprzestrzeni rozpiętej przez kolumny. Okazuje się (dowód nie jest niestety zupełnie prosty), że rząd wierszowy macierzy jest zawsze równy jej rzędowi kolumnowemu. Dowodu nie będziemy tutaj przeprowadzali, zajmiemy się natomiast pewną metodą badania rzędu macierzy. Metoda ta polega na przekształcaniu danej macierzy w taki sposób, żeby wymiar nie ulegał zmianie, a macierz sprowadziła się do postaci, w której rząd będzie łatwo znaleźć. Podstawą tej metody jest obserwacja, że

Jeżeli do wiersza (kolumny) macierzy dodamy dowolną kombinację liniową pozostałych wierszy (kolumn), to rząd macierzy się nie zmieni.

Przykład.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Znak “ \sim ” oznacza tutaj, że rzędy macierzy są równe. Pierwsze przekształcenie polega na dodaniu pierwszego wiersza pomnożonego przez -2 do drugiego i pierwszego wiersza pomnożonego przez -3 do trzeciego. Drugie przekształcenie to dodanie drugiego wiersza pomnożonego przez -1 do trzeciego. Łatwo jest stwierdzić, że rząd otrzymanej macierzy jest równy 2.



2.3.2 Układy równań liniowych

Powracamy do układów równań. Niejednorodny układ równań liniowych możemy zapisać w postaci

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Oznacza to tyle, że wektor – kolumna wyrazów tworzących prawą stronę równania jest kombinacją liniową kolumn macierzy A współczynników przy niewiadomych. Istnienie rozwiązania jest więc równoważne temu, że przestrzeń rozpięta na kolumnach macierzy A nie powiększy się, gdy do tych kolumn dołączymy kolumnę wyrazów wolnych. Macierz powstała z A przez dołączenie kolumny wyrazów wolnych nazwiemy macierzą *rozszerzoną*. Używając pojęcia rzędu macierzy można zapisać warunek rozwiązalności w następujący sposób:

Twierdzenie 49 (KRONECKER-CAPELLI) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia rozwiązania układu równań liniowych*

$$Ax = b$$

jest równość rzędów macierzy A i macierzy rozszerzonej.

Twierdzenie to nie daje metody znajdowania rozwiązań. Jednakże, jeżeli będziemy badali rzędy macierzy wykonując wyłącznie działania na wierszach, to otrzymane macierze będą odpowiadały układowi równań równoważnemu z wyjściowym, a rozwiązanie jest wtedy łatwo znaleźć.

Pozostało nam zbadanie zbioru rozwiązań układu jednorodnego. Najpierw wprowadzimy dwa pojęcia dotyczące odwzorowań liniowych. Niech $A : E \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem liniowym. *Jądrem* odwzorowania A nazywamy zbiór

$$\text{Ker}(A) = \{x \in E : Ax = 0\}.$$

Obrazem odwzorowania A nazywamy zbiór

$$R(A) = \{y \in F : y = Ax, x \in E\}.$$

$Ker(A)$ jest podprzestrzenią E , a $R(A)$ jest podprzestrzenią F . Rzeczywiście, jeżeli $x, x' \in Ker(A)$, to $Ax = Ax' = 0$. Trzeba sprawdzić, czy $\lambda x + \lambda' x' \in Ker(A)$. Mamy $A(\lambda x + \lambda' x') = \lambda Ax + \lambda' Ax' = 0$, co kończy dowód. Dowód tego, że $R(A)$ jest podprzestrzenią jest równie prosty.

Nieco trudniej jest udowodnić twierdzenie wiążące wymiary jądra i obrazu odwzorowania liniowego. Dowód ten pomijamy odsyłając czytelnika do książek poświęconych algebrze liniowej. Stosując skrót \dim na oznaczenie wymiaru przestrzeni wektorowej zapiszemy to twierdzenie w następującej postaci

Twierdzenie 50 *Niech $A : E \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wtedy*

$$\dim Ker(A) + \dim R(A) = \dim E.$$

W przypadku układu równań liniowych jednorodnych zauważmy, że $Ker(A)$ jest to zbiór rozwiązań tego układu, $\dim R(A)$ jest rzędem macierzy układu, a $\dim E$ to po prostu liczba niewiadomych. Ostatnie twierdzenie uzyskuje więc nową postać:

Wymiar przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego + Rząd macierzy układu = Liczba niewiadomych

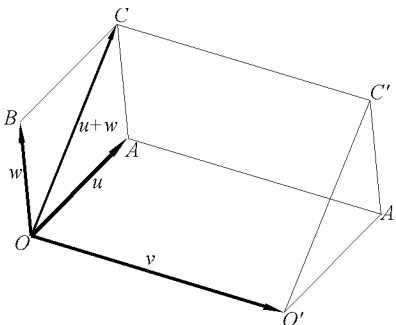
Informacja o wymiarze przestrzeni rozwiązań ma ten aspekt praktyczny, że wiadomo, ile rozwiązań liniowo niezależnych trzeba znaleźć, żeby mieć bazę przestrzeni rozwiązań. Przedstawienie ogólnej postaci rozwiązania układu równań za pomocą kombinacji liniowej pewnej bazy przestrzeni rozwiązań spotkaliśmy już przy przechodzeniu od opisu prostych i płaszczyzn przez układy równań do opisu parametrycznego.



2.3.3 Wyznacznik

Na początku trochę rozważań heurystycznych, czyli takich, które mają nas na coś naprowadzić, a nie muszą być zupełnie ściśle. Jeśli dane są

dwa wektory u, v płaszczyzny \mathbf{E}^2 , to można zbudować na nich równoległobok. Zastanówmy się, jakie własności ma pole tego równoległoboku — jaka jest jego zależność od pary wektorów rozpinających ten równoległobok. Oznaczmy to pole ("dwuwymiarową objętość") przez $\text{Obj}(u, v)$.



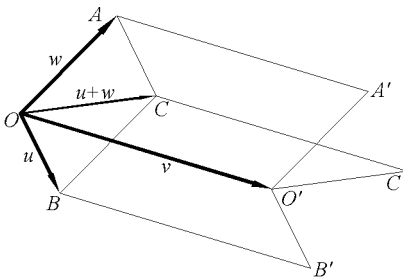
Rysunek 1.

Ponieważ pole równoległoboku $OO'C'C$ równa się sumie pól równoległoboków $OO'A'A$ i $AA'C'C$, rysunek ten sugeruje, że zachodzi równość

$$\text{Obj}(v, u + w) = \text{Obj}(v, u) + \text{Obj}(v, w).$$

Inne ustawienie wektorów, pokazane na rys. 2 sugeruje zupełnie inny związek, mianowicie

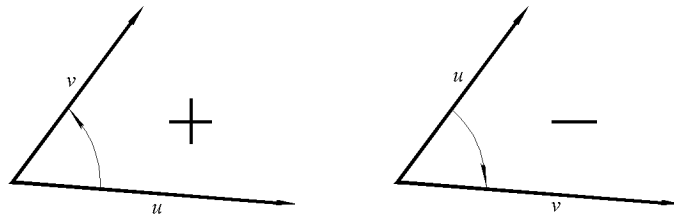
$$\text{Obj}(v, u + w) + \text{Obj}(v, u) = \text{Obj}(v, w).$$



Rysunek 2.

Różnica między tymi wzorami związana jest z wzajemnym ustawieniem wektorów u, v, w . Obydwa wzory można będzie zebrać w jeden,

jeżeli do objętości doda się jeszcze znak wskazujący na tzw. *orientację* układu wektorów. Umówimy się, że uporządkowana para wektorów płaszczyzny (u, v) jest zorientowana dodatnio, jeżeli obracanie pierwszego wektora w kierunku drugiego po najkrótszej drodze odbywa się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. W pewnych przypadkach umowa ta nie daje określonej odpowiedzi (jeżeli wektory są liniowo zależne), ale to nie będzie ważne, bo wtedy objętość jest równa zero.



Orientacja pary wektorów (u, v) na płaszczyźnie.

Wprowadzimy nową funkcję określoną na uporządkowanych parach wektorów wzorem

$$\det(u, v) = \pm \text{Obj}(u, v),$$

przy czym znak "+" jest wtedy, gdy para (u, v) jest zorientowana dodatnio, a "-" w przeciwnym przypadku.

Funkcja \det powinna spełniać następujące warunki:

1. $\det(u, v + w) = \det(u, v) + \det(u, w)$,
2. $\det(\lambda u, v) = \lambda \det(u, v)$,
3. $\det(u, v) = -\det(v, u)$,
4. $\det(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1$.

Ostatni punkt zawiera wybór jednostki objętości i uznanie jednej z orientacji za dodatnią. Zauważmy, że własność *antysymetrii* (warunek 3) powoduje, że \det spełnia warunki analogiczne do 1 i 2 ze względu na drugi argument.

Zobaczmy zaraz, że warunki 1–4 jednoznacznie określają funkcję \det . Można więc przyjąć je jako definicję, a rozważania, które je poprzedziły traktować jako uzasadnienie zajmowania się tą właśnie funkcją. Niech

$$v = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j}, \quad v = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j}.$$

Korzystając z własności 1 i 2 mamy

$$\begin{aligned} \det(u, v) &= a_{11}a_{12} \det(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + a_{11}a_{22} \det(\mathbf{i}, \mathbf{j}) + \\ &\quad a_{21}a_{12} \det(\mathbf{j}, \mathbf{i}) + a_{21}a_{22} \det(\mathbf{j}, \mathbf{j}). \end{aligned}$$

Z warunku 3 wynika, że dla dowolnego wektora w zachodzi

$$\det(w, w) = 0.$$

Ostatecznie, uwzględniając warunek 4 mamy

$$\det(u, v) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

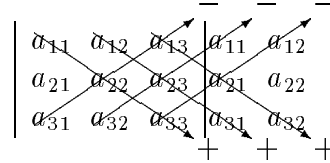
Definicję tę łatwo jest uogólnić na przestrzeń \mathbf{E}^n . Wyznacznik jest wtedy funkcją n wektorów spełniającą warunki:

1. $\det(v_1 + v'_1, v_2, \dots, v_n) = \det(v_1, v_2, \dots, v_n) + \det(v'_1, v_2, \dots, v_n)$,
2. $\det(\lambda v_1, v_2, \dots, v_n) = \lambda \det(v_1, v_2, \dots, v_n)$,
3. $\det(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\det(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$,
4. $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$.

Wektory e_1, e_2, \dots, e_n to te same, o których była mowa na końcu punktu 9.1. Korzystając z własności 1–4 można obliczyć wartość wyznacznika, gdy dane są współrzędne wektorów w bazie e_1, e_2, \dots, e_n . Podamy tu wzór dla $n = 3$. Wprowadzimy przy tym pewną wygodną i powszechnie stosowaną notację. Współrzędne wektorów będziemy pisać w kolumnkach tak, że powstanie macierz o trzech wierszach i trzech kolumnach. Dwie pionowe kreski będą oznaczały wyznacznik.

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Wzór ten nie jest łatwy do zapamiętania. Wynaleziono prostą regułę ułatwiającą korzystanie z niego bez odwoływania się do samego wzoru. Nośi ona nazwę *metody Sarrusa*. Opisuje ją poniższy rysunek:



Dla macierzy o dwóch kolumnach mamy, jak już widzieliśmy, dosyć podobny wzór

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Ogólnego wzoru na wyznacznik macierzy $n \times n$ tutaj nie podamy. Trzeba jednak wiedzieć, że dla $n > 3$ nie ma już prostej reguły graficznej podobnej do metody Sarrusa. Do celów praktycznych przydatny jest następujący wzór rekurencyjny, tak zwane *rozwinięcie Laplace'a*: Niech A będzie macierzą $n \times n$ o elementach a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$. Wtedy

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} \quad - \text{rozwinięcie względem } j\text{-tej kolumny,} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} \quad - \text{rozwinięcie względem } i\text{-tego wiersza,} \end{aligned}$$

gdzie A_{ij} jest wyznacznikiem macierzy powstałej z A przez wykreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny. Zobaczmy, jak to działa na przykładzie – rozwijamy względem drugiego wiersza:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= (-1) \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (+1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 7 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-3) \cdot (-13) + 2 \cdot (-1) + (-7) \cdot 5 = 2. \end{aligned}$$

Bardzo istotną własność wyznacznika wyraża następujące twierdzenie:

Twierdzenie 51 Niech v_1, \dots, v_n będzie układem n wektorów przestrzeni \mathbf{E}^n . Wtedy

$$\det(v_1, \dots, v_n) = 0 \iff v_1, \dots, v_n \text{ jest układem liniowo zależnym.}$$

Szkic dowodu.

\Leftarrow Jeżeli v_1, \dots, v_n jest układem liniowo zależnym, to, jak łatwo stwierdzić, któryś z tych wektorów jest kombinacją liniową pozostałych. Podstawiając zamiast niego tę kombinację i korzystając z liniowości wyrażamy $\det(v_1, \dots, v_n)$ za pomocą wyznaczników, w których wektor ten nie występuje. W każdym z tych wyznaczników musi powtarzać się jakiś wektor, a prostym wnioskiem z antysymetrii jest zerowanie się wyznacznika w takiej sytuacji.

\Rightarrow Jeżeli układ v_1, \dots, v_n jest liniowo niezależny, to jest on bazą przestrzeni \mathbf{E}^n . Wektory e_1, \dots, e_n są wtedy kombinacjami liniowymi wektorów v_1, \dots, v_n . W rezultacie $\det(e_1, \dots, e_n)$ wyraża się jako iloczyn pewnej liczby i $\det(v_1, \dots, v_n)$, a ponieważ $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ z założenia, $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. \square

Zastosujemy to twierdzenie do układu n równań liniowych z n niewiadomymi

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}$$

Przepiszemy go w postaci

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = b.$$

Przenosimy b na lewą stronę

$$(x_1v_1 - b) + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = 0.$$

Spełnienie tego układu równań oznacza liniową zależność układu wektorów $(x_1v_1 - b), v_2, \dots, v_n$, ponieważ współczynnik przy pierwszym z tych wektorów jest równy 1. Wobec tego

$$\det((x_1v_1 - b), v_2, \dots, v_n) = 0.$$

Stąd

$$x_1 \det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(b, v_2, \dots, v_n).$$

Analogicznie otrzymuje się wzory

$$x_k \det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, b, \dots, v_n),$$

gdzie b w wyznaczniku po prawej stronie równania stoi na k -tym miejscu. Są to tak zwane *wzory Cramera*. Jeżeli $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$, to mamy stąd rozwiązanie układu

$$x_k = \frac{\det(v_1, \dots, b, \dots, v_n)}{\det(v_1, v_2, \dots, v_n)}.$$

Do celów praktycznych wzory te nie zawsze są najbardziej przydatne, często sprawniej rozwiązuje się układ równań jakąś inną metodą. Ważność ich polega na tym, że można z nich wywnioskować następujące twierdzenie

Twierdzenie 52 *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, żeby układ n równań liniowych z n niewiadomymi miał dla każdej prawej strony dokładnie jedno rozwiązanie jest niezerowanie się wyznacznika macierzy tego układu.*

Zauważmy, że twierdzenie to formułuje warunek konieczny i wystarczający na to, żeby odwzorowanie liniowe \mathbf{E}^n w \mathbf{E}^n miało odwrotne.



2.3.4 Iloczyn wektorowy

Postaramy się tutaj zrozumieć, dlaczego w szkole przyjmuje się taką dziwną definicję iloczynu wektorowego. Zobaczymy, że po bliższym przyjrzeniu się można tę definicję uznać za naturalną. Potrzebna nam będzie pewna własność iloczynu skalarnego. Niech będzie dany jakiś wektor $q \in \mathbf{E}^n$. Określamy funkcję f_q na \mathbf{E}^n wzorem $f_q(p) = (p|q)$. Funkcja ta ma następującą własność:

$$f_q(\lambda p + \lambda' p') = \lambda f_q(p) + \lambda' f_q(p').$$

Ogólnie, funkcję $\mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$ posiadającą tę własność nazywamy *funkcją liniową*⁹. Prawdziwe jest następujące proste a ważne twierdzenie, którego dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

⁹Stosuje się też nazwy *forma liniowa*, *kowektor*.

Twierdzenie 53 Dla każdego funkcjonału liniowego f określonego na \mathbf{E}^n istnieje (jedyne) wektor $q \in \mathbf{E}^n$ taki, że dla każdego p

$$f(p) = (p|q).$$

Przechodzimy teraz do iloczynu wektorowego. W przestrzeni \mathbf{E}^3 rozważamy funkcję f określoną wzorem $f(p) = \det(p, v_1, v_2)$. Na mocy Twierdzenia 53 mamy istnienie dokładnie jednego wektora q takiego, że $f(p) = (p|q)$. Wektor q nazywamy *iloczynem wektorowym* wektorów v_1 i v_2 i oznaczamy $v_1 \times v_2$. Podsumowując, iloczyn wektorowy określony jest przez tożsamość

$$\det(p, v_1, v_2) = (p|v_1 \times v_2)$$

dla wszystkich $p \in \mathbf{E}^3$.

Następujące twierdzenie określa kierunek, długość i zwrot iloczynu wektorowego:

Twierdzenie 54

1. $v_1 \times v_2$ jest prostopadły do wektorów v_1 i v_2 .
2. $\|v_1 \times v_2\|$ równa się polu powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach v_1 i v_2 .
3. $\det(v_1 \times v_2, v_1, v_2) \geq 0$.

Dowód.

ad 1. Obliczamy iloczyn skalarny

$$(v_1|v_1 \times v_2) = \det(v_1, v_1, v_2) = 0.$$

ad 2. Weźmy wektor p o długości 1 prostopadły do v_1 i v_2 . Wtedy

$$|\det(p, v_1, v_2)| = \text{Obj}(p, v_1, v_2) = |(p|v_1 \times v_2)| = \|v_1 \times v_2\|.$$

Biorąc pod uwagę to, że obliczana objętość jest równa polu powierzchni podstawy, czyli równoległoboku rozpiętego na v_1 i v_2 otrzymujemy tezę punktu 2.

ad 3.

$$\det(v_1 \times v_2, v_1, v_2) = (v_1 \times v_2 | v_1 \times v_2) \geq 0.$$

□

Własności iloczynu wektorowego wymienione w tym twierdzeniu to te same, które wykorzystuje się definiując iloczyn wektorowy na lekcjach fizyki w pierwszej klasie liceum. W zastosowaniach ważne są jeszcze następujące dwie własności:

$$v \times u = -u \times v,$$

$$(\lambda u + \lambda' u') \times v = \lambda(u \times v) + \lambda'(u' \times v).$$

Wynikają one łatwo z analogicznych własności wyznacznika.

Pozostało jeszcze znalezienie wzoru wyrażającego współrzędne iloczynu wektorowego x_1, x_2, x_3 przez współrzędne czynników. Używając współrzędnych wektorów zapiszmy równanie $(p | u \times v) = \det(p, u, v)$:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = \begin{vmatrix} p_1 & u_1 & v_1 \\ p_2 & u_2 & v_2 \\ p_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

Rozwijając względem pierwszej kolumny stwierdzamy, że

$$x_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad x_2 = - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Zapamiętanie tych wzorów umożliwia zapisanie ich w niezbyt poprawnej, ale wygodnej formie:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & u_1 & v_1 \\ \mathbf{j} & u_2 & v_2 \\ \mathbf{k} & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$



2.3.5 Odwzorowania liniowe i macierze

Przyjrzymy się teraz trochę bliżej odwzorowaniom liniowym. Zauważmy najpierw, że powiązanie odwzorowań liniowych z macierzami polega

na tym, że macierz opisuje to, co dzieje się ze współrzędnymi wektora, gdy dokonujemy przekształcenia liniowego. Współrzędne wektora to współczynniki występujące w przedstawieniu tego wektora jako kombinacji liniowej wektorów bazy. Przypisywanie macierzy odwzorowaniom liniowym odbywa się więc zawsze względem danych baz. Oto konkretny przepis: Niech E i F będą przestrzeniami wektorowymi, $A : E \rightarrow F$ niech będzie odwzorowaniem liniowym, e_1, \dots, e_n i f_1, \dots, f_m bazami odpowiednio E i F . Niech

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Wtedy

$$Ax = x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n = \sum_{k=1}^n x_k A e_k.$$

Widać, że odwzorowanie liniowe można opisać podając jego wartości na wektorach bazy e_1, \dots, e_n , do czego wystarczy podać współczynniki przedstawienia wektorów $A e_1, \dots, A e_n$ w bazie f_1, \dots, f_m .

$$A e_k = a_{1k} f_1 + a_{2k} f_2 + \dots + a_{mk} f_m = \sum_{j=1}^m a_{jk} f_j, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Oznaczając $Ax = y = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$ i podstawiając wszystko razem mamy

$$y_1 f_1 + \dots + y_m f_m = x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m x_k a_{jk} f_j.$$

Wobec tego (jednoznaczność przedstawienia wektora y jako kombinacji liniowej bazy f_1, \dots, f_m):

$$y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k. \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Widać, że wyszedł wzór, z którym spotkaliśmy się na samym początku badania układów równań liniowych. Macierz (a_{jk}) będziemy nazywali *macierzą odwzorowania A w bazach e_1, \dots, e_n i f_1, \dots, f_m* . Weźmiemy teraz jeszcze jedną przestrzeń wektorową G z wybraną bazą g_1, \dots, g_l .

Niech $B : F \rightarrow G$ będzie odwzorowaniem liniowym. Oznaczmy przez (b_{ij}) macierz B w bazach f_1, \dots, f_m i g_1, \dots, g_l . Łatwo przekonać się, że złożenie $B \circ A$, oznaczane zwykle BA jest odwzorowaniem liniowym. Znajdziemy jego macierz (oznaczamy ją (c_{ik})) w bazach e_1, \dots, e_n i g_1, \dots, g_l .

$$BAe_k = \sum_{i=1}^l c_{ik}g_i = B \sum_{j=1}^m a_{jk}f_j = \sum_{j=1}^m a_{jk}Bf_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l a_{jk}b_{ij}g_i.$$

Wobec tego

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m b_{ij}a_{jk}.$$

Działanie, które wykonuje się według tego wzoru nazywa się *mnożeniem macierzy*. Wykonane wyżej rachunki podsumujemy jednym zdaniem:

Składaniu odwzorowań liniowych odpowiada mnożenie ich macierzy.

Oprócz składania odwzorowań liniowych mamy jeszcze dwa działania – dodawanie odwzorowań działających między tymi samymi przestrzeniami: $(A + B)x = Ax + Bx$ i mnożenie przez liczbę $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$. Odpowiada im dodawanie elementów macierzy i mnożenie każdego elementu przez liczbę.

Zajmiemy się teraz odwzorowaniami liniowymi działającymi w jednej przestrzeni wektorowej. Zamiast dwóch baz bierzemy jedną. Mamy do czynienia z macierzami kwadratowymi. Odwzorowania liniowe i macierze często oznacza się tak samo. Będziemy też tak robili, bo na ogół nie prowadzi to do nieporozumień. Wyróżnioną rolę pełni odwzorowanie tożsamościowe i odpowiadająca mu macierz, oznaczane I . Elementy macierzy I oznaczane bywają δ_{ij} (tzw. *delta Kroneckera*). Jak łatwo stwierdzić

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Każdej macierzy kwadratowej można przypisać wyznacznik. Zachodzi następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie 55 (CAUCHY)

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Szkic dowodu. Oznaczmy przez b_1, \dots, b_n kolumny macierzy B . Rozważamy funkcję $(b_1, \dots, b_n) \mapsto \det AB = \det(Ab_1, \dots, Ab_n)$. Funkcja ta jest liniowa względem każdego z argumentów i zmienia znak przy zamianie argumentów miejscami. Jeśli przyjrzymy się definicji wyznacznika, to zobaczymy, że funkcja o takich własnościach musi być proporcjonalna do wyznacznika B . Wobec tego $\det(AB) = c \det B$. Podstawiając $B = I$ mamy $c = \det A$. \square

Jeśli odwzorowanie liniowe A posiada odwrotne A^{-1} , to macierz odwzorowania odwrotnego, nazywana *macierzą odwrotną* można znaleźć korzystając z wzorów Cramera. Oznaczając elementy macierzy A przez a_{ij} , a elementy macierzy A^{-1} przez b_{ij} mamy

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{A_{ji}}{\det A},$$

gdzie A_{ji} oznacza wyznacznik macierzy powstałej z A po wykreśleniu j -tego wiersza i i -tej kolumny.

Twierdzenie Cauchy'ego ma interesującą konsekwencję. Macierz odwzorowania liniowego na ogół zależy od bazy, ale jej wyznacznik, jak zaraz zobaczymy, od bazy nie zależy. Aby to sprawdzić, weźmy odwzorowanie liniowe, które w bazie e_1, \dots, e_n ma macierz A . Jeśli f_1, \dots, f_n jest inną bazą, to

$$f_j = \sum_{k=1}^n c_{kj} e_k, \quad j = 1, \dots, n.$$

Macierz $C = (c_{kj})$ posiada odwrotną C^{-1} . Łatwo można sprawdzić, że nasze odwzorowanie ma w bazie f_1, \dots, f_n macierz

$$A' = CAC^{-1}.$$

Z twierdzenia Cauchy'ego mamy $\det A' = \det C \cdot \det A \cdot \det(C^{-1})$. Ponieważ $CC^{-1} = I$, mamy $\det C \cdot \det(C^{-1}) = 1$, więc $\det A = \det A'$. Można więc mówić o wyznaczniku odwzorowania liniowego niezależnie od bazy. Ponadto nie jest potrzebne podanie jednostki objętości i wyróżnienie orientacji, jak w przypadku wyznacznika układu wektorów.

2.3.6 Odwzorowania liniowe symetryczne

Niech E będzie euklidesową przestrzenią wektorową. W zastosowaniach ważną rolę odgrywa pewna klasa odwzorowań liniowych o szczególnie prostej strukturze.

Definicja 23 *Odwzorowanie liniowe $A : E \rightarrow E$ nazywamy symetrycznym, jeżeli dla dowolnych $p, q \in E$ zachodzi*

$$(Ap|q) = (p|Aq).$$

Nazwa ta związana jest z faktem, że w dowolnej bazie ortonormalnej macierz (a_{ij}) odwzorowania A spełnia warunek $a_{ij} = a_{ji}$. Rzeczywiście, niech e_1, \dots, e_n będzie bazą ortonormalną. Wtedy

$$Ae_i = \sum_{k=1}^n a_{ki}e_k,$$

skąd mamy, po uwzględnieniu, że $(e_j|e_k) = \delta_{jk}$

$$(e_j|Ae_i) = a_{ji} = (Ae_j|e_i) = (e_i|Ae_j) = a_{ij}.$$

Definicja 24 *Wektorem własnym odwzorowania liniowego A nazywamy taki wektor $v \neq 0$, że $Av = \lambda v$. Liczbę λ nazywamy wartością własną związaną z wektorem własnym v .*

Zastanówmy się, jakie są możliwe wartości własne odwzorowania liniowego. Jeżeli $Av = \lambda v$, to $(A - \lambda I)v = 0$ dla pewnego $v \neq 0$. Oznacza to, że $A - \lambda I$ nie jest odwracalne, więc $\det(A - \lambda I) = 0$. $\det(A - \lambda I)$ jest wielomianem zmiennej λ , nazywanym *wielomianem charakterystycznym* odwzorowania A . Jeśli przestrzeń E jest n -wymiarowa, to jest on wielomianem stopnia n , otrzymaliśmy więc równanie n -tego stopnia, zwane *równaniem charakterystycznym*.

Wartości własne i wektory własne odwzorowań symetrycznych mają następujące własności:

Twierdzenie 56

1. *Wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste.*
2. *Wektory własne związane z różnymi wartościami własnymi są ortogonalne.*

Punktu 1. nie będziemy dowodzili, bo dowód (prosty) wymaga użycia zespolonych przestrzeni wektorowych. Aby udowodnić punkt 2. weźmy dwa wektory własne związane z różnymi wartościami własnymi

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v, \\ Au &= \mu u. \end{aligned}$$

Pierwsze równanie mnożymy skalarnie z prawej strony przez u , a drugie z lewej strony przez v i odejmujemy stronami:

$$(Av|u) - (v|Au) = 0 = (\lambda - \mu)(v|u).$$

Ponieważ $\lambda \neq \mu$, mamy $(v|u) = 0$. □

Podstawową własność odwzorowań symetrycznych wyraża następujące twierdzenie.

Twierdzenie 57 *Niech A będzie odwzorowaniem symetrycznym w wektorowej przestrzeni euklidesowej E . Istnieje wtedy baza ortonormalna e_1, \dots, e_n taka, że*

$$Ae_i = \lambda_i e_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Odwrotnie, każde odwzorowanie liniowe mające taką własność jest symetryczne.

Dowód. Niech A będzie odwzorowaniem symetrycznym, a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pierwiastkami wielomianu charakterystycznego. Ponieważ wyznacznik $\det(A - \lambda_1 I) = 0$, istnieje $v \neq 0$ takie, że $(A - \lambda_1 I)v = 0$. Bierzemy $e_1 = \frac{1}{\|v\|}v$. Stwierdzamy następnie, że jeśli $(u|v) = 0$, to $(Au|v) = (u|Av) = (u|\lambda v) = \lambda(u|v) = 0$. Zbiór $F = \{u \in E : (u|v) = 0\}$ jest, jak łatwo zauważyć, podprzestrzenią. Można więc rozważać obcięcie A_F odwzorowania A do F . Wielomian charakterystyczny w_F odwzorowania A_F spełnia warunek $(\lambda - \lambda_1)w_F(\lambda) = w(\lambda)$, co łatwo zobaczyć wybierając w E bazę złożoną z e_1 i jakiejś bazy podprzestrzeni F . Wielomian w_F ma więc pierwiastki $\lambda_2, \dots, \lambda_n$, a wektory własne A_F są wektorami własnymi A . Ponieważ A_F również jest odwzorowaniem symetrycznym, możemy nasze postępowanie powtórzyć. Wymiar

przestrzeni za każdym razem zmniejsza się o jeden, więc po skończonej liczbie kroków dojdziemy do podprzestrzeni 1-wymiarowej, a przy tym skonstruujemy szukaną bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych A .

Odwrotnie, załóżmy, że istnieje baza ortonormalna e_1, \dots, e_n taka, że $Ae_i = \lambda_i e_i$. Sprawdzamy, że A jest odwzorowaniem symetrycznym. Bierzymy $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$, $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$. Otrzymujemy $(Au|v) = (\sum_i u_i \lambda_i e_i | \sum_j v_j e_j) = \sum_i \lambda_i u_i v_i = (v|Au)$.

□

Przykład. W przestrzeni \mathbf{E}^2 mamy odwzorowanie liniowe, którego macierz w bazie e_1, e_2 jest równa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Wartości własne są więc równe $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$. Znajdujemy teraz wektory własne. Zapisujemy równanie $(A - \lambda_1 I)v = 0$ za pomocą współrzędnych.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Przestrzeń rozwiązań tego układu jest jednowymiarowa. Wybieramy w niej jakikolwiek wektor różny od zera i dzielimy przez jego długość otrzymując pierwszy wektor f_1 szukaney bazy. Drugi wektor, odpowiadający λ_2 znajdujemy podobnie. Jednym z (czterech możliwych¹⁰) wyników jest baza

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

¹⁰Dlaczego możliwe są różne wyniki?

Zadania

1. Niech P będzie odwzorowaniem symetrycznym spełniającym warunek $P^2 = P$. Jakie wartości własne P są możliwe?
2. Udowodnić, że jeśli A i B są odwzorowaniami symetrycznymi oraz $AB = BA$, to istnieje baza ortonormalna, której elementy są wektorami własnymi jednocześnie dla A i B .
3. Wyprowadzić wzór na wyrazy ciągu Fibonacciego. Wskazówka: Pary wyrazów ciągu Fibonacciego (u_{n+1}, u_n) można traktować jako elementy przestrzeni \mathbf{E}^2 . Zobaczyć, jakie odwzorowanie liniowe w tej przestrzeni określa wzór rekurencyjny definiujący ciąg Fibonacciego.



2.4 Krzywe i powierzchnie drugiego stopnia

W szkolnym kursie matematyki spotykaliśmy się z niektórymi krzywymi drugiego stopnia i ich równaniami. Oto przykłady:

1. parabola o równaniu $y = ax^2 + bx + c$,
2. hiperbola o równaniu $xy = 1$,
3. okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$.

Postaramy się tutaj powtórzyć i usystematyzować wiedzę na ten temat. W przestrzeni dwuwymiarowej najogólniejsza postać równania drugiego stopnia wygląda następująco:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Oznaczając wektor o współrzędnych (x, y) przez p równaniu temu można nadać postać

$$(p|Ap) + (p|q) + C = 0,$$

Odwzorowanie A zawsze można wybrać tak, żeby było symetryczne. Wtedy jego macierz ma postać

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Równanie takie można sprowadzać do jednej z kilku standartowych postaci, nazywanych kanonicznymi, wykonując po kolei następujące operacje:

1. Znaleźć wartości własne i bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych A .
2. Zapisać równanie we współrzędnych określonych przez znaną bazę.

3. Dokonując przesunięcia układu współrzędnych zlikwidować całkowicie lub częściowo składnik zależny liniowo od p .

Otrzymane w ten sposób równania podzielimy na trzy grupy, według znaków wartości własnych macierzy A . Zestaw tych znaków nazywany bywa sygnaturą.

1. Sygnatura $(+, +)$. W tym przypadku zawsze można zlikwidować część liniową, w rezultacie otrzymuje się następujące trzy typy równań:

$$(a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{elipsa})$$

$$(b) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \quad (\text{jeden punkt})$$

$$(c) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (\text{zbiór pusty})$$

2. Sygnatura $(+, -)$. W tym przypadku również można zlikwidować część liniową, a znak wyrazu wolnego nie odgrywa roli, mamy więc następujące typy:

$$(a) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{hiperbola})$$

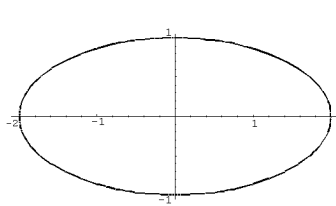
$$(b) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \quad (\text{para przecinających się prostych})$$

3. Sygnatura $(+, 0)$. Część liniowa nie zawsze da się zlikwidować. Typy są następujące:

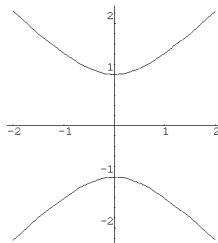
$$(a) \quad x^2 - ay = 0. \quad (\text{parabola})$$

- (b) $x^2 = 1$. (para prostych równoległych)
- (c) $x^2 = 0$. (prosta)
- (d) $x^2 = -1$. (zbiór pusty)

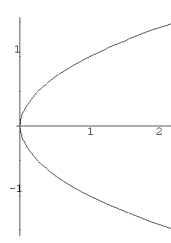
Najciekawsze z tych krzywych przedstawione są na rysunku:



Elipsa $x^2/4 + y^2 = 1$



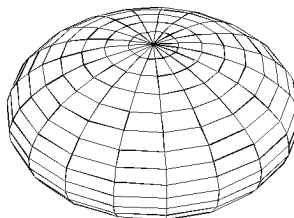
Hiperbola $y^2 - x^2 = 1$



Parabola $y^2 - x = 0$

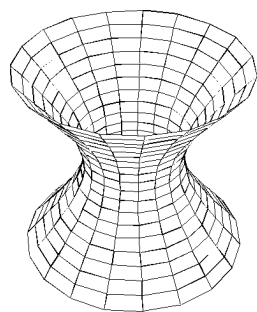
W przestrzeni o większej liczbie wymiarów jest oczywiście o wiele więcej różnych typów. Nie będziemy się tym zajmowali szczegółowo, poprzestając na rysunkach reprezentujących te typy powierzchni drugiego stopnia w przestrzeni trójwymiarowej, które nie redukują się do układów płaszczyzn, prostych lub punktów. Rysunki uporządkujemy według sygnatur.

Sygnatura (+ + +)

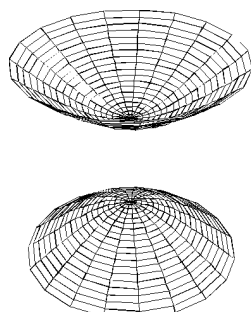


Elipsoida $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$

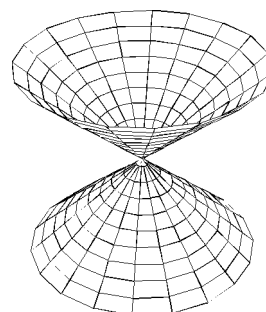
Sygnatura $(+ + -)$



Hiperboloida jednopowłokowa $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

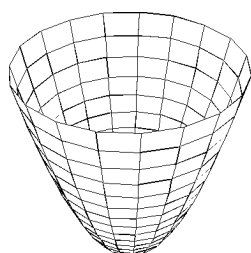


Hiperboloida dwupowłokowa $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

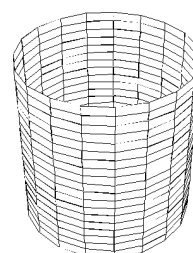


Stożek $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Sygnatura $(+ + 0)$

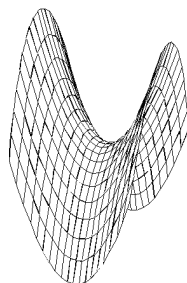


Paraboloida $x^2 + y^2 - z = 0$

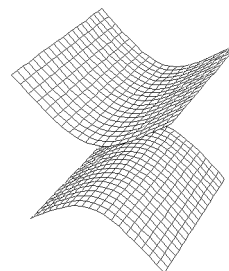


Walec $x^2 + y^2 = 1$

Sygnatura $(+ - 0)$

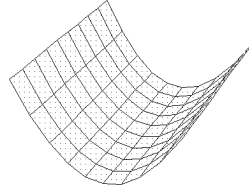


Paraboloida hiperboliczna $x^2 - y^2 - z = 0$



Walec hiperboliczny $x^2 - y^2 = 1$

Sygnatura (+00)



Walec Paraboliczny $x^2 - z = 0$

2.4.1 Styczna do krzywej drugiego stopnia

Co to jest styczna do krzywej? Pojęcia tego jeszcze nie zdefiniowaliśmy, chociaż pewne wskazówki daje pojęcie pochodnej. Nie będziemy tutaj korzystać z metod rachunku różniczkowego (potrzebne byłyby funkcje wielu zmiennych), pojęcie stycznej do krzywej drugiego stopnia zdefiniujemy metodą algebraiczną. Zauważmy najpierw, że narzucający się warunek — jeden punkt przecięcia z krzywą — byłby dobry dla elipsy, ale dla hiperboli i paraboli nie daje tego, o co chodzi. Będziemy tutaj żądali trochę więcej — punkt przecięcia ma być nie tylko jedynym rozwiązaniem układu równań opisujących prostą i krzywą drugiego stopnia, ale równanie kwadratowe, które się wtedy pojawia, ma mieć jeden pierwiastek podwójny.

Niech będzie dane równanie krzywej drugiego stopnia

$$(p|Ap) + (p|q) + r = 0.$$

Oraz punkt p_0 leżący na tej krzywej. Mamy znaleźć równanie stycznej do danej krzywej w punkcie p_0 .

Dowolna prosta przechodząca przez p_0 ma równanie $p = p_0 + vt$. Styczność narzuci warunek na v . Podstawiamy

$$\begin{aligned} (p_0 + vt|A(p_0 + vt)) + (p_0 + vt|q) + r &= \\ (p_0|Ap_0) + (p_0|q) + r + t[(v|Ap_0) + (p_0|Av) + (v|q)] + t^2(v|Av) &= 0. \end{aligned}$$

Uwzględniając założenie o tym, że p_0 leży na naszej krzywej mamy

$$t[(v|Ap_0) + (p_0|Av) + (v|q)] + t^2(v|Av) = 0.$$

Sformułujemy teraz *warunek styczności*: $t = 0$ jest podwójnym pierwiastkiem tego równania. Wobec tego współczynnik przy t w pierwszej potędze musi być równy zeru:

$$(v|Ap_0) + (p_0|Av) + (v|q) = 0.$$

Korzystając z symetrii A i podstawiając $v = (p-p_0)/t$ mamy równanie stycznej

$$\boxed{2(p-p_0|Ap_0) + (p-p_0|q) = 0.}$$

Uwzględniając to, że p_0 leży na krzywej można równanie to doprowadzić do trochę innej postaci:

$$2(p|Ap_0) + (p+p_0|q) + 2r = 0.$$

Przykład. Mamy równanie elipsy

$$x^2 + 4y^2 = 1.$$

Równanie stycznej do tej elipsy w punkcie o współrzędnych (x_0, y_0) leżącym na niej:

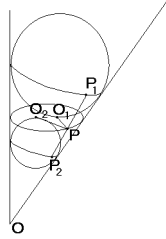
$$xx_0 + 4yy_0 = 1.$$

2.4.2 Ogniska i kierownice krzywych drugiego stopnia

Nie będziemy tutaj w systematyczny sposób przedstawiać geometrycznych własności krzywych drugiego stopnia. Ograniczymy się do pewnych własności elipsy. Łatwo jest zauważyć, że elipsę można otrzymać jako przecięcie stożka z odpowiednio ustawioną płaszczyzną¹¹. Zobaczymy to na przykładzie. Weźmy płaszczyznę o równaniu $z = 0$ i stożek o równaniu $(x + 2y + z)^2 + (x - 2y - z)^2 - (z - 1)^2 = 0$. Podstawiając pierwsze równanie do drugiego mamy $x^2 + 8y^2 - 1 = 0$. Tak się tutaj złożyło, że (x, y) mogą być uważane za współrzędne na danej

¹¹Podobną własność ma hiperbola i parabola. Dlatego krzywe te nazywa się *stożkowymi*.

płaszczyźnie. Otrzymaliśmy więc elipsę jako przekrój płaszczyzny ze stożkiem. Przyjrzyjmy się teraz rysunkowi.



Stożek o wierzchołku O przecięty jest płaszczyzną. W stożek ten wpisujemy dwie kule tak, żeby były styczne do tej płaszczyzny (oczywiście do stożka też). Punkty styczności kul z płaszczyzną oznaczamy O_1 i O_2 . Weźmy teraz dowolny punkt P leżący na elipsie. Wykażemy, że suma odległości tego punktu od punktów O_1 i O_2 jest taka sama dla wszystkich punktów elipsy. Prowadzimy przez P odcinek tworzącej stożka aż do przecięcia w punktach P_1 i P_2 z okręgami, wzdłuż których kule są styczne do stożka.

Zauważmy, że $PO_1 = PP_1$ i $PO_2 = PP_2$, ponieważ są to odcinki stycznych do kul z tego samego punktu. Wobec tego $PO_1 + PO_2 = PP_1 + PP_2 = P_1P_2$. Długość odcinka P_1P_2 nie zależy od tego, którą tworzącą stożka (czyli który punkt P) wybraliśmy.

Punkty O_1 i O_2 nazywamy *ogniskami* elipsy. Udowodnioną przed chwilą własność elipsy możemy sformułować następująco:

Suma odległości punktów elipsy od jej ognisk jest stała.

Zobaczmy teraz, jak można znaleźć współrzędne ognisk elipsy, gdy dane jest jej równanie. Zadanie to rozwiązywać będziemy od końca. Niech będą dane dwa punkty O_1 i O_2 . Układ współrzędnych wybierzemy w ten sposób, żeby współrzędne tych punktów były równe $(-c, 0)$ i $(c, 0)$. Znajdziemy równanie, jakie spełniają punkty, dla których suma odległości od P_1 i P_2 jest równa zadanej liczbie $2a$ (oczywiście $a > c$).

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Podnosimy do kwadratu, przenosimy na prawą stronę składniki nie zawierające pierwiastków, jeszcze raz podnosimy do kwadratu i porządkujemy. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Jest to równanie elipsy o dłuższej półosi a i krótszej $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Odwrotnie, jeżeli mamy dane półosie elipsy a i b , to wiemy, że ogniska leżą na dłuższej z nich (niech to będzie a) w odległości c od środka, spełniającej warunek $b^2 = a^2 - c^2$, skąd $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Liczbę $e = \frac{c}{a}$ nazywamy *mimośrodem* elipsy.

Trochę krótszy rachunek pokazuje, że dla każdego punktu rozważanej przez nas elipsy stosunek odległości tego punktu od ogniska $(c, 0)$ do odległości od prostej o równaniu $x = \frac{a^2}{c}$ jest taki sam i równa się mimośrodkowi e . Rzeczywiście, stosunek ten jest równy

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a^2}{c} - x} = \sqrt{\frac{(x-c)^2 + y^2}{\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2}} = \dots = e.$$

Kropki w tym rachunku można zapisać eliminując y na podstawie równania elipsy i podstawiając $c = ea$. Istnieje jeszcze jedna prosta o tej własności. Nazywamy je *kierownicami* elipsy. Zapiszmy udowodnioną przed chwilą własność w jednym zdaniu:

Stosunek odległości punktów elipsy od ogniska do odległości od kierownicy jest stały, mniejszy od 1.

Jako zadania potraktujemy kilka innych własności krzywych stożkowych:

- Różnica odległości punktów hiperboli od pewnych dwóch punktów (też nazywanych ogniskami) jest stała.
- Stosunek odległości punktów hiperboli od ogniska i od pewnej prostej (kierownicy) jest stały, większy od 1.
- Stosunek odległości punktów paraboli od ogniska i od pewnej prostej (kierownicy) jest stały, równy 1.
- Wszystkie promienie światła wychodzące z jednego ogniska elipsy po odbiciu przechodzą przez drugie ognisko.
- Jeżeli promień światła lub jego przedłużenie przechodzi przez ognisko hiperboli, to promień odbity od hiperboli lub jego przedłużenie przechodzi przez drugie ognisko.

- Wszystkie promienie światła wychodzące z ogniska paraboli po odbiciu od niej stają się równoległe.
- Ogniska hiperboli otrzymanej jako przecięcie stożka płaszczyzną są punktami styczności tej płaszczyzny z kulami wpisanymi w stożek.
- Ognisko paraboli otrzymanej jako przecięcie stożka z płaszczyzną jest punktem styczności tej płaszczyzny z kulą wpisaną w stożek (a co z drugą kulą?).
- Na płaskiej podłodze leży piłka w kształcie kuli. Cień kuli w promieniach słonecznych jest elipsą. Jedno z ognisk tej elipsy jest punktem styczności piłki z podłogą. Zakładamy tutaj, że Słońce jest bardzo daleko (co jest prawdą) i że jest ono bardzo małe (co nie jest prawdą).
- Wszystkie krzywe drugiego stopnia można otrzymać jako przecięcie stożka lub walca płaszczyzną. Które krzywe otrzymujemy przez przecięcie stożka, a które jako przekroje walca?

Rozdział 3

Równania różniczkowe zwyczajne

3.1 Ogólne własności



Z równaniami różniczkowymi spotykamy się w wielu działach fizyki. Oto przykłady:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= -\lambda N && \text{(prawo rozpadu promieniotwórczego),} \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= F(x, t) && \text{(druga zasada Newtona),} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{(równanie falowe),} \\ i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi && \text{(równanie Schrödingera).}\end{aligned}$$

Pierwsze dwa z tych równań zawierają pochodne funkcji jednej zmiennej. Równania takie nazywamy *zwyczajnymi*. Równania takie, jak trzecie i czwarte, zawierające pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych (o czym będzie w trzecim semestrze), nazywamy *cząstkowymi*. Najwyższy stopień pochodnej występujący w równaniu nazywamy *rzędem* równania. Zajmiemy się tutaj równaniami zwyczajnymi. Aby zorientować się w tym, co istotnie różni równania różniczkowe od np. równań algebraicznych, przyjrzymy się im z dwóch różnych punktów widze-

nia. Zaczniemy od wyobrażenia sobie, jak mogłoby wyglądać rozwiązanie równania różniczkowego za pomocą komputera¹. Zajmiemy się prawem rozpadu promieniotwórczego. Weźmy ciąg wartości zmiennej niezależnej $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$. Zastępując pochodną przez iloraz różnicowy mamy w przybliżeniu

$$\frac{N(t_{n+1}) - N(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = -\lambda N(t_n).$$

Stąd

$$N(t_{n+1}) = N(t_n) - \lambda N(t_n)(t_{n+1} - t_n).$$

Ostatnie równanie może być traktowane jako wzór rekurencyjny. Aby móc go wykorzystać do obliczania wartości $N(t_k)$ trzeba podać wartość N w punkcie startu, czyli nałożyć dodatkowy warunek $N(t_0) = N_0$, gdzie N_0 jest zadaną liczbą. Widzimy tutaj, że z matematycznego (z fizycznego także, ale z innych powodów) punktu widzenia naturalne może być rozpatrywanie równania różniczkowego łącznie z pewnymi warunkami dodatkowymi. Zobaczmy, jak to wygląda dla równania drugiego rzędu, na przykład dla równania oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x.$$

Ponieważ druga pochodna nie daje się przybliżać tak prostymi wyrażeniami, jak pierwsza, zastosujemy tutaj podstawienie sprowadzające to równanie do układu równań pierwszego rzędu. Podstawmy $v = dx/dt$. Mamy układ równań

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -x \end{aligned}$$

¹Metoda, którą tu przedstawiamy, nie jest najlepsza. Jeśli ktoś chce uzyskać dobre przybliżenie rozwiązania, to powinien tę metodę trochę zmodyfikować. Można ją natomiast wykorzystać do udowodnienia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego.

Podobnie, jak poprzednio, możemy to przybliżyć układem równań rekurencyjnych

$$\begin{aligned}x(t_{n+1}) &= x(t_n) + v(t_n)(t_{n+1} - t_n) \\v(t_{n+1}) &= v(t_n) - x(t_n)(t_{n+1} - t_n)\end{aligned}$$

Aby układ ten można było wykorzystać do obliczania wartości x dla kolejnych t_n trzeba podać $x(t_0)$ oraz $v(t_0)$.

Uogólnimy teraz te obserwacje. Po pierwsze, równanie (lub układ) różniczkowe zwyczajne dowolnego rzędu można sprowadzić do układu równań pierwszego rzędu. Zajmiemy się więc tylko układami pierwszego rzędu. Po drugie, celowe okazuje się rozpatrywanie układu pierwszego rzędu łącznie z pewnymi dodatkowymi warunkami. Dla prostoty zapisu układ równań będziemy traktowali jako jedno równanie w przestrzeni wektorowej.

Zagadnieniem początkowym albo *zagadnieniem Cauchy'ego* będziemy nazywali równanie różniczkowe (lub układ równań, jeśli x i f mają wartości w przestrzeni wektorowej)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad \text{z warunkiem} \quad x(t_0) = x_0.$$

Jeśli funkcja f jest dostatecznie regularna, to zagadnienie Cauchy'ego zawsze ma dokładnie jedno rozwiązanie².

Zajmiemy się teraz interpretacją geometryczną równań różniczkowych. Równanie skalarne pierwszego rzędu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

²Twierdzeń tego rodzaju jest wiele, przytoczymy tutaj jedno z nich.

Twierdzenie 58 *Jeżeli funkcja f jest ciągła i spełnia tzw. warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną, czyli*

$$\bigvee_{L \in \mathbf{R}} \bigwedge_{t, x, x'} \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L \|x - x'\|,$$

to istnieje takie $\varepsilon > 0$, że w przedziale $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego

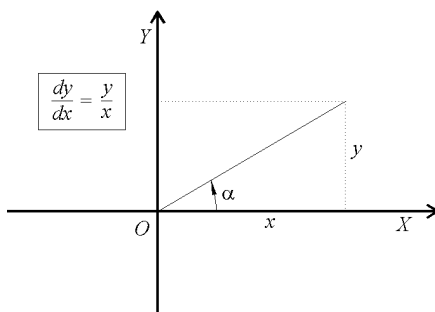
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

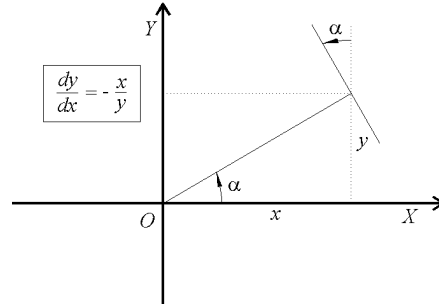
narzuca warunek na kierunek stycznej do wykresu funkcji: tangens kąta nachylenia wykresu funkcji będącej rozwiązaniem tego równania w każdym punkcie (x, y) , przez który ten wykres przechodzi ma być równy $f(x, y)$. (Uwaga: w tym miejscu zmienne oznaczone są literami x, y . Do tego też trzeba się przyzwyczajać.) Zadanie wygląda więc następująco: w każdym punkcie pewnego obszaru (tam, gdzie funkcja f jest określona) mamy zadany kierunek. Należy znaleźć krzywą, która w każdym punkcie, przez który przechodzi, jest styczna do kierunku zadanego w tym punkcie. Zobaczmy to na przykładach.

Przykład 1. Mamy dane równanie różniczkowe $y' = y/x$. Równanie to oznacza, że styczna do wykresu rozwiązania w punkcie (x, y) ma tworzyć z osią X kąt, którego tangens jest równy y/x . Nietrudno zauważyć, że przedłużenie takiej stycznej przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Przykład 2. Równanie $y' = -x/y$ oznacza (jeżeli pamiętamy ze szkoły, że $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} \alpha$), że styczna do wykresu w punkcie (x, y) jest prostopadła do odcinka łączącego ten punkt z początkiem układu współrzędnych. Rozwiązaniami są więc łuki okręgów (nie całe okręgi, bo okrąg nie jest wykresem funkcji) o środku w punkcie $(0, 0)$.

Ilustracją tych przykładów są poniższe rysunki.

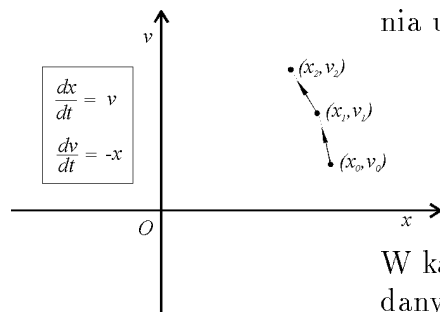




W przykładach tych widoczne jest również to, na co już zwróciliśmy uwagę, że rozwiązań równania różniczkowego jest na ogół bardzo wiele, a do wybrania jednego z nich może służyć nałożenie dodatkowego warunku, aby rozwiązanie przechodziło przez zadany punkt (x_0, y_0) . Zwróćmy uwagę i na to, że rozwiązania na ogół nie są określone dla wszystkich wartości zmiennej niezależnej.

Inny sposób geometrycznego interpretowania niektórych równań różniczkowych przedstawia następujący rysunek. Nawiązuje on także do rozpatrywanej wcześniej przybliżonej metody rozwiązywania równania oscylatora harmonicznego.

Współrzędne (x, v) na płaszczyźnie odpowiadają możliwym wartościom rozwiązania układu równań



$$\frac{dx}{dt} = v,$$

$$\frac{dv}{dt} = -x.$$

W każdym punkcie płaszczyzny mamy zadany wektor o współrzędnych $(v, -x)$.

Rozwiązaniem układu jest sparametryzowana krzywa $t \mapsto (x(t), v(t))$. Równanie jest spełnione, jeżeli dla każdego t „prędkość” przemieszczania się punktu na rysunku jest zadany wektorem. Przedstawiona przedtem metoda przybliżona polegała na przyjęciu, że prędkość na każdym odcinku $]t_n, t_{n+1}[$ jest stała. W takim przybliżeniu ruch odbywa się po łamanej. Łatwo tutaj zauważyć, że o ile dla małych war-

tości $t - t_0$ rozwiązanie przybliżone może mało różnić się od prawdziwego, to jednak pewne istotne własności rozwiązania – okresowość i ograniczoność – w takim przybliżeniu się traci.

Jeśli równanie różniczkowe ma postać $y' = f(y)g(x)$, to można w prosty sposób znaleźć jego rozwiązanie. Dzielimy równanie stronami przez f i całkujemy stronami. Otrzymujemy

$$\int \frac{1}{f(y)} y' dx = \int g(x) dx.$$

Lewa całka upraszcza się po zastosowaniu podstawienia $y(x)$. Rozwiązanie otrzymujemy na ogół w postaci uwikłanej. Sposób ten nosi nazwę *metody rozdzielania zmiennych*.

Przykład. Rozwiążmy równanie

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Po pomnożeniu stronami przez y i scałkowaniu mamy

$$\int yy' dx = -\int x dx,$$

a stąd $y^2 = x^2 + C$, gdzie C jest jakąś stałą. Uwzględnienie warunku początkowego na ogół pozwala wyznaczyć stałe pojawiające się w ogólnej postaci rozwiązania.



3.1.1 Równania różniczkowe liniowe

Zajmiemy się pewną szczególną, ale ważną klasą równań i układów równań różniczkowych. Najpierw, jako przykład, rozpatrzmy przypadek jednego równania pierwszego rzędu. Interesują nas równania postaci

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t).$$

Ważną rolę odgrywa związane z nim nieco prostsze równanie

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x,$$

zwane *równaniem jednorodnym*. Tak samo, jak w przypadku układów równań liniowych (nie różniczkowych) dowodzi się, że aby uzyskać wszystkie rozwiązania równania niejednorodnego wystarczy znaleźć jedno rozwiązanie równania niejednorodnego i wszystkie rozwiązania równania jednorodnego. Równanie jednorodne daje się rozwiązać metodą rozdzielania zmiennych. Rozwiązanie ogólne:

$$x(t) = C e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Rozwiązania równania niejednorodnego będziemy szukali w postaci.

$$x(t) = u(t) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Ponieważ szukana funkcja $u(\cdot)$ stoi na miejscu stałej C , sposób ten nazywa się *metodą uzmienniania stałej*. Podstawiamy do równania

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{du}{dt} e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + u(t) \frac{d}{dt} (e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}) = \\ &= \frac{du}{dt} e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + a(t)x = a(t)x + b(t). \end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{du}{dt} = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} b(t).$$

Funkcję $u(\cdot)$ znajdujemy całkując stronami.

Przykład. Rozwiążemy równanie opisujące ładowanie kondensatora o pojemności C ze źródła o napięciu U_0 przez opornik o oporności R . Niech $U(t)$ oznacza napięcie między okładkami kondensatora w chwili t .

$$C \frac{dU}{dt} = \frac{U_0 - U}{R}, \quad U(t_0) = 0.$$

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{U}{RC}.$$

Mamy

$$U(t) = A e^{-\frac{t}{RC}},$$

gdzie A jest dowolną stałą. Do równania niejednorodnego zastosujemy metodę uzmienniania stałej. Podstawiamy $U(t) = v(t) \exp(-t/RC)$.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dv}{dt} e^{-\frac{t}{RC}} - v(t) \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{U}{RC} + \frac{U_0}{RC}.$$

Stąd

$$\frac{dv}{dt} = \frac{U_0}{RC} e^{\frac{t}{RC}}.$$

Wobec tego

$$v(t) = U_0 e^{\frac{t}{RC}} + B,$$

gdzie B jest dowolną stałą. Stąd mamy

$$U(t) = U_0 + B e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Uwzględnienie warunku początkowego $U(t_0) = 0$ daje

$$0 = U_0 + B e^{-\frac{t_0}{RC}},$$

skąd $B = -U_0 \exp(t_0/RC)$. Podstawiając mamy ostateczne rozwiązanie

$$U(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t-t_0}{RC}}).$$

Układy równań liniowych o stałych współczynnikach.

Jak już wiemy, równania wyższych rzędów można sprowadzać do układów równań pierwszego rzędu. Rozważania prowadzone w tym punkcie dotyczyć więc będą także równań wyższych rzędów. Ograniczymy się do równań o stałych współczynnikach. Ogólna postać takiego równania wygląda następująco:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b(t),$$

gdzie szukana funkcja $x(\cdot)$ oraz $b(\cdot)$ mają wartości w \mathbf{E}^n , a A jest macierzą kwadratową $n \times n$.

Ogólną postać rozwiązania układu jednorodnego łatwo jest zgadnąć:

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

gdzie funkcja wykładnicza zdefiniowana jest przez szereg potęgowy (sprawą zbieżności tego szeregu nie będziemy się zajmowali; można łatwo udowodnić, że wszystko jest w porządku), x_0 jest dowolnym wektorem. Mimo pozornej prostoty, szereg potęgowy nie jest wygodną formą rozwiązania. Można wykazać, że rozwiązanie jest sumą składników postaci $e^{\lambda_i t} P_{n_i-1}(t)$, gdzie λ_i są wartościami własnymi macierzy³ A , n_i – ich krotnościami, a P_{n_i-1} – wielomianami stopnia $n_i - 1$ o wartościach wektorowych. Informacja taka wystarcza do znalezienia ogólnej postaci rozwiązania układu jednorodnego. Zobaczmy to na przykładzie równania oscylatora harmonicznego. Jak widzieliśmy, sprowadza się ono do układu równań liniowych o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obliczamy wartości własne. $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0$, skąd $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -1$. Krotności są równe 1, więc wielomiany są stałymi. Rozwiązania równania jednorodnego można więc szukać w postaci kombinacji liniowej funkcji e^{it} oraz e^{-it} . Ponieważ szukamy rozwiązania rzeczywistego (a ze względu na jednoznaczność rozwiązanie równania o współczynnikach rzeczywistych z rzeczywistym warunkiem początkowym automatycznie jest rzeczywiste), rozwiązania szukamy w postaci

$$x(t) = C \cos t + D \sin t.$$

O zmiennej v możemy w tym momencie zapomnieć, bo pełniła ona tylko rolę pomocniczą.

Układy niejednorodne można rozwiązywać metodą uzmienniania stałej podobną do tej, którą poznaliśmy w przypadku jednego równania. Czasem jednak można zgadnąć rozwiązanie równania niejednorodnego. Doświadczenia dotyczące tego, wśród jakich funkcji poszukiwać rozwiązania, podsumowują następujące reguły, pozwalające na znalezienie rozwiązania układu niejednorodnego, gdy niejednorodność ma postać

$$b(t) = e^{\lambda t} P_k(t).$$

³Dopuszczamy tutaj zespolone wartości własne.

1. Jeżeli λ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A , to rozwiązania szukamy w postaci $e^{\lambda t}Q_k(t)$, gdzie Q_k jest wielomianem tego samego stopnia, co P_k .
2. Jeżeli λ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A o krotności m , to rozwiązania szukamy jako $e^{\lambda t}t^m Q_k(t)$, gdzie Q_k jest wielomianem tego samego stopnia, co P_k .

Podstawą podanej metody zgadywania jest pewne ważne twierdzenie o odwzorowaniach liniowych. Dotyczy ono odwzorowań liniowych w przestrzeniach wektorowych, w których wektory można mnożyć przez liczby zespolone (matematycy używają określenia: przestrzeń nad ciałem liczb zespolonych). Nie trzeba się jednak martwić, że wyjdą nam zespolone rozwiązania równań różniczkowych. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego zachodzą i w przypadku rzeczywistym i w zespolonym. Twierdzenie o istnieniu (rzeczywiste) gwarantuje istnienie rozwiązania, a twierdzenie o jednoznaczności (zespolone) mówi, że to rzeczywiste rozwiązanie jest jedyne.

Niech A będzie odwzorowaniem liniowym n -wymiarowej przestrzeni wektorowej E w tę samą przestrzeń. Oznaczmy przez $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ pierwiastki wielomianu charakterystycznego $\det(A - \lambda I) = 0$, a przez n_1, n_2, \dots, n_k ich krotności. *Prze-strzeńią pierwiastkową* odpowiadającą pierwiastkowi λ_i nazywamy

$$X_i = \{y \in E : (A - \lambda_i)^{n_i} y = 0\}.$$

Oto twierdzenie, o którym była mowa:

Twierdzenie 59 *Każdy wektor $x \in E$ można (i to tylko na jeden sposób) przedstawić w postaci sumy $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$, gdzie $x_i \in X_i$. Ponadto $\dim X_i = n_i$ oraz $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.*

Problem obliczenia $e^{tA}x$ sprowadza się w ten sposób do obliczenia $e^{tA}x_i$ dla $x_i \in X_i$. Okazuje się, że szereg określający funkcję wykładniczą daje się wyrazić przez skończoną sumę. W rachunkach skorzystamy z tego, że jeśli odwzorowania liniowe A i B spełniają warunek $AB = BA$, to $e^{A+B} = e^A e^B$.

$$\begin{aligned} e^{tA}x_i &= e^{t\lambda_i I + t(A - \lambda_i I)}x_i = e^{t\lambda_i}e^{t(A - \lambda_i I)}x_i = e^{t\lambda_i}[I + t(A - \lambda_i I) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda_i I)^2 + \dots]x_i = \\ &= e^{t\lambda_i}[I + t(A - \lambda_i I) + \dots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}(A - \lambda_i I)^{n_i-1}]x_i. \end{aligned}$$

Dalsze wyrazy szeregu można pominąć, ponieważ $0 = (A - \lambda_i I)^n x_i = (A - \lambda_i I)^{n+1} x_i = \dots$

Przyglądając się wyprowadzonemu wzorowi widzimy, że składniki rozwiązania (pamiętamy, że $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$) mają postać wielomianu stopnia $n_i - 1$ mnożonego przez $e^{\lambda_i t}$. Informacja ta wystarcza do sprowadzenia problemu rozwiązywania układu jednorodnego do układu kilku równań liniowych.

Przykład. Rozwiążmy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y\end{aligned}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 2, y(0) = 4$. Równanie charakterystyczne macierzy układu $(2 - \lambda)^2 - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ o krotnościach $n_1 = n_2 = 1$. Wielomiany będą więc zerowego stopnia. Szukamy rozwiązania wśród funkcji o postaci

$$\begin{aligned}x(t) &= Ae^t + Be^{3t} \\ y(t) &= Ce^t + De^{3t}\end{aligned}$$

Podstawiamy do układu równań

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ae^t + 3Be^{3t} = 2Ae^t + 2Be^{3t} + Ce^t + De^{3t} \\ \frac{dy}{dt} &= Ce^t + 3De^{3t} = Ae^t + Be^{3t} + 2Ce^t + 2De^{3t}\end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy e^t i e^{3t} mamy⁴

$$\begin{aligned}A &= 2A + C \\ 3B &= 2B + D \\ C &= A + 2C \\ 3D &= B + 2D.\end{aligned}$$

⁴Gdyby występowały wielomiany, to porównywalibyśmy współczynniki przy każdej potędze z osobna. Uzasadnienie tego postępowania wynika z liniowej niezależności tych układów funkcji. W naszym przypadku to uzasadnienie nie jest tak bardzo potrzebne, bo chcemy znaleźć *jakiś* rozwiązanie, wystarcza nam więc skuteczność metody.

Dolna para równań okazuje się identyczna z górną, czemu nie należy się dziwić, bo λ_i były pierwiastkami wielomianu charakterystycznego. Mamy stąd rozwiązanie ogólne układu

$$\begin{aligned}x(t) &= Ae^t + Be^{3t} \\y(t) &= -Ae^t + Be^{3t}.\end{aligned}$$

Warunek początkowy prowadzi do układu równań na A i B , z którego mamy $A = -1, B = 3$.

Jeśli mamy do czynienia z jednym równaniem różniczkowym wyższego stopnia o stałych współczynnikach, to metodę zgadywania można uprościć, oszczędzając sobie przechodzenia do układu równań pierwszego rzędu. Niech będzie dane równanie

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0,$$

to, jak łatwo można się przekonać, po sprowadzeniu tego równania do układu otrzymamy równanie charakterystyczne

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Możemy takie równanie napisać od razu i szukać rozwiązania w postaci

$$x(t) = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} P_{n_i-1}(t),$$

gdzie λ_i są pierwiastkami równania charakterystycznego, a n_i ich krotnościami. Pamiętajmy przy tym, że w przypadku pierwiastków zespolonych można tak dobrać współczynniki, żeby dostać rozwiązanie rzeczywiste. Sprowadza się to do obserwacji, że zespolone (nierzeczywiste) pierwiastki równania o współczynnikach rzeczywistych zawsze występują parami: jeśli $\lambda = \alpha + i\beta$ jest pierwiastkiem, to $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ też jest pierwiastkiem i krotności są takie same. Ponieważ $\exp[(\alpha + i\beta)t] = \exp(\alpha t)[\cos \beta t + i \sin \beta t]$, w przypadku pierwiastków zespolonych rozwiązania szukamy w postaci iloczynu wielomianu, funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych.

Układ niejednorodny można rozwiązywać metodą uzmienniania stałej zupełnie analogiczną do tej, którą stosujemy w przypadku jednego równania. Przyjrzenie się całkom, które mogą wystąpić w przypadku, gdy niejednorodność jest iloczynem funkcji wykładniczej i wielomianu prowadzi do następującej metody zgadywania:

Jeśli niejednorodność jest postaci $e^{\lambda t}P_j(t)$, gdzie P_j jest wielomianem stopnia j , to w przypadku, gdy λ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego rozwiązania szukamy w postaci $e^{\lambda t}Q_j(t)$, gdzie Q_j jest wielomianem stopnia j , a jeśli λ jest m -krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego – w postaci $t^m e^{\lambda t}Q_j(t)$.

Przedstawimy teraz pewien wariant metody uzmienniania stałej dostosowany do jednego równania wyższego rzędu. Zobaczymy to na przykładzie równania drugiego rzędu. Nie musimy tutaj zakładać, że współczynniki w tym równaniu są stałe, wystarczy znajomość ogólnego rozwiązania równania jednorodnego. Dane jest równanie

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t).$$

Znane jest ogólne rozwiązanie równania jednorodnego

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t).$$

Rozwiązania równania niejednorodnego szukamy w postaci

$$x(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t).$$

Różniczkujemy stronami

$$x' = C_1x_1' + C_2x_2' + C_1'x_1 + C_2'x_2.$$

Nakładamy dodatkowy warunek⁵

$$C_1'x_1 + C_2'x_2 = 0.$$

⁵Czy wolno nałożyć dodatkowy warunek? Jeśli rozwiążemy problem z tym warunkiem, to problem będzie rozwiązany. Trzeba tylko uważać na to, żeby otrzymać wszystkie rozwiązania.

Uwzględniając ten warunek różniczkujemy jeszcze raz. Po dopisaniu tego, co mieliśmy do tej pory mamy

$$\begin{aligned}x &= C_1x_1 + C_2x_2 \\x' &= C_1x'_1 + C_2x'_2 \\x'' &= C_1x''_1 + C_2x''_2 + C'_1x'_1 + C'_2x'_2\end{aligned}$$

Pierwsze z tych równań mnożymy przez a_0 , drugie przez a_1 i wszystkie razem dodajemy stronami. Wyrazy zawierające nie różniczkowane C_1 i C_2 skracają się, ponieważ x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania jednorodnego. Równanie niejednorodne razem z warunkiem dodatkowym daje układ równań

$$\begin{aligned}C'_1x_1 + C'_2x_2 &= 0 \\C'_1x'_1 + C'_2x'_2 &= b.\end{aligned}$$

Traktujemy to jako układ równań na C'_1 i C'_2 . Rozwiązanie go sprowadza problem do całkowania.

Przykład. Stosując metodę uzmienniania stałych, a następnie metodę zgadywania rozwiążemy równanie

$$x'' - 2x' + x = e^t + e^{-t}.$$

Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne. Równanie charakterystyczne możemy napisać od razu

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Mamy do czynienia z jednym pierwiastkiem dwukrotnym $\lambda = 1$. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest więc następujące

$$x(t) = Ce^t + Dte^t.$$

Rozwiązania równania niejednorodnego będziemy szukali w postaci

$$x(t) = C(t)e^t + D(t)te^t.$$

Różniczkujemy stronami

$$x' = Ce^t + De^t + Dte^t + C'e^t + D'te^t.$$

Nakładamy dodatkowy warunek $C'e^t + D'te^t = 0$ i różniczkujemy jeszcze raz

$$x'' = Ce^t + 2De^t + Dte^t + C'e^t + D'(e^t + te^t).$$

Podstawiamy do równania. Razem z warunkiem dodatkowym otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} C'e^t + D'te^t &= 0 \\ C'e^t + D'(e^t + te^t) &= e^t + e^{-t} \end{aligned}$$

Mamy stąd $C' = -t - te^{-2t}$, $D' = 1 + e^{-2t}$. Po scałkowaniu otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego

$$x = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^t + Ee^t + Fte^t,$$

gdzie E i F są dowolnymi stałymi.

Zastosujemy teraz do tego samego równania metodę zgadywania. Zauważmy najpierw, że jeśli niejednorodność ma postać sumy, to wystarczy znaleźć rozwiązania równań niejednorodnych dla każdego ze składników z osobna, a suma tych rozwiązań będzie spełniała dane równanie. Rozwiążemy najpierw równanie

$$x'' - 2x' + x = e^t.$$

Prawa strona ma postać $P_0e^{\lambda t}$, gdzie $P_0 = 1$ jest wielomianem zerowego stopnia, a $\lambda = 1$ jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego. Zgodnie z podaną zasadą, rozwiązania szukamy w postaci $x = t^2Ae^t$. Podstawiając do równania otrzymujemy $A = \frac{1}{2}$, czyli

$$x = \frac{t^2}{2}e^t.$$

Następnie rozwiązujemy równanie

$$x'' - 2x' + x = e^{-t}.$$

Ponieważ -1 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, rozwiązania szukamy w postaci $x = Be^{-t}$. Po podstawieniu mamy $B = \frac{1}{4}$, czyli

$$x = \frac{e^{-t}}{4}.$$

Dodając obydwie rozwiązania oraz rozwiązanie ogólne równania jednorodnego otrzymujemy to samo, co uzyskaliśmy metodą uzmienniania stałych, tylko rachunki były trochę prostsze.

Równanie liniowe wyższego rzędu o stałych współczynnikach

Zajmiemy się tutaj trochę bardziej szczegółowo jednym równaniem liniowym wyższego rzędu o stałych współczynnikach. Ponieważ równania takie sprowadzają się do układów równań pierwszego rzędu, ograniczymy się do opisu metody rozwiązywania. Niech będzie dane równanie:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = b(t).$$

Równanie, w którym $b(t) = 0$ nazywamy *jednorodnym*. Rozwiązanie równania pełnego otrzymuje się rozwiązując najpierw równanie jednorodne. Okazuje się bowiem, że

Ogólne rozwiązanie równania pełnego jest sumą jakiegokolwiek rozwiązania równania niejednorodnego i ogólnego rozwiązania równania jednorodnego.

Rozwiązywanie równania jednorodnego. Technika rozwiązywania równania jednorodnego jest następująca:

1. Tworzymy równanie charakterystyczne. Otrzymuje się je podstawiając λ^k zamiast $x^{(k)}$. Przykład: dla równania $x'' + 4x' + 4x = 0$ równaniem charakterystycznym jest $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$.
2. Rozwiązujemy równanie charakterystyczne. W naszym przykładzie będziemy mieli pierwiastek podwójny $\lambda = -2$.

3. Piszemy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego. Jeżeli λ_j jest k -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to rozwiązanie zawiera składnik

$$P_{k-1}(t)e^{\lambda_j t},$$

gdzie P_{k-1} jest dowolnym wielomianem stopnia $k-1$. W naszym przykładzie jest tylko jeden pierwiastek $\lambda = -2$, za to podwójny, ogólne rozwiązanie równania jednorodnego jest więc następujące:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-2t}.$$

Jeszcze dwa przykłady ilustrujące problemy, z którymi możemy się spotkać. Jeżeli równanie charakterystyczne (po rozłożeniu wielomianu na czynniki) ma postać

$$\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 2)^3 = 0,$$

to rozwiązanie ogólne równania jednorodnego wygląda tak oto:

$$x(t) = A + Bt + Ce^t + (D + Et + Ft^2)e^{-2t}.$$

Inna sprawa, jeżeli równanie charakterystyczne ma pierwiastki zespolone. Funkcja $e^{\lambda t}$ przybiera wtedy wartości zespolone, a nas interesują rozwiązania rzeczywiste (istnienie których gwarantowane jest przez odpowiednie twierdzenie). Ze względu na to, że wielomian charakterystyczny ma współczynniki rzeczywiste, jeśli λ jest nierzeczywistym pierwiastkiem, to także sprzężona do niego liczba $\bar{\lambda}$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego i to o tej samej krotności. Zbierając razem wyrazy zawierające $e^{\lambda t}$ i $e^{\bar{\lambda}t}$, mamy dla k -krotnego pierwiastka $\lambda = \alpha + i\beta$ rozwiązanie w postaci rzeczywistej:

$$x(t) = e^{\alpha t}[P_{k-1}(t) \sin \beta t + Q_{k-1}(t) \cos \beta t].$$

Dwa przykłady dotyczące oscylatora harmonicznego. Przyjmujemy następujące oznaczenia: $\omega^2 = k/m$, $\alpha = \gamma/m$.

1. Oscylator harmoniczny bez tłumienia. Równanie wygląda następująco:

$$x'' = -\omega^2 x.$$

Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 = -\omega^2$ ma dwa pierwiastki $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$. Pierwiastki te są jednokrotne i tworzą parę liczb sprzężonych. Wobec tego rozwiązanie ogólne jest następujące:

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

2. Tłumiony oscylator harmoniczny.

$$x'' = -\omega^2 x - \alpha x'.$$

Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 = -\omega^2 - \alpha\lambda$. Rozwiązujemy to równanie: $\Delta = \alpha^2 - 4\omega^2$. Widać, że trzeba rozróżnić trzy przypadki:

- (a) Małe tłumienie

$$\Delta < 0, \text{ czyli } \alpha^2 < 4\omega^2.$$

Wtedy

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4\omega^2 - \alpha^2},$$

a rozwiązanie ogólne ma postać:

$$x(t) = e^{-t\alpha/2} \left[A \sin(t\sqrt{4\omega^2 - \alpha^2}/2) + B \cos(t\sqrt{4\omega^2 - \alpha^2}/2) \right].$$

- (b) Przypadek graniczny

$$\Delta = 0, \text{ czyli } \alpha^2 = 4\omega^2.$$

Wtedy

$$\lambda = -\alpha/2$$

jest pierwiastkiem podwójnym. Rozwiązanie ogólne ma w tym przypadku postać:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-t\alpha/2}.$$

(c) Duże tłumienie

$$\Delta > 0, \text{ czyli } \alpha^2 > 4\omega^2.$$

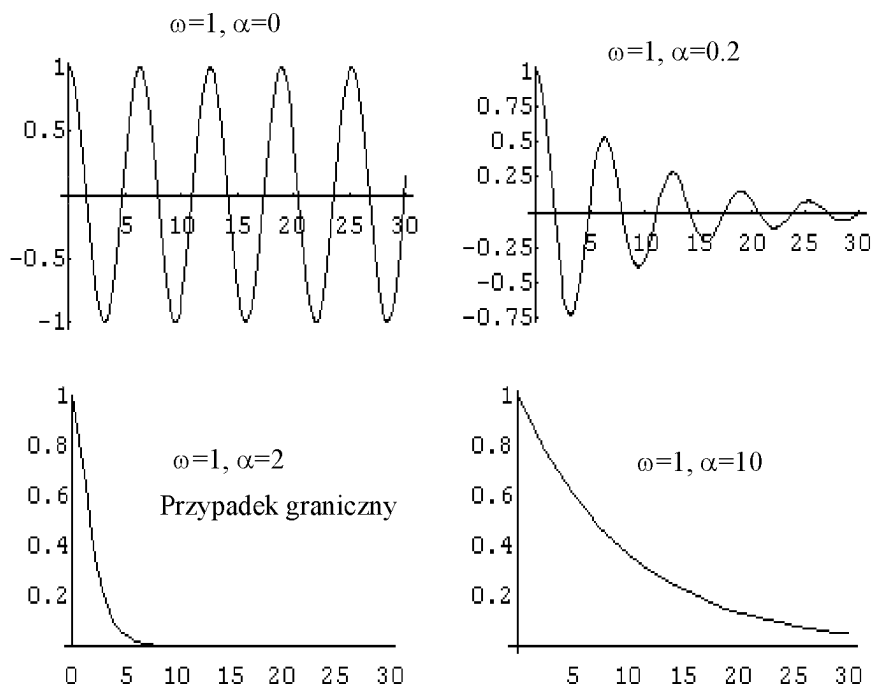
Mamy dwa pojedyncze pierwiastki rzeczywiste

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}}{2}.$$

Rozwiązanie jest wobec tego następujące:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{\frac{t}{2}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2})} + Be^{\frac{t}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2})}.$$

Przypadki te ilustruje rysunek. Dla określoności przyjęliśmy jako warunki początkowe $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Bierzemy $\omega = 1$ a $\alpha = 0, 0.2, 2$ (przypadek graniczny) oraz 10.



Równania niejednorodne. Dokładniejsze przyjrzenie się wzorom, które otrzymuje się metodą uzmienniania stałej pozwala na zgadnięcie rozwiązania, o ile niejednorodność równania jest dosyć prosta. Omówimy tutaj te obserwacje. Streszczają się one w następujących dwóch zasadach:

1. Jeśli niejednorodność jest sumą kilku składników, to rozwiązanie jest sumą rozwiązań związanych z każdym z tych składników.
2. Jeżeli niejednorodność jest postaci

$$P_k(t)e^{\lambda t},$$

to:

- (a) Gdy λ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, znajdziemy rozwiązanie w postaci

$$Q_k(t)e^{\lambda t};$$

- (b) Jeżeli λ jest m -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to rozwiązanie znajdziemy w postaci

$$t^m Q_k(t)e^{\lambda t}.$$

Zasady te nie są sformułowane zbyt precyzyjnie, ale wszystko wyjaśni się na przykładach.

Przykłady.

1.

$$x'' - 5x' + 6x = te^{-t}.$$

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ma pierwiastki $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Liczba -1 nie jest żadnym z nich, wobec czego rozwiązania poszukujemy w postaci

$$x(t) = (A + Bt)e^{-t}.$$

Podstawiamy to do równania:

$$-2Be^{-t} + (A+Bt)e^{-t} - 5Be^{-t} + 5(A+Bt)e^{-t} + 6(A+Bt)e^{-t} = te^{-t}.$$

Po uproszczeniu i podzieleniu przez e^{-t} , porównując współczynniki przy tych samych potęgach, mamy układ równań

$$\begin{aligned} -7B + 12A &= 0, \\ 12B &= 1. \end{aligned}$$

Wobec tego $A = \frac{7}{144}$, $B = \frac{1}{12}$. Znaleźliśmy w ten sposób rozwiązanie szczególne $x(t) = (\frac{7}{144} + \frac{1}{12}t)e^{-t}$. Dodajemy do niego rozwiązanie ogólne równania jednorodnego i mamy

$$x(t) = (\frac{7}{144} + \frac{1}{12}t)e^{-t} + Ce^{2t} + De^{3t}.$$

2.

$$x'' - 5x' + 6x = te^{-t} + 6.$$

Niejednorodność jest sumą dwóch składników, należy więc rozwiązać dwa równania, a rozwiązania dodać. Pierwszą część przy już wykonaliśmy w poprzednim przykładzie, pozostało więc rozwiązanie równania

$$x'' - 5x' + 6x = 6.$$

Niejednorodność jest iloczynem wielomianu stopnia zerowego i funkcji wykładniczej e^{0t} . Ponieważ 0 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, rozwiązania będziemy szukali w postaci Ae^{0t} , czyli w postaci $x(t) = A$. Po podstawieniu dostajemy $A = 1$, co razem z rozwiązaniem otrzymanym w poprzednim przykładzie daje

$$x(t) = (\frac{7}{144} + \frac{1}{12}t)e^{-t} + 1 + Ce^{2t} + De^{3t}.$$

3.

$$x'' - 5x' + 6x = e^{2t}.$$

Przykład ten różni się od poprzednich tym, że 2 (to, co stoi przy t w wykładniku funkcji e^{2t}) jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Ponieważ jest pierwiastkiem jednokrotnym, więc rozwiązania będziemy szukali w postaci tAe^{2t} (wielomian przy funkcji wykładniczej w prawej stronie równania jest stopnia zerowego). Podstawiając do równania mamy $A = -1$, co razem z rozwiązaniem równania jednorodnego daje

$$x(t) = -te^{2t} + Ce^{2t} + De^{3t}.$$

4.

$$x'' + 4x' + 4x = 2e^{-2t}.$$

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ ma jeden pierwiastek $\lambda = 2$, za to podwójny. Ponieważ właśnie -2 występuje w wykładniku prawej strony równania, rozwiązanie szczególne znajdziemy w postaci $x(t) = t^2Ae^{-2t}$. Podstawiając przekonujemy się, że $A = 1$, wobec czego rozwiązanie ogólne jest następujące:

$$x(t) = t^2e^{-2t} + (C + Dt)e^{-2t}.$$

5.

$$x'' - x = \sin t.$$

Sinus zawiera funkcje wykładnicze e^{it} i e^{-it} , Należy więc sprawdzić, czy $\pm i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego $\lambda^2 - 1 = 0$. Na szczęście nie jest, będziemy więc szukali rozwiązania w postaci

$$x(t) = A \sin t + B \cos t.$$

(taka właśnie postać wynika stąd, że ma to być rzeczywista kombinacja funkcji e^{it} i e^{-it}). Podstawiając otrzymujemy $A = -1$, $B = 0$. Rozwiązanie ogólne równania jest więc następujące:

$$x(t) = -\sin t + Ce^t + De^{-t}.$$

6.

$$x'' + x = \sin t.$$

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 + 1 = 0$ ma pierwiastki $\lambda = \pm i$, rozwiązania musimy więc szukać w postaci

$$x(t) = t(A \sin t + B \cos t).$$

Stwierdzamy, że $A = 0$, $B = -1$, wobec czego rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = -t \cos t + C \sin t + D \cos t.$$

7.

$$x'' + x = 5e^t \sin t.$$

Prawa strona równania zawiera funkcje wykładnicze $e^{(1 \pm i)t}$, a liczby $1 + i$ oraz $1 - i$ nie są pierwiastkami równania charakterystycznego. Rozwiązania szukamy więc w postaci

$$x(t) = e^t(A \sin t + B \cos t).$$

Podstawiając znajdujemy $A = 1$, $B = -2$. Rozwiązanie ogólne jest więc następujące:

$$x(t) = e^t(\sin t - 2 \cos t) + C \sin t + D \cos t.$$

8. Równanie oscylatora harmonicznego z tłumieniem i siłą wymuszającą

$$x'' = -\omega_0^2 x - \alpha x' + F \sin \omega t.$$

Równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 + \alpha \lambda + \omega_0^2 = 0$$

było badane wcześniej. Jeśli $\alpha \neq 0$, to $\pm i\omega$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Wobec tego dla $\alpha \neq 0$ szukamy rozwiązania szczególnego w postaci

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

Po podstawieniu i rozwiązaniu układu równań mamy ⁶

$$A = \frac{F(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \alpha^2 \omega^2},$$
$$B = \frac{F\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \alpha^2 \omega^2}.$$

⁶Czytelnik zechce sprawdzić, czy nie ma pomyłki.

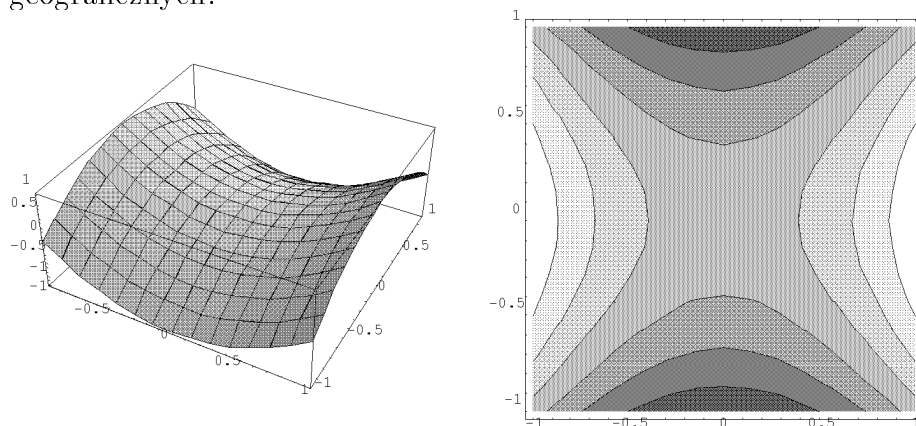
Rozdział 4

Funkcje wielu zmiennych

4.1 Rachunek różniczkowy



Aby przybliżyć sobie przedmiot naszych rozważań obejrzyjmy najpierw najczęściej stosowane sposoby graficznego przedstawiania funkcji dwóch zmiennych. Pierwszy z nich, *rysunek trójwymiarowy* nie wymaga objaśnień, jest analogiczny do wykresów funkcji jednej zmiennej. Drugi sposób, *poziomice* spotykamy często na mapach. Funkcja, o którą tam chodzi, podaje wysokość (w stosunku do poziomu morza) punktów powierzchni ziemi w zależności od ich współrzędnych geograficznych.



Dwa sposoby graficznego przedstawiania funkcji $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Funkcję wielu zmiennych można traktować jako funkcję jednej zmiennej należącej do przestrzeni wielowymiarowej. Jest to zabieg czysto formalny, ale przynosi konkretne korzyści polegające na wyraźniejszym wskazaniu podobieństw i różnic między własnościami funkcji jednej i wielu zmiennych. Zauważmy, że funkcja $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$ to układ m funkcji n zmiennych: $(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$.



4.1.1 Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych

Dlaczego zajmujemy się ciągłością funkcji wielu zmiennych? Powinno tutaj, jak się wydaje, wystarczyć to, co było powiedziane o ciągłości funkcji jednej zmiennej z tą modyfikacją, że zbieżność ciągu liczb rzeczywistych zastępuje się zbieżnością ciągu punktów przestrzeni \mathbf{E}^n . Mówimy, że ciąg (p_k) , $p_k \in \mathbf{E}^n$ jest zbieżny do $p_0 \in \mathbf{E}^n$, jeżeli $\|p_k - p_0\| \rightarrow 0$. Powiemy więc, że funkcja $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła w punkcie p_0 , jeśli dla każdego ciągu $p_n \rightarrow p_0$ zachodzi $f(p_n) \rightarrow f(p_0)$. Równoważna, jak pamiętamy, definicja Cauchy'ego przybierze postać:

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{p: \|p-p_0\| < \delta} |f(p) - f(p_0)| < \epsilon.$$

Dla funkcji $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^k$ definicja ciągłości Cauchy'ego będzie wyglądała tak:

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{p: \|p-p_0\| < \delta} \|f(p) - f(p_0)\| < \epsilon.$$

Sprawa nie jest jednak tak prosta, jak to się na pierwszy rzut oka wydaje. Zbadajmy ciągłość funkcji określonej wzorami $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$ oraz $f(0, 0) = 0$. Wątpliwość może budzić oczywiście tylko ciągłość w punkcie $(0, 0)$. Stosując metody znajdowania granic funkcji jednej zmiennej łatwo możemy stwierdzić, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0 = f(0, 0).$$

Mogłoby się wydawać, że oznacza to ciągłość funkcji f w punkcie $(0, 0)$. Tak jednak nie jest. Aby to zobaczyć, weźmy ciąg $p_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})$. Łatwo sprawdzić, że $p_k \rightarrow (0, 0)$, a $f(p_k) = \frac{1}{2}$ wcale nie dąży do $f(0, 0) = 0$. Nieciągłość funkcji f odpowiedzialna jest za dziwny wygląd rysunków

przedstawiających tę funkcję w okolicy punktu $(0,0)$. Badanie ciągłości funkcji wielu zmiennych i znajdowanie ich granic jest na ogół trudniejszym zadaniem niż w przypadku funkcji jednej zmiennej.

4.1.2 Pochodna funkcji wielu zmiennych



Przypomnijmy sobie najpierw jedną z równoważnych definicji pochodnej funkcji jednej zmiennej. Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazwalismy taką liczbę a , że reszta $r(x_0, h)$ zdefiniowana za pomocą rozkładu

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + r(x_0, h)$$

spełnia warunek

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0, h)}{h} = 0.$$

Definicja tego typu daje się uogólnić na przypadek funkcji $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$. Trzeba tylko zmodyfikować dwie rzeczy:

- Liczbę a zastępuje się odwzorowaniem liniowym $A : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$.
- W warunku nałożonym na resztę $r(x_0, h)$ w mianowniku zamiast h pisze się $\|h\|$.

Definicja 25 Funkcję $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$ nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0 , jeżeli istnieje odwzorowanie liniowe $A : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$ takie, że reszta $r(x_0, h)$ zdefiniowana zapomocą rozkładu

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + r(x_0, h)$$

spełnia warunek

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0, h)}{\|h\|} = 0.$$

Tak samo, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej o wartościach liczbowych stwierdzamy, że A , jeżeli istnieje, to jest tylko jedno. A nazywamy pochodną funkcji f i oznaczamy, jak to czyniliśmy dotychczas, $f'(x_0)$. Ponieważ pochodna jest odwzorowaniem liniowym \mathbf{E}^n w \mathbf{E}^m , narzuca się pytanie o macierz tego odwzorowania, zwaną *macierzą Jacobiego*. Zanim się tym zajmiemy, przytoczymy twierdzenie o pochodnej złożenia dwóch odwzorowań.

Twierdzenie 60 *Niech $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$ będzie różniczkowalna w punkcie x_0 , a $g : \mathbf{E}^m \rightarrow \mathbf{E}^k$ będzie różniczkowalna w punkcie $f(x_0)$. Wtedy $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Zwróćmy tutaj uwagę na to, że po prawej stronie równości występuje składanie odwzorowań liniowych, któremu odpowiada mnożenie macierzy.

Pochodne kierunkowe i cząstkowe, macierz Jacobiego, gradient

Punktem wyjścia do znalezienia macierzy $f'(x_0)$ jest obserwacja, że kolumny macierzy (w bazach kanonicznych) otrzymuje się działając tą macierzą na wektory bazy kanonicznej. Trzeba więc zobaczyć, jakie są współrzędne wektorów $f'(x_0)e_i$; $i = 1, \dots, n$. Pomocne nam będzie pojęcie pochodnej kierunkowej.

Definicja 26 *Niech $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$, $x_0 \in \mathbf{E}^n$, $v \in \mathbf{E}^n$. Rozważamy funkcję $\varphi : \mathbf{E}^1 \rightarrow \mathbf{E}^m$ określoną wzorem*

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv).$$

Jeśli φ jest różniczkowalna w punkcie $t = 0$, to mówimy, że f posiada w punkcie x_0 pochodną kierunkową w kierunku v . Wprowadzamy oznaczenie

$$\nabla_v f(x_0) := \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=0}.$$

Pochodną kierunkową w kierunku i -tego wektora bazy kanonicznej e_i nazywamy pochodną cząstkową i i oznaczamy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

Z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej mamy natychmiast wniosek.

Twierdzenie 61 *Jeżeli $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$ jest różniczkowalna w x_0 , to posiada w x_0 pochodną kierunkową w każdym kierunku. Zachodzi przy tym wzór*

$$\nabla_v f(x_0) = f'(x_0)v.$$

Mamy teraz narzędzia wystarczające do znalezienia macierzy $f'(x_0)$. Na podstawie ostatniego twierdzenia i -ta kolumna macierzy $f'(x_0)$ jest równa $\nabla_{e_i} f(x_0)$, czyli $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Przyjrzenie się definicji pochodnej kierunkowej pozwala dostrzec, że pochodną cząstkową oblicza się różniczkując f po i -tej zmiennej, przy czym pozostałe zmienne traktuje się jak stałe. Podsumowując, jeśli $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$ opisuje układ funkcji $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$, to pochodna f' ma macierz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Zajmiemy się teraz szczególnym przypadkiem — funkcjami o wartościach liczbowych. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 . Zgodnie z Definicją 24, mamy rozkład

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(x_0, h).$$

Tak, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, $f'(x_0)h$ nazywamy *różniczką* funkcji f odpowiadającą przyrostowi h zmiennej niezależnej. W obecnym przypadku $f'(x_0)$ jest odwzorowaniem liniowym $\mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Wiemy, że (II semestr, Twierdzenie 50) odwzorowanie takie jest mnożeniem skalarnym wektora h przez pewien wektor. Wektor ten będziemy nazywali *gradientem* funkcji f w punkcie x_0 . Najczęściej stosowane oznaczenia gradientu to $\nabla f(x_0)$ oraz $\text{grad} f(x_0)$. Gradient zdefiniowany jest więc przez równanie

$$f'(x_0)h = (\nabla f(x_0)|h).$$

Współrzędne gradientu w bazie kanonicznej znajdziemy po zapisaniu $f'(x_0)h$ za pomocą współrzędnych.

$$f'(x_0)h = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n.$$

Widać, że wyrażenie to jest równe iloczynowi skalarnemu wektora h z wektorem o współrzędnych $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. To są właśnie współrzędne gradientu funkcji f .

Jaka jest interpretacja geometryczna gradientu? Aby wyjaśnić tę sprawę sprecyzujemy pojęcie poziomiczy, wspomniane na początku tego rozdziału. *Poziomicą* funkcji f odpowiadającą danemu $c \in \mathbf{R}$ będziemy nazywali zbiór $\{x \in \mathbf{E}^n : f(x) = c\}$. Weźmy funkcję różniczkowalną $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{E}^n$ o wartościach na którejś poziomiczy. Wtedy $f(g(t))$ przyjmuje stale tę samą wartość, skąd, oznaczając $x_0 = f(t_0)$ oraz $v = g'(t_0)$ mamy

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f(g(t)) \right|_{t=t_0} = f'(x_0)g'(t_0) = (\nabla f(x_0)|v).$$

Jeśli $g(\cdot)$ będziemy uważali za opis ruchu punktu materialnego po poziomiczy, to v jest prędkością chwilową w momencie przechodzenia przez punkt x_0 . Wyprowadzona powyżej własność gradientu bywa w związku z tym, trochę nieprecyzyjnie, formułowana następująco:

Gradient jest prostopadły do poziomiczy.

Zwrot i długość gradientu znajdziemy badając różniczkę funkcji f . Oznaczmy przez φ kąt między gradientem f a przyrostem zmiennej niezależnej h . Jeśli zaniedbamy resztę $r(x_0, h)$, przyrost wartości funkcji będzie równy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h = (\nabla f(x_0)|h) = \|\nabla f(x_0)\| \|h\| \cos \varphi.$$

Widać stąd, że przy danej długości $\|h\|$, przyrost wartości funkcji jest największy, jeśli $\cos \varphi = 1$, czyli wtedy, gdy $\varphi = 0$, co oznacza, że gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji¹. Długość gradientu jest w przybliżeniu równa $\frac{1}{\|h\|}[f(x_0 + h) - f(x_0)]$ (zaniedbaliśmy resztę!), gdzie h ma ten sam kierunek i zwrot, co gradient f .

Przybliżanie przyrostu funkcji przez różniczkę występuje czasem pod nazwą *metoda różniczki zupełnej*. Zapiszemy to przybliżenie za pomocą trochę innych oznaczeń:

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

¹Obserwacja ta jest punktem wyjścia pewnych metod szukania ekstremów funkcji.

Sformułujemy teraz warunek konieczny istnienia lokalnego ekstremum funkcji wielu zmiennych.

Twierdzenie 62 (WARUNEK KONIECZNY EKSTREMUM) *Jeżeli funkcja $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i ma w tym punkcie lokalne ekstremum, to $\nabla f(x_0) = 0$.*

Aby przekonać się o prawdziwości tego twierdzenia weźmy dowolny wektor $v \in \mathbf{E}^n$ i rozpatrzmy pomocniczą funkcję jednej zmiennej określoną wzorem $g(t) = f(x_0 + tv)$. Funkcja ta jest różniczkowalna w punkcie $t = 0$ i ma w tym punkcie lokalne ekstremum. Wobec tego

$$0 = g'(0) = f'(x_0)v = (\nabla f(x_0)|v).$$

Ponieważ warunek powyższy jest spełniony dla dowolnego v , możemy stwierdzić, że $\nabla f(x_0) = 0$.

Do sformułowania warunku wystarczającego potrzebne nam będą pochodne wyższych rzędów. Ze względu na to, że pochodne wyższych rzędów są obiektami dość skomplikowanych typów ograniczymy się do pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Wystarczy to do sformułowania twierdzenia, o które nam chodzi.

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu są to pochodne cząstkowe pierwszych pochodnych cząstkowych. Stosuje się następujące oznaczenie:

$$\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_j})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów, o ile są ciągłe, mają interesującą własność symetrii.

Twierdzenie 63 *Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu ciągłe w otoczeniu punktu x , to*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że wystarczy rozważyć przypadek funkcji dwóch zmiennych. Dla większej przejrzystości zapisu współrzędne punktu, o którym mowa w twierdzeniu, oznaczymy literami x i y . Weźmy dwie dostatecznie małe liczby rzeczywiste h i k i rozważmy wyrażenie

$$\begin{aligned} A(h, k) &= \frac{1}{hk} [f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)] \\ &= \frac{1}{hk} \{ [f(x+h, y+k) - f(x, y+k)] - [f(x+h, y) - f(x, y)] \} \\ &= \frac{1}{hk} \{ [f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] - [f(x, y+k) - f(x, y)] \}. \end{aligned}$$

Wprowadzamy oznaczenia

$$F(y) = f(x+h, y) - f(x, y),$$

$$G(x) = f(x, y+k) - f(x, y).$$

Mamy

$$A(h, k) = \frac{1}{hk} [F(y+k) - F(y)] = \frac{1}{hk} [G(x+h) - G(x)].$$

Na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej mamy

$$F(y+k) - F(y) = kF'(y+\theta k), \quad 0 < \theta < 1$$

oraz

$$G(x+h) - G(x) = hG'(x+\eta h), \quad 0 < \eta < 1.$$

Podstawiając mamy

$$A(h, k) = \frac{1}{h} F'(y+\theta k) = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+\theta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta k) \right].$$

Jeszcze raz stosujemy twierdzenie Lagrange'a, tym razem do funkcji $\Phi(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta k)$.

$$A(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\theta' h, y+\theta k).$$

Na mocy ciągłości pochodnych cząstkowych

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} A(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Biorąc w rachunkach rozkład $A(h,k)$ uwzględniający funkcję G stwierdzimy, że

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} A(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

To kończy dowód. Przy okazji znaleźliśmy praktyczny przybliżony wzór na pochodne cząstkowe drugiego rzędu.

□

Do badania ekstremów potrzebny nam będzie wzór Taylora. Ograniczymy się do wyrazów zawierających pochodne najwyżej drugiego rzędu i nie będziemy próbowali znaleźć wzoru na resztę. Niech $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją dostatecznie wiele razy różniczkowalną w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbf{E}^n$. Bierzemy $h \in \mathbf{E}^n$ i tworzymy pomocniczą funkcję jednej zmiennej $g(t) = f(x_0 + th)$. Dla funkcji g mamy wzór Taylora

$$g(t) = g(0) + t \cdot g'(0) + \frac{t^2}{2} g''(0) + r.$$

Obliczamy $g''(0)$:

$$g''(0) = \left. \frac{d}{dt} g'(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + th) h_i \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) h_i h_j.$$

Twierdzenie 64 (WZÓR TAYLORA) Niech $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ma ciągłe pochodne do drugiego rzędu włącznie w pewnym otoczeniu punktu x_0 . Wtedy

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j + R_2(x_0, h),$$

gdzie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_2(x_0, h)}{\|h\|^2} = 0.$$

Dowód, trochę bardziej skomplikowany, niż się to wydaje, pomijamy.

Zanim przejdziemy do warunków wystarczających na istnienie lokalnego ekstremum przytoczymy pewne potrzebne tutaj twierdzenie z dziedziny algebry. Chodzi o to, że człon wzoru Taylora zawierający drugie pochodne cząstkowe ma postać $Q(h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j$. Takiego rodzaju funkcje, zwane *formami kwadratowymi* spotkaliśmy przy klasyfikacji krzywych i powierzchni drugiego stopnia. Macierz (a_{ij}) nazywamy macierzą formy kwadratowej Q .

Definicja 27 *Mówimy, że forma kwadratowa Q jest*

dodatnio określona, jeśli $Q(h) > 0$ dla każdego $h \neq 0$.

ujemnie określona, jeśli $Q(h) < 0$ dla każdego $h \neq 0$.

nieokreślona, jeśli przybiera zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne.

Zauważmy, że klasyfikacja ta nie wyczerpuje wszystkich możliwości. Jeśli znane są wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ macierzy (a_{ij}) , to na podstawie Twierdzenia 57 (II semestr) wiemy, że w odpowiednio dobranej bazie forma Q ma postać $Q(h) = \sum_i \lambda_i h_i^2$. Widać stąd, że forma Q jest dodatnio określona, jeżeli wszystkie wartości własne jej macierzy są dodatnie, ujemnie określona, jeśli wszystkie są ujemne, a nieokreślona, jeżeli występują wartości własne różnych znaków. W klasyfikacji nie zmieściły się przypadki, gdy niektóre wartości własne są równe zeru, a pozostałe są wszystkie dodatnie albo wszystkie ujemne. Obliczanie wartości własnych jest na ogół trudne pod względem rachunkowym, znacznie wygodniejsze jest następujące kryterium sprowadzające sprawę do obliczania kilku wyznaczników.

Niech (a_{ij}) , $i, j = 1, \dots, n$ będzie macierzą $n \times n$. *Minorem głównym rzędu $k \leq n$ tej macierzy nazywamy wyznacznik macierzy powstałej po usunięciu z niej wierszy i kolumn o numerach większych niż k .*

Twierdzenie 65 *Dana jest forma kwadratowa Q określona wzorem $Q(h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j$. Oznaczmy przez Δ_k minor główny rzędu k macierzy (a_{ij}) . Forma Q jest*

1. dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta_k > 0$ dla każdego $k = 1, \dots, n$.
2. ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^k \Delta_k > 0$ dla każdego $k = 1, \dots, n$.

Twierdzenie 66 (O EKSTREMACH FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH)
 Niech funkcja $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$ posiada drugie pochodne cząstkowe ciągłe w pewnym otoczeniu $x_0 \in \mathbf{E}^n$. Niech ponadto $\nabla f(x_0) = 0$. Wtedy

1. Jeśli forma kwadratowa $\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$ jest dodatnio określona, to f ma w x_0 lokalne minimum.
2. Jeśli forma kwadratowa $\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$ jest ujemnie określona, to f ma w x_0 lokalne maksimum.
3. Jeśli forma kwadratowa $\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$ jest nieokreślona, to f nie ma w x_0 lokalnego ekstremum.

Dowód, podobny do tego, co mieliśmy w przypadku funkcji jednej zmiennej, pomijamy.

Zobaczmy, jak wygląda zastosowanie tego kryterium do funkcji dwóch zmiennych. Zmienne oznaczamy przez x, y . Najpierw trzeba rozwiązać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi x, y : $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dla każdego z rozwiązań badamy minory główne macierzy drugiej pochodnej

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Jeżeli $\Delta_2 > 0$, to jest ekstremum, przy czym dla $\Delta_1 > 0$ jest to minimum, a dla $\Delta_1 < 0$ maksimum. Jeśli $\Delta_2 < 0$, to wartości własne macierzy drugiej pochodnej mają różne znaki (wyznacznik macierzy jest iloczynem jej wartości własnych), a więc nie ma ekstremum. Jeśli $\Delta_2 = 0$, to pytanie o ekstremum pozostaje nierozstrzygnięte.

Bardzo ważnym narzędziem w rachunku różniczkowym funkcji jednej zmiennej jest twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. W następnym punkcie potrzebne nam będzie jego uogólnienie na przypadek

funkcji $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$. Uogólnienie takie łatwo jest sformułować, ale dla nas nie będzie przydatne, bo jest nieprawdziwe. Prawdziwa jest następująca, słabsza postać:

Twierdzenie 67 *Niech $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$ będzie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbf{E}^n$. Niech odcinek $[x_0, x_0 + h] = \{x_0 + th : 0 \leq t \leq 1\}$ będzie zawarty w tym otoczeniu. Załóżmy, że A jest taką liczbą, że dla każdego $x \in [x_0, x_0 + h]$ zachodzi nierówność $\|f'(x)h\| \leq A\|h\|$.*

Wtedy

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq A\|h\|.$$

Dowód tej nierówności polega na sprowadzeniu do funkcji jednej zmiennej o wartościach liczbowych. Weźmy $v \in \mathbf{E}^m$ i rozważmy funkcję $g(t) = (v|f(x_0 + th))$. Funkcja g jest na pewno określona dla $t \in [0, 1]$ i spełnia na tym odcinku założenia twierdzenia Lagrange'a. Wobec tego istnieje $c \in]0, 1[$ takie, że $g(1) - g(0) = g'(c)$. Po podstawieniu mamy $|(v|f(x_0 + h) - f(x_0))| = |(v|f'(x_0 + ch)h)| \leq \|v\| \|f'(x_0 + ch)h\| \leq \|v\| A\|h\|$. Biorąc jako v wektor o tym samym kierunku i zwrocie, co $f(x_0 + h) - f(x_0)$ otrzymujemy dowodzoną nierówność. \square

4.1.3 Lokalna odwracalność, funkcje uwikłane, ekstrema związane

Dany mamy układ n równań z n niewiadomymi x_1, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= y_1, \\ &\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= y_n. \end{aligned}$$

Pytamy o to, czy taki układ ma jednoznaczne rozwiązanie, oraz o to, co stanie się z rozwiązaniem, gdy nieznacznie zmienimy y_1, \dots, y_n stojące po prawej stronie równań. Przeformułujemy i zmodyfikujemy to pytanie, aby można było zastosować metody rachunku różniczkowego. Zauważmy najpierw, że mamy do czynienia z funkcją $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$, a układ równań przybiera postać:

$$f(x) = y.$$

Modyfikacja postawionego pytania jest konieczna z następujących powodów:

- Pytanie o istnienie rozwiązania w takiej ogólności jest bardzo trudne. Zamiast tego założymy, że dane jest rozwiązanie x_0 dla pewnego y_0 , to znaczy, że $f(x_0) = y_0$. Będziemy pytali o istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania $f(x) = y$ dla y dostatecznie bliskich y_0 .
- Metoda rachunku różniczkowego związana jest z przybliżaniem danego odwzorowania przez odwzorowania liniowe. Przybliżanie takie jest dobre w dostatecznie małym otoczeniu danego punktu. W związku z tym będziemy interesowali się tylko tymi rozwiązaniami równania $f(x) = y$, które leżą dostatecznie blisko x_0 .

W rezultacie mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 68 (O LOKALNEJ ODWRACALNOŚCI) *Niech $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$ ma ciągłą pochodną w pewnym otoczeniu x_0 . Niech $y_0 = f(x_0)$. Niech ponadto*

$$\det f'(x_0) \neq 0.$$

Wtedy istnieje takie otoczenie U punktu x_0 oraz otoczenie V punktu y_0 , że dla każdego $y \in V$ istnieje dokładnie jedno $x \in U$ takie, że $f(x) = y$. Jeśli g oznacza otrzymane w taki sposób odwzorowanie $y \mapsto x$, to g jest różniczkowalne oraz

$$g'(0) = (f'(0))^{-1}.$$

Zamiast dowodu przedstawimy tutaj tylko pewien argument o charakterze przybliżonym. Weźmy dostatecznie małe $h \in \mathbf{E}^n$. Wtedy

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h = y_0 + f'(x_0)h.$$

Niech będzie dane y , mało różniące się od y_0 . Oznaczmy $k = y - y_0$. Przybliżone równanie przybiera postać

$$f'(x_0)h = k.$$

Równanie to ma, jak wiemy, jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnego k , jeśli $\det f'(x_0) \neq 0$, co założyliśmy.

Dla ilustracji przyjrzymy się wzorom wprowadzającym na płaszczyźnie biegunowy układ współrzędnych. Mamy tu do czynienia z odwzorowaniem $\mathbf{E}^2 \ni (r, \varphi) \mapsto (x, y) \in \mathbf{E}^2$ określonym wzorami

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi\end{aligned}$$

Znajdujemy macierz Jacobiego

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Wyznacznik macierzy Jacobiego, zwany jakobianem, jest równy r . Założenia twierdzenia o lokalnej odwracalności są spełnione, o ile $r \neq 0$. Dla $r = 0$ mamy $x = y = 0$ niezależnie od φ , nie ma więc mowy o odwracalności tego odwzorowania w jakimkolwiek otoczeniu punktu $(0, \varphi)$. Dla $r \neq 0$ odwzorowanie również nie jest odwracalne, bo przyjmuje te same wartości w punktach (r, φ) i $(r, \varphi + n2\pi)$. Nie ma się czemu dziwić, bo twierdzenie ma charakter lokalny. Jeśli mamy punkt (r_0, φ_0) , taki, że $r_0 \neq 0$, to wystarczy wziąć jego dostatecznie małe otoczenie, aby po ograniczeniu się do tego otoczenia mieć wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie na pewne otoczenie punktu $(r_0 \cos \varphi_0, r_0 \sin \varphi_0)$. Najczęściej bywa stosowane ograniczenie $r > 0, 0 < \varphi < 2\pi$ związane z interpretacją geometryczną. Określone w ten sposób odwzorowanie jest globalnie odwracalne, ale zbiór jego wartości nie jest całą płaszczyzną.

W przestrzeni trójwymiarowej bardzo często przydają się dwa układy współrzędnych: sferyczny i walcowy. Wprowadza się je przy użyciu wzorów:

1. Układ sferyczny

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\z &= r \cos \vartheta\end{aligned}$$

gdzie $r \in [0, \infty[$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

2. Układ walcowy

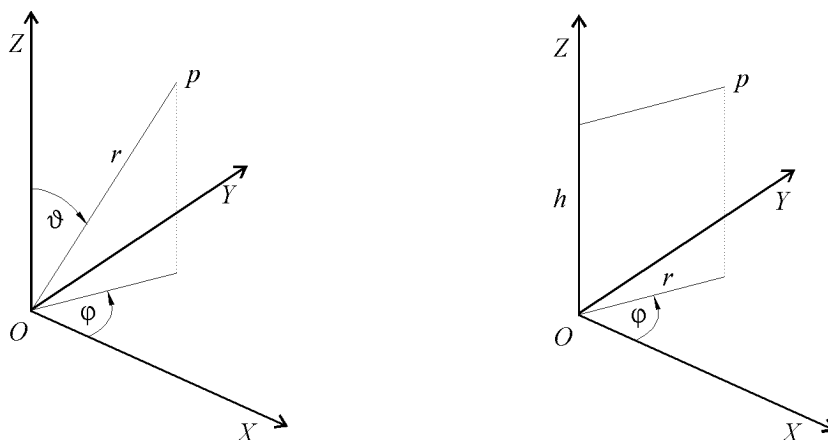
$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = h$$

gdzie $r \in [0, \infty[$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $h \in \mathbf{R}$.

Sens geometryczny tych wzorów mogą przybliżyć rysunki:



Układy współrzędnych: sferyczny i walcowy.

Zajmiemy się teraz podobnym, trochę ogólniejszym zagadnieniem. Związane jest ono z pewnym często spotykanym sposobem zadawania funkcji. Zobaczymy to najpierw na przykładzie. Mamy równanie $x^2 + y^2 = 1$. Jeśli interesują nas tylko nieujemne wartości zmiennej y , to możemy y wyrazić jako funkcję x : $y = \sqrt{1 - x^2}$ określoną dla $x \in [-1, 1]$. Ogólniej, można rozważać układ m funkcji zadany jako rozwiązanie układu m równań. Zobaczymy, jakiego twierdzenia należałoby się tutaj spodziewać.

Dany mamy układ równań

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0, \\ &\dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając funkcję $g : \mathbf{E}^n \times \mathbf{E}^m \rightarrow \mathbf{E}^m$ zapisujemy go w postaci

$$g(x, y) = 0.$$

Przypuśćmy, że mamy jakieś rozwiązanie tego układu, czyli punkt (x_0, y_0) taki, że $g(x_0, y_0) = 0$. Oznaczmy przez g'_x tę część macierzy pochodnej g' , która zawiera tylko pochodne cząstkowe po x , a przez g'_y część zawierającą tylko pochodne po y . Weźmy punkt (x, y) bliski punktu (x_0, y_0) i oznaczmy $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$. Jeśli funkcja g jest różniczkowalna, a h i k są dostatecznie małe, to nasze równanie możemy przybliżyć w następujący sposób:

$$0 = g(x, y) = g(x_0 + h, y_0 + k) \approx g(x_0, y_0) + g'_x h + g'_y k = g'_x h + g'_y k.$$

Mamy więc w przybliżeniu

$$0 = g'_x h + g'_y k.$$

Wyznaczaniu y w zależności od x odpowiada wyznaczanie k w zależności od h . Mamy do rozwiązania układ m równań liniowych z m niewiadomymi. Układ taki ma, jak wiemy, dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnej prawej strony (prawej, jeśli układ przepiszemy w postaci $g'_y k = -g'_x h$), jeżeli $\det g'_y \neq 0$. Możemy już sformułować twierdzenie.

Twierdzenie 69 (O FUNKCJACH UWIKŁANYCH) *Niech $g : \mathbf{E}^n \times \mathbf{E}^m \rightarrow \mathbf{E}^m$ będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) . Załóżmy, że $g(x_0, y_0) = 0$ oraz $\det g'_y(x_0, y_0) \neq 0$.*

Wtedy istnieje otoczenie U punktu x_0 i otoczenie V punktu y_0 oraz funkcja $f : U \rightarrow V$ taka, że dla $(x, y) \in U \times V$ zachodzi równoważność

$$y = f(x) \iff g(x, y) = 0.$$

Funkcja f jest różniczkowalna oraz

$$f'(x_0) = -(g'_y(x_0, y_0))^{-1} g'_x(x_0, y_0).$$

Twierdzenie to można bardzo łatwo udowodnić sprowadzając problem do lokalnej odwracalności odwzorowania $\mathbf{E}^n \times \mathbf{E}^m \ni (x, y) \mapsto (x, g(x, y)) \in \mathbf{E}^n \times \mathbf{E}^m$.

Wzoru na pochodną nie warto uczyć się na pamięć, bo najłatwiej jest w każdym przypadku znajdować pochodną zakładając, że $y = f(x)$ i różniczkując równanie $g(x, y) = 0$.

Przykłady.

1. Mamy równanie

$$g(x, y) = 0,$$

w którym x i y to zwykle zmienne rzeczywiste. Załóżmy, że g jest funkcją różniczkowalną spełniającą założenia Twierdzenia 69. Podstawiamy $y = f(x)$ i różniczkujemy stronami po x :

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

skąd

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}.$$

2. Trzy zmienne x, y, z spełniają równanie

$$g(x, y, z) = 0.$$

Potraktujemy z jako funkcję x i y wyznaczoną przez to równanie. Różniczkując stronami po x i y otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

skąd

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

3. Zmienne x, y, z spełniają układ równań

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= 0, \\ g_2(x, y, z) &= 0, \end{aligned}$$

Traktujemy y i z jako funkcje x wyznaczone przez ten układ równań. Różniczkując stronami otrzymujemy układ równań, z którego można

wyznaczyć pochodne $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{dz}{dx}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \frac{dz}{dx} &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial g_2}{\partial z} \frac{dz}{dx} &= 0.\end{aligned}$$

4.1.4 Styczne do powierzchni, ekstrema związane

Spotykaliśmy się w ubiegłym roku z krzywymi i powierzchniami zadanymi za pomocą równania lub układu równań. Równania, z którymi mieliśmy do czynienia miały bardzo szczególną postać; występujące w nich funkcje były wielomianami pierwszego lub drugiego stopnia. Rozważać będziemy zbiór M tych punktów przestrzeni \mathbf{E}^n , współrzędne których spełniają układ m równań ($m < n$)

$$\begin{aligned}g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &= 0.\end{aligned}$$

Zapiszemy to krócej używając funkcji $g : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$:

$$M = \{x \in \mathbf{E}^n : g(x) = 0\}.$$

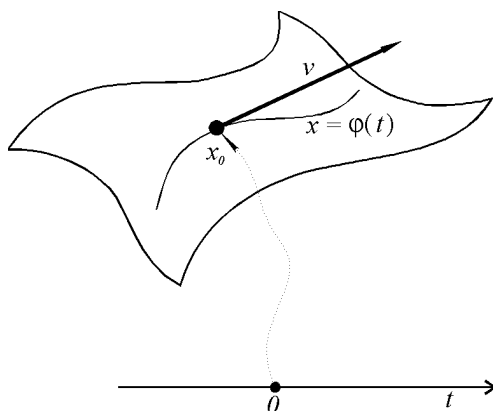
Będziemy zakładali, że g ma ciągłą pochodną. Sama różniczkowalność g nie wystarcza jednak, żeby powyższe równanie opisywało powierzchnię, której należałaby się nazwa “gładka”.

Definicja 28 *Niech M będzie podzbiorem \mathbf{E}^n zdefiniowanym powyżej. Punkt $x_0 \in M$ nazywamy regularnym, jeżeli rząd macierzy $g'(x_0)$ jest równy m , (czyli ma największą z możliwych wartości, bo $g'(x_0)$ jest macierzą $n \times m$, a $n > m$).*

Stawiamy sobie teraz zadanie znalezienia równania stycznej do M w punkcie regularnym x_0 . Należy najpierw dokładniej postawić to zadanie, to znaczy odpowiedzieć na pytanie, czym jest styczna. Zaczniemy od pojęcia wektora stycznego do powierzchni. Rozważać będziemy krzywe przechodzące przez punkt x_0 leżące całkowicie na M .

Krzywe takie można opisywać za pomocą funkcji $\mathbf{R} \ni t \mapsto f(t) \in M$. Załóżmy, że f jest różniczkowalna oraz $f(0) = x_0$. Przyjmiemy taką definicję stycznej, żeby wektory postaci $\frac{df}{dt}(0)$ były styczne do M w punkcie x_0 .

Definicja 29 Niech M będzie takiej, jak w poprzedniej definicji, niech $x_0 \in M$. Wektor $v \in \mathbf{E}^n$ nazywamy stycznym do M w punkcie x_0 , jeżeli istnieje funkcja różniczkowalna $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{E}^n$ taka, że $\varphi(t) \in M$ dla każdego t , $\varphi(0) = x_0$ i $\frac{d\varphi}{dt}(0) = v$. Zbiór wektorów stycznych do M w punkcie x_0 będziemy nazywali przestrzenią styczną do M w punkcie x_0 i oznaczali $T_{x_0}(M)$. Zbiór $\mathcal{T}_{x_0}(M) = \{x_0 + v : v \in T_{x_0}(M)\}$ będziemy nazywali płaszczyzną styczną do M w punkcie x_0 .



Ilustracja do definicji wektora stycznego.

Łatwo jest podać warunek konieczny styczności. Zauważmy, że $\varphi(t) \in M$ to to samo, co $g(\varphi(t)) = 0$. Ponieważ miałyby to zachodzić dla wszystkich t , pochodna po t musi być równa zero.

$$0 = \frac{d}{dt}g(\varphi(t)) \Big|_{t=0} = g'(x_0)\varphi'(0) = g'(x_0)v.$$

Okazuje się, że jeżeli punkt x_0 jest regularny, to jest to jednocześnie warunek wystarczający.

Twierdzenie 70 *Niech M będzie takie, jak poprzednio, a $x_0 \in M$ niech będzie punktem regularnym. Wtedy*

$$T_{x_0}(M) = \{v \in \mathbf{E}^n : g'(x_0)v = 0\}.$$

Zobaczmy teraz na przykładzie równania krzywej drugiego stopnia, że przyjęta tutaj definicja daje w tym przypadku to samo, co dawała definicja używająca warunków algebraicznych.

Równanie krzywej drugiego stopnia ma postać

$$g(x) = (x|Ax) + (x|q) + r = 0.$$

Niech punkt x_0 leży na tej krzywej, czyli $g(x_0) = 0$. Wektor styczny v ma spełniać warunek

$$g'(x_0)v = (v|Ax_0) + (x_0|Av) + (v|q) = 0,$$

skąd po uwzględnieniu symetrii iloczynu skalarnego i symetrii operatora A mamy

$$(v|2Ax_0 + q) = 0,$$

czyli to samo, co mieliśmy poprzednio.

Zajmiemy się teraz ekstremami funkcji w przypadku, gdy na zmienne niezależne nałożony jest jeden lub kilka warunków dodatkowych. Zagadnienia tego typu spotyka się bardzo często. Jako przykład weźmy proste zadanie z fizyki. Ciężarek wisi na nitce o długości l zaczepionej w danym punkcie. Wszystko to dzieje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Należy znaleźć położenie równowagi, o którym z fizyki wiadomo, że odpowiada minimum energii potencjalnej. W odpowiednio wybranym układzie odniesienia współrzędne x, y, z ciężarka spełniają równanie $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$. Zadanie polega na znalezieniu minimum funkcji $f(x, y, z) = mgz$. Można oczywiście, zachowując pewną ostrożność, wyznaczyć z jako funkcję x i y , a po podstawieniu szukać minimum funkcji dwóch zmiennych. Nie zawsze jednak uda się rozwiązać dane równania. Przedstawimy tutaj dosyć ogólną metodę rozwiązywania zadań tego typu.

Mamy znaleźć ekstrema funkcji f n zmiennych x_1, \dots, x_n , przy spełnieniu m dodatkowych warunków ($m < n$)

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Zapiszemy to, jak poprzednio, w jednej linijce: Dana jest funkcja $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$ oraz funkcja $g : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$. Oznaczamy

$$M = \{x \in \mathbf{E}^n : g(x) = 0\}.$$

Definicja 30 *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in M$ lokalne minimum związane, jeżeli istnieje takie $\epsilon > 0$, że dla każdego x takiego, że $\|x - x_0\| < \epsilon$ spełniającego warunek $x \in M$ zachodzi $f(x) \geq f(x_0)$.*

Podamy teraz warunek konieczny lokalnego ekstremum związanego.

Twierdzenie 71 *Załóżmy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne. Jeżeli f ma w x_0 lokalne ekstremum związane, to*

$$\nabla_v f(x_0) = 0$$

dla każdego wektora $v \in T_{x_0}(M)$.

Dowód. Zgodnie z definicją przestrzeni stycznej możemy znaleźć funkcję $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{E}^n$ taką, że $\varphi(0) = x_0$, $\varphi'(0) = v$ i $g(\varphi(t)) \equiv 0$. Jeżeli w punkcie x_0 funkcja f ma lokalne ekstremum związane, to funkcja $t \mapsto f(\varphi(t))$ ma lokalne ekstremum w punkcie $t = 0$. Na podstawie warunku koniecznego ekstremum mamy

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) \right|_{t=0} = f'(x_0)v = \nabla_v f(x_0).$$

□

Praktyczną metodę znajdowania ekstremów związanych daje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 72 *Niech $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$ oraz $g : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$ mają pierwsze pochodne ciągłe. Niech x_0 będzie punktem regularnym zbioru $M = \{x \in \mathbf{E}^n : g(x) = 0\}$. Jeżeli f ma w x_0 lokalne ekstremum związane na M , to istnieje odwzorowanie liniowe $\Lambda : \mathbf{E}^m \rightarrow \mathbf{R}$ takie, że*

$$f'(x_0) = \Lambda g'(x_0).$$

Dowód. Jeśli x_0 jest punktem regularnym M , to, jak już wiemy, $T_{x_0}(M) = \{v \in \mathbf{E}^n : g'(x_0)v = 0\}$. Warunek konieczny można w tym przypadku sformułować tak:

$$g'(x_0)v = 0 \implies f'(x_0)v = 0.$$

Skonstruujemy teraz odwzorowanie Λ . Niech $u \in \mathbf{E}^m$. Założenie o regularności punktu x_0 oznacza tyle, że zbiór wartości $g'(x_0)$ jest całą przestrzenią \mathbf{E}^m . Oznacza to, że istnieje $w \in \mathbf{E}^n$ takie, że $u = g'(x_0)w$. Przyjmujemy

$$\Lambda u := f'(x_0)w.$$

Definicja ta może budzić wątpliwości, ponieważ dla danego u można znaleźć inne w' takie, że $u = g'(x_0)w'$. Definicja będzie dobra, jeśli okaże się, że $f'(x_0)w = f'(x_0)w'$. Okazuje się, że to właśnie ma miejsce, bo $0 = g'(x_0)w - g'(x_0)w' = g'(x_0)(w - w')$ pociąga za sobą $f'(x_0)(w - w') = 0$. Podstawiając $u = g'(x_0)w$ w definicji odwzorowania Λ mamy

$$\Lambda g'(x_0)w = f'(x_0)w$$

dla dowolnego $w \in \mathbf{E}^n$, co właśnie należało udowodnić. □

Zapiszemy to twierdzenie w postaci układu warunków. Mamy znaleźć ekstrema funkcji $f(x_1, \dots, x_n)$ przy warunkach dodatkowych

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Odwzorowanie liniowe Λ ma macierz $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Warunek konieczny przyjmuje postać układu równań

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1}, \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Razem z warunkami daje to układ $n+m$ równań z $n+m$ niewiadomymi $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. W rozwiązaniach na ogół interesujące są tylko wartości x_1, \dots, x_n , ale czasem, na przykład w zagadnieniach statyki, liczby λ_j mają interpretację fizyczną, są one związane z siłami reakcji więzów.

Oto trochę inaczej zapisana teza tego twierdzenia:

$$\text{grad } f(x_0) = \lambda_1 \text{grad } g_1(x_0) + \dots + \lambda_m \text{grad } g_m(x_0).$$

Postać ta czyni bardziej widoczną analogię z zagadnieniami statyki. Jeśli funkcja f przedstawia zależność energii potencjalnej układu od jego konfiguracji, a funkcje g_1, \dots, g_n są związane z równaniami więzów, to, z dokładnością do znaku, $\text{grad } f$ opisuje siły zewnętrzne działające na układ, a $\lambda_i \text{grad } g_i$ to siły reakcji więzów. W takim przypadku warunek konieczny ekstremum związanego orzeka tyle, że jeśli dana konfiguracja odpowiada lokalnemu ekstremum energii potencjalnej, to działające siły się równoważą.

Nawiązując do tej postaci naszkicujemy jeszcze raz dowód twierdzenia. Warunek konieczny ekstremum głosi, że pochodna kierunkowa f w dowolnym kierunku stycznym do M w x_0 jest równa zero. Ponieważ $\nabla_v f(x_0) = (\text{grad } f(x_0)|v)$, oznacza to, że gradient f jest prostopadły do wszystkich wektorów stycznych do M w x_0 . Z drugiej strony wiemy, że, przy założeniu regularności punktu x_0 , wektor v jest styczny do M w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest ortogonalny do $\text{grad } g_i(x_0)$ dla wszystkich $i = 1, \dots, m$. Zatem warunek konieczny ekstremum orzeka, że $\text{grad } f(x_0)$ jest kombinacją liniową gradientów g_i , co właśnie było do udowodnienia

Przykład.

Znajdziemy ekstrema funkcji danej wzorem

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

przy warunku

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Mamy tutaj $n = 2$, $m = 1$. Λ jest macierzą 1×1 , czyli liczbą λ . Do rozwiązania mamy układ równań

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda 2x \\ -2y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem są następujące trójki liczb (x, y, λ) : $(0, \pm 1, 0)$, $(\pm 1, 0, 1)$.

4.2 Rachunek całkowy

4.2.1 Całkowanie funkcji wielu zmiennych

Powtórzymy najpierw konstrukcję całki Riemanna dokonując modyfikacji niezbędnych w przypadku funkcji wielu zmiennych. Zauważmy najpierw, że o ile w przypadku funkcji jednej zmiennej naturalne było całkowanie po przedziale, to dla funkcji wielu zmiennych na samym początku staje pytanie o to, na jakich zbiorach całkować te funkcje. Zaczniemy od całkowania po (uogólnionych, jeśli będzie trzeba) prostokątach, które nazywać będziemy kostkami.

Niech $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}$. *Kostką* w \mathbf{E}^m będziemy nazywali zbiór

$$K = \{x \in \mathbf{E}^m : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Rozważać będziemy *podziały* kostki K związane z podziałami każdego z przedziałów $[a_i, b_i]$. W przedziale $[a_i, b_i]$ wybieramy n_i punktów $a_i = x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < \dots < x_i^{(n_i)} = b_i$. Kostkę K dzielimy na bardzo wiele (dokładnie $(n_1 - 1) \cdot \dots \cdot (n_m - 1)$) części takiego oto typu:

$$K_{j_1 \dots j_m} = \{x \in K : x_i^{(j_i)} \leq x_i \leq x_i^{(j_i+1)}\}.$$

Objętość takiej kostki jest równa

$$|K_{j_1 \dots j_m}| = (x_1^{(j_1+1)} - x_1^{(j_1)}) \cdot \dots \cdot (x_m^{(j_m+1)} - x_m^{(j_m)}).$$

Niech f będzie funkcją ograniczoną na K . Podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej określamy sumę górną i sumę dolną Riemanna odpowiadające danemu podziałowi π :

$$\bar{S}(f, \pi) = \sum_{j_1, \dots, j_m} \sup_{x \in K_{j_1 \dots j_m}} f(x) |K_{j_1 \dots j_m}|,$$

$$\underline{S}(f, \pi) = \sum_{j_1, \dots, j_m} \inf_{x \in K_{j_1 \dots j_m}} f(x) |K_{j_1 \dots j_m}|.$$

Podobnie, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, przyjmujemy następujące definicje:

Definicja 31 Funkcję f określoną i ograniczoną na kostce $K \subset \mathbf{E}^n$ nazywamy całkowną w sensie Riemanna, jeżeli istnieje ciąg podziałów (π_n) kostki K taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, \pi_n) - \underline{S}(f, \pi_n) = 0.$$

Całką funkcji f na kostce K nazywamy

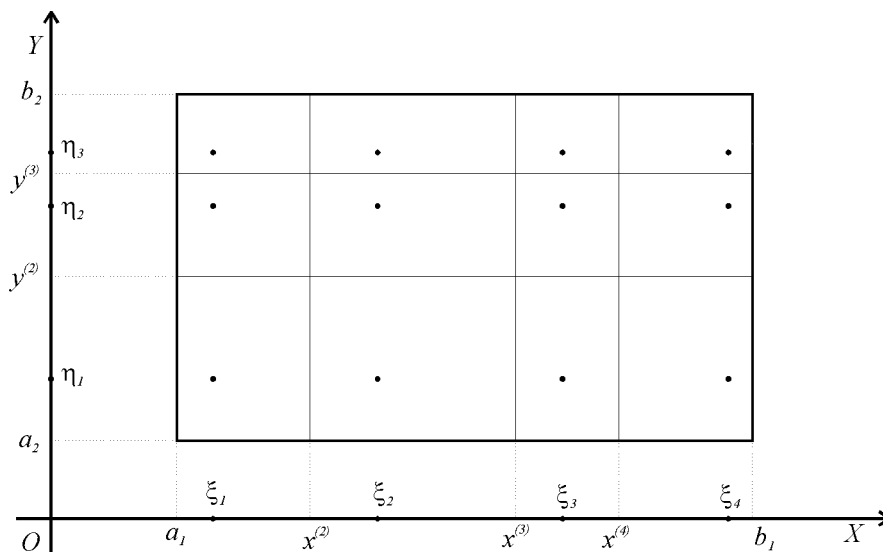
$$\int_K f := \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, \pi_n),$$

gdzie (π_n) jest jakimkolwiek ciągiem podziałów spełniającym poprzedni warunek.

Tak samo, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej dowodzi się, że definicja całki jest poprawna, to znaczy, że granica w ostatnim wzorze istnieje i nie zależy od wyboru ciągu (π_n) , jeśli tylko spełnia on nałożony warunek.

Przyjęta tutaj definicja całki nie daje wygodnego narzędzia do obliczeń. Aby zobaczyć, na czym polega sprowadzanie do całkowania funkcji jednej zmiennej zajmiemy się przypadkiem funkcji dwóch zmiennych. Zamiast sumy górnej lub dolnej weźmiemy coś, co na pewno zawiera się między nimi. Bierzemy podział kostki K wyznaczony przez punkty $a_1 = x^{(1)} < x^{(2)} < \dots < x^{(n_1)} = b_1$ oraz $a_2 =$

$y^{(1)} < y^{(2)} < \dots < y^{(n_2)} = b_2$. Wybieramy liczby ξ_i , $i = 1, \dots, n_1 - 1$ tak, że $x^{(i)} < \xi_i < x^{(i+1)}$ oraz liczby η_j , $j = 1, \dots, n_2 - 1$ tak, że $y^{(j)} < \eta_j < y^{(j+1)}$.



Podział kostki i wybrane punkty (ξ_i, η_j) .

Tworzymy sumę

$$S = \sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} f(\xi_i, \eta_j) |x^{(i+1)} - x^{(i)}| \cdot |y^{(j+1)} - y^{(j)}|.$$

Ponieważ

$$\inf_{(x,y) \in K_{ij}} f(x, y) \leq f(\xi_i, \eta_j) \leq \sup_{(x,y) \in K_{ij}} f(x, y),$$

mamy

$$\underline{S}(f, \pi) \leq S \leq \bar{S}(f, \pi).$$

Wobec tego S jest dobrym przybliżeniem całki, o ile tylko podział π jest odpowiednio dobrany. Przekształcamy nieznacząco wzór definiujący S :

$$S = \sum_{i=1}^{n_1-1} \left(\sum_{j=1}^{n_2-1} f(\xi_i, \eta_j) |y^{(j+1)} - y^{(j)}| \right) |x^{(i+1)} - x^{(i)}|.$$

Wyrażenie w nawiasie jest, o ile dostatecznie drobny jest podział przedziału $[a_2, b_2]$ punktami $y^{(1)}, \dots, y^{(n_2)}$, dobrym przybliżeniem całki

$$\int_{a_2}^{b_2} f(\xi_i, y) dy.$$

Jeśli wyrażenie to zastąpimy przez tę całkę, to otrzymamy przybliżenie S przez całkę

$$S \approx \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

Przeprowadzone rozumowanie można przekształcić w dowód. Problem jest w tym, że przy coraz drobniejszych podziałach wzrasta dokładność przybliżenia całek przez sumy, ale jednocześnie rośnie liczba składników, co mogłoby się skończyć tym, że suma bardzo wielu bardzo małych niedokładności wcale nie będzie mała. Jak można się spodziewać, wszystko zależy od funkcji, z którą mamy do czynienia. W podanym poniej twierdzeniu zakładamy, że mamy do czynienia z funkcją ciągłą.

Twierdzenie 73 *Niech f będzie funkcją ciągłą na kostce $K \subset \mathbf{E}^n$. Wtedy f jest całkowna w sensie Riemanna na K oraz zachodzi wzór:*

$$\int_K f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1.$$

Wszystkie funkcje występujące pod całkami po prawej stronie tego wzoru również są całkowne w sensie Riemanna.

Aby uwolnić się od pisania wielu nawiasów prawą stronę zapisuje się jako $\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, \dots, x_n)$. Zauważmy, że lewa strona nie zależy od kolejności zmiennych x_1, \dots, x_n , wobec czego w prawej stronie można przestawiać dowolnie kolejność całkowania. Na przykład dla $n = 2$ mamy (oczywiście, o ile funkcja spełnia założenia)

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2) = \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{b_1} dx_1 f(x_1, x_2).$$

Założenia o funkcji f w tym twierdzeniu można znacznie osłabić. Jest to potrzebne w wielu zastosowaniach. Nie podajemy tutaj twierdzenia (Fubinięgo), zawierającego odpowiednie ujęcie sprawy, odsyłając czytelnika do obszerniejszych książek poświęconych analizie matematycznej lub teorii miary i całki. Będziemy musieli jednak korzystać z tezy twierdzenia w sytuacji, kiedy funkcja f nie jest ciągła. Jeżeli zbiór punktów nieciągłości funkcji f nie jest zbyt duży (na przykład, jeśli leży na powierzchni niższego wymiaru), to tezy można używać bez obaw.

Specjalnego rodzaju problemy występują przy całkowaniu funkcji nieograniczonych lub przy całkowaniu po zbiorach nieograniczonych. Całki takie, zwane niewłaściwymi można definiować zastępując funkcję lub obszar odpowiednimi przybliżeniami i przechodząc do granicy. Nie będziemy tego tutaj opisywać, zadowolimy się uwagą, że po to, aby zachodziła teza Twierdzenia 73 na ogół (to znaczy we wszystkich przykładach, z którymi się spotkamy) wystarcza, aby całka $\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_n}^{b_n} dx_n |f(x_1, \dots, x_n)|$ była skończona.

W zastosowaniach często mamy do czynienia z całkowaniem po zbiorach, które nie są kostkami. Całki takie definiuje się następująco: Dla danego zbioru ograniczonego A znajdujemy kostkę K taką, że $A \subset K$. Przez χ_A oznaczymy funkcję określoną wzorami: $\chi(x) = 1$ dla $x \in A$; $\chi_A(x) = 0$, jeśli x nie należy do A . Całkę po zbiorze A definiujemy wzorem

$$\int_A f = \int_K f \cdot \chi_A.$$

Funkcję f uznamy za całkowaną w sensie Riemanna na A , jeżeli funkcja występująca pod całką po prawej stronie jest całkowna w sensie Riemanna na K . Zauważmy tutaj, że całkowność funkcji f na zbiorze A na ogół narzuca również warunek na zbiór A .

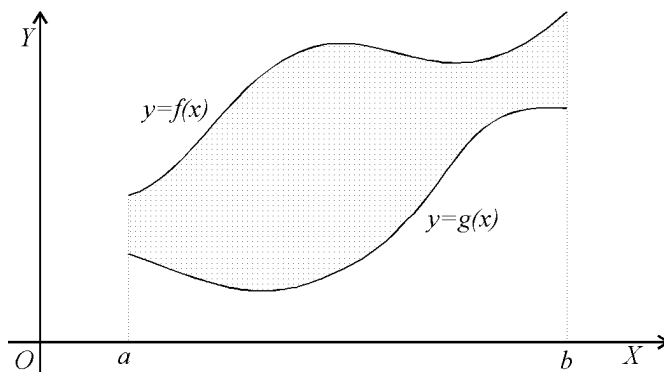
Przykład. W \mathbf{E}^2 mamy zbiór A zadany nierównościami:

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : f(x) < y < g(x); a < x < b\},$$

gdzie f i g są zadanymi, dostatecznie regularnymi (np. ciągłymi) funkcjami. Zastosowanie Twierdzenia 73 daje

$$\int_A f = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy f(x, y).$$

Zbiór, po którym całkowaliśmy przedstawiony jest na rysunku:



Ustalanie granic całkowania, nawet w przypadku obszarów dwuwymiarowych czasem może sprawiać trudności, w związku z czym warto rozwiązać następujące zadanie:

Zadanie. Zmienić porządek całkowania w całce

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy f(x, y),$$

przy czym zakładamy, że f jest funkcją ciągłą.

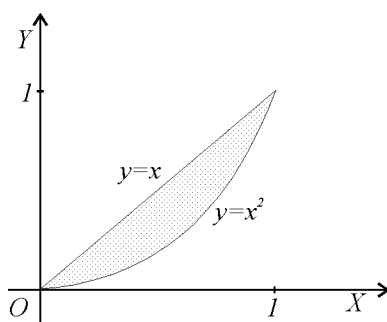
Całkujemy tutaj po obszarze określonym nierównościami

$$0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x.$$

Widać, że y zmienia się w granicach od 0 do 1. Rozwiązujemy nierówności przy ustalonym y , otrzymując $y \leq x \leq \sqrt{y}$, wobec czego dana całka jest równa

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} dx f(x, y)$$

Obszar całkowania przedstawiony jest na rysunku:



Zamiana zmiennych w całkach wielokrotnych

Przypomnimy najpierw metodę całkowania przez podstawienie, którą stosowaliśmy w przypadku funkcji jednej zmiennej.

Mamy całkę

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Podstawiamy $x = g(t)$ i otrzymujemy stąd całkę

$$\int_{a'}^{b'} f(g(t))g'(t) dt,$$

przy czym nowe granice spełniają warunek $a = g(a')$, $b = g(b')$.

W przypadku funkcji wielu zmiennych mamy do czynienia z całką $\int_A f$, gdzie A jest (dostatecznie regularnym) podzbiorem \mathbf{E}^n . Zamianę zmiennych opisuje odwzorowanie $g : \mathbf{E}^n \supset K \ni t \mapsto g(t) \in A$, gdzie K jest n -wymiarową kostką. O odwzorowaniu g trzeba założyć, oprócz różniczkowalności, że jest wzajemnie jednoznaczne.

Należy jeszcze pod całką dopisać coś, co w przypadku jednowymiarowym jest pochodną $g'(t)$. Zauważmy najpierw, że całka po zbiorze odpowiada raczej całce $\int_{[a,b]}$ niż \int_a^b . Całki takie, na mocy definicji, różnią się znakiem, jeżeli $b < a$. W związku z tym powinniśmy myśleć o uogólnieniu $|g'(t)|$, a nie samej pochodnej $g'(t)$. Właściwym wyrażeniem, które tutaj należy podstawić, jest wartość bezwzględna jakobianu $|\det g'(t)|$. W rezultacie mamy

Twierdzenie 74 *Niech K będzie kostką w \mathbf{E}^n , a $g : K \rightarrow \mathbf{E}^n$ odwzorowaniem różniczkowalnym (z pochodną ciągłą) i różnowartościowym. Niech f będzie funkcją całkowaną w sensie Riemanna na $g(K)$.*

Wtedy

$$\int_{g(K)} f = \int_K f \circ g |\det g'|.$$

Nie przedstawimy tutaj pełnego dowodu zastępując go szkicem, który czytelnik sam może uzupełnić.

Nie zmniejszając ogólności możemy przyjąć, że kostka K jest sześcianem o boku a . Rozważamy podział tej kostki na sześciany K_i o

boku a/k . Części tych jest oczywiście k^n . W każdej z kostek K_i wybieramy jeden punkt $t^{(i)}$. Niech będzie to punkt o najmniejszych współrzędnych. Porównujemy dwie sumy

$$S_1 = \sum_{i=1}^{k^n} f(g(t^{(i)})) |det(g'(t^{(i)}))| \left(\frac{a}{k}\right)^n$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{k^n} f(g(t^{(i)})) V_i,$$

gdzie V_i oznacza n -wymiarową objętość zbioru $g(K_i)$ ². S_1 jest zawarte między dolną i górną sumą Riemanna przybliżającą całkę $\int_K f \circ g \cdot |det g'|$, więc przy rozdrabnianiu podziału ($k \rightarrow \infty$) dąży do tej całki. S_2 jest natomiast przybliżeniem całki $\int_{g(K)} f$. Stwierdzenie to wymagałoby dłuższego uzasadnienia (które tutaj pomijamy), ponieważ suma ta związana jest z podziałem zbioru $g(K)$ na części $g(K_i)$, które nie są kostkami.

Należy udowodnić, że S_1 i S_2 dążą do tej samej granicy, gdy $k \rightarrow \infty$. W tym celu porównamy V_i z $|det(g'(t^{(i)}))| \left(\frac{a}{k}\right)^n$. Ta ostatnia wielkość jest objętością równoległościanu rozpiętego na wektorach $g'(t^{(i)})\left(\frac{a}{k}e_i\right)$, gdzie e_i są wektorami bazy kanonicznej \mathbf{E}^n . Z ciągłości (dokładniej: z jednostajnej ciągłości) g' wynika, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ można znaleźć takie $\delta > 0$, że jeśli $\|t - t'\| < \delta$, to $\|g'(t)h - g'(t')h\| \leq \epsilon \|h\|$ dla każdego $h \in \mathbf{E}^n$.

Niech będzie dane $\epsilon > 0$. Bierzemy tak duże k , żeby najdłuższa przekątna kostek K_i była mniejsza od δ dobrane do tego ϵ , czyli $\sqrt{n}a/k < \delta$. Rozważamy dwa odwzorowania określone na K_i : g oraz \tilde{g} określone wzorem:

$$\tilde{g}(t) = g(t^{(i)}) + [g'(t^{(i)})](t - t^{(i)}).$$

Obrazem kostki K_i przy odwzorowaniu \tilde{g} jest równoległościan rozpięty na wektorach $g'(t^{(i)})\left(\frac{a}{k}e_i\right)$ zaczepionych w punkcie $g(t^{(i)})$. Korzystając

²Ścisłe biorąc, nie podaliśmy jeszcze definicji objętości V_i zbioru $g(K_i)$. Można ją określić wzorem $V_i = \int_{g(K_i)} 1$, skąd widać, że nie każdy zbiór ma dobrze określoną objętość (bo nie każda funkcja jest całkowna w sensie Riemanna).

z Twierdzenia 8 mamy dla wszystkich $t \in K_i$ następującą nierówność:

$$\|g(t) - \tilde{g}(t)\| = \|(g(t) - \tilde{g}(t)) - (g(t^{(i)}) - \tilde{g}(t^{(i)}))\| \leq \epsilon \sqrt{n} \frac{a}{k}.$$

Dalszy ciąg rozumowania przedstawimy w dużym skrócie. Z ostatniej nierówności można wywnioskować, że różnicę między V_i a objętością równoległoscianu nie przekracza $C(a/k)^{n-1} \epsilon \sqrt{n} \frac{a}{k}$, gdzie C jest pewną stałą niezależną od k i od wyboru kostki K_i . Wielkość ta została otrzymana przez pomnożenie liczby $C(a/k)^{n-1}$ będącej górnym ograniczeniem pola powierzchni równoległoscianu przez $\epsilon \sqrt{n} \frac{a}{k}$, które jest górnym ograniczeniem “grubości warstwy”, o którą mogą się różnić porównywane figury. Niech $M = \sup_{x \in g(K)} |f(x)|$. Uwzględniając fakt, że w sumach S_1 i S_2 mamy po k^n składników, otrzymujemy nierówność:

$$|S_1 - S_2| \leq k^n \cdot MC(a/k)^{n-1} \epsilon \sqrt{n} \frac{a}{k} = MC a^n \sqrt{n} \cdot \epsilon.$$

Stąd już łatwo wywnioskować, że S_1 i S_2 dążą do tej samej granicy przy $k \rightarrow \infty$. □

Przykład. Obliczymy moment bezwładności jednorodnej kuli o masie M i promieniu R względem osi przechodzącej przez jej środek. Umawiamy się, że oś Z jest osią obrotu. Mamy do obliczenia całkę

$$J = \int_V (x^2 + y^2) \rho \, dx dy dz,$$

gdzie V jest daną kulą, a gęstość $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Wprowadzamy współrzędne walcowe

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= h. \end{aligned}$$

Jakobian tego odwzorowania jest równy r , więc

$$J = \int_0^R dr \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} dh \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \rho \cdot r = 2\pi \int_0^R 2\sqrt{R^2-r^2} r^3 \rho \, dr = \frac{2}{5} M R^2.$$

Twierdzenia 14 i 15 można stosować także do pewnych całek niewłaściwych, czyli takich, w których albo funkcja podcałkowa nie jest ograniczona, albo zbiór, po którym całkujemy nie jest ograniczony. Całki takie definiuje się jako granice całek po mniejszych zbiorach, na których funkcja jest całkowalna. Niech $A \subset \mathbf{E}^n$ oraz $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Wybieramy ciąg zbiorów $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A$; $A = \bigcup_i A_i$ taki, że f jest całkowalna na każdym A_k i definiujemy $\int_A f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f$. Definicja taka jest znacznie lepsza, jeśli fakt istnienia granicy i jej wartość nie zależą od wyboru ciągu (A_k) . Warunkiem wystarczającym na to jest zbieżność ciągu całek $\int_{A_k} |f|$, czyli istnienie (skończonej) całki niewłaściwej $\int_A |f|$. Ten sam warunek wystarcza do zachodzenia tezy Twierdzeń 14 i 15 w przypadku całek niewłaściwych. Oto piękny, pochodzący od Poissona, przykład zastosowania.

Przykład. Obliczmy całkę

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Pomysł polega na tym, żeby obliczać I^2 :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)}.$$

Przechodzimy do współrzędnych biegunowych (nie zapominając o jacobianie, który równa się r).

$$I^2 = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r^2} r = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \pi.$$

Ostatecznie

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

4.2.2 Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

Będziemy się teraz zajmowali dwoma różnymi rodzajami całek, nazywanymi zwykle całkami *pierwszego* względnie *drugiego* rodzaju. Będziemy je omawiali po kolei, zaczynając od przykładów,

Całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju

Przykład 1. Długość krzywej. Mamy daną (sparametryzowaną) gładką krzywą w \mathbf{E}^n , to znaczy odwzorowanie różniczkowalne $[a, b] \ni t \mapsto f(t) \in \mathbf{E}^n$. Zamierzamy zdefiniować długość tej krzywej. Kine-matyczna interpretacja funkcji f , (myślenie o $f(t)$ jako o położeniu w chwili t poruszającego się punktu materialnego) sugeruje zdefiniowanie długości krzywej jako całki z prędkości tego ruchu. Przyjmujemy wobec tego, że długość krzywej zdefiniowana jest wzorem

$$l = \int_{[a,b]} \|f'(t)\| dt.$$

Wzór ten nasuwa wątpliwości. Po pierwsze, jeżeli punkt przebiega kilkakrotnie jakąś część krzywej, to będzie to wielokrotnie policzone. Możemy temu zapobiec wykluczając takie przypadki. Będziemy zakładali, że funkcja f jest różnowartościowa. Druga wątpliwość związana jest z tym, że prawa strona definicji zależy nie tylko od samej krzywej, czyli od zbioru $f([a, b])$, ale od jej parametryzacji za pomocą funkcji f . Okazuje się, jak zaraz zobaczymy, że zależność ta jest pozorna — przy zmianie parametryzacji wartość całki pozostaje bez zmiany. Jeżeli funkcja $g : [c, d] \rightarrow \mathbf{E}^n$ jest inną parametryzacją tej samej krzywej, to $\varphi = g^{-1} \circ f$ odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie $[a, b]$ na $[c, d]$ oraz $f = g \circ \varphi$. Stosując podstawienie w całce mamy

$$\int_{[c,d]} \|g'(s)\| ds = \int_{[a,b]} \|g'(\varphi(t))\| \cdot |\varphi'(t)| dt = \int_{[a,b]} \|f'(t)\| dt.$$

Obliczmy długość okręgu o promieniu r . Wybieramy parametryzację

$$[0, 2\pi] \ni \varphi \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Nie jest to co prawda odwzorowanie różnowartościowe, ale wzór można zastosować, bo odstępstwo od różnowartościowości dotyczy tylko jednego punktu i nie wpływa na wartość całki. Podstawiamy do wzoru:

$$f'(\varphi) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi), \quad \|f'(\varphi)\| = \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = r,$$

$$l = \int_0^{2\pi} r d\varphi = 2\pi r.$$

Przykład 2. Pole powierzchni. Potrzebny nam będzie wzór na pole powierzchni S równoległoboku rozpiętego przez dwa wektory u, v w przestrzeni \mathbf{E}^n . Wzór ten jest następujący

$$S(u, v) = \sqrt{\begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) \\ (v|u) & (v|v) \end{vmatrix}}.$$

Aby przekonać się, że wzór ten rzeczywiście określa pole powierzchni równoległoboku, oznaczmy przez φ kąt między u i v i obliczmy wyznacznik pamiętając, że $(u, v) = \|u\| \cdot \|v\| \cos \varphi$.

$$\begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) \\ (v|u) & (v|v) \end{vmatrix} = \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \varphi = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \varphi.$$

Niech $P = [a, b] \times [c, d]$. Określmy pole powierzchni płata zadanego za pomocą parametryzacji $f : P \ni (t, s) \mapsto f(t, s) \in \mathbf{E}^n$. Wzór, który przyjmujemy jest podobny do wzoru na długość krzywej; zamiast długości wektora $\frac{df}{dt}$ będziemy całkowali pole powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach $\frac{\partial f}{\partial t}$ i $\frac{\partial f}{\partial s}$. Pole płata definiujemy jako

$$S = \int_P S\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) dt ds.$$

Podobnie, jak w poprzednim przypadku, korzystając z twierdzenia o zamianie zmiennych w całkach można wykazać, że określone w ten sposób pole powierzchni nie zależy od parametryzacji.

Obliczymy pole powierzchni sfery o promieniu r . Do sparametryzowania jej użyjemy współrzędnych sferycznych

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Podstawiamy

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ostatecznie

$$S\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = r^2 \sin \theta.$$

Pole sfery jest więc równe

$$S = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta = 4\pi r^2.$$

Zarówno długość krzywej, jak i pole powierzchni płata można byłoby definiować od razu w sposób niezależny od parametryzacji. Można na przykład wybrać na krzywej kilka punktów i obliczyć długość wyznaczonej przez nie łamanej, a następnie wybierać punkty coraz gęściej i przejść do granicy. Podobna metoda może być zastosowana do określenia pola powierzchni płata. Metody takie są nawet lepsze, bo klasa krzywych lub płatów, dla których określa się długość względnie powierzchnię jest wtedy większa, ale droga do wzorów nadających się do rachunków jest dłuższa.

Przejdziemy teraz do uogólnienia obydwu przykładów. Przede wszystkim, pod całką może stać jeszcze jakaś funkcja, co może się przydać, na przykład, jeśli chcemy obliczyć masę krzywej nici o zadanej, zmiennej gęstości. Niech będzie dany k -wymiarowy płat w przestrzeni \mathbf{E}^n opisany parametrycznie za pomocą odwzorowania $f : K \rightarrow \mathbf{E}^n$, gdzie K jest kostką w \mathbf{E}^k . Niech $S_k(v_1, \dots, v_k)$ oznacza k -wymiarową objętość równoległoscianu rozpiętego na wektorach v_1, \dots, v_n . Jako zadanie domowe potraktujmy dowód, że

$$S_k(v_1, \dots, v_k) = \sqrt{\begin{vmatrix} (v_1|v_1) & (v_1|v_2) & \dots & (v_1|v_k) \\ (v_2|v_1) & (v_2|v_2) & \dots & (v_2|v_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (v_k|v_1) & (v_k|v_2) & \dots & (v_k|v_k) \end{vmatrix}}.$$

Całkę powierzchniową pierwszego rodzaju z funkcji f określonej na $f(K)$ definiujemy wzorem

$$\int_{f(K)} F = \int_K F(f(t_1, \dots, t_k)) S_k \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k} \right) dt_1 \dots dt_k.$$

Zamiast $S_k \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k} \right) dt_1 \dots dt_k$ zwykle pisze się $d_k S$ lub, dla $k = 1, 2, 3$ odpowiednio dl , $d_2 S$ oraz $d_3 V$.

Dowód niezależności całki od parametryzacji płata oparty jest na twierdzeniu o zamianie zmiennych w całkach wielokrotnych. Zasadniczą rolę odgrywa w nim następująca własność S_k : Jeżeli (a_{ij}) jest dowolną macierzą o k wierszach i k kolumnach, to

$$S_k \left(\sum_{i_1=1}^k a_{i_1 1} v_{i_1}, \sum_{i_2=1}^k a_{i_2 2} v_{i_2}, \dots, \sum_{i_k=1}^k a_{i_k k} v_{i_k} \right) = S_k(v_1, v_2, \dots, v_k) (\det(a_{ij}))^2.$$

Całki krzywoliniowe drugiego rodzaju

Z całkami, o których będziemy teraz mówili spotykaliśmy się w kilku działach fizyki. Zwrócimy uwagę na dwa przykłady:

- Praca wykonywana podczas przemieszczania punktu materialnego w zadanym polu sił wzdłuż danej krzywej.
- Strumień pola wektorowego przez zadaną powierzchnię, występujący na przykład w prawie Gaussa.

Przykłady te nie dadzą się opisać jako całki pierwszego rodzaju. Zwróćmy uwagę na przykład na to, że pierwsza z nich zmienia znak, gdy punkt przemieszczamy po tej samej krzywej, ale w przeciwnym kierunku. Znak drugiej całki określa się w drodze umowy ustalającej, z której "strony" powierzchni ma być wektor, aby strumień był dodatni. Odgrywające tutaj zasadniczą rolę pojęcie orientacji wprowadzimy nieco później, teraz przyjrzymy się trochę bliżej wspomnianym całkom.

Przykład 1. Praca w danym polu sił. Niech będzie dane pole sił czyli funkcja przypisująca każdemu punktowi x z pewnego obszaru przestrzeni \mathbf{E}^3 wektor $\vec{F}(x) \in \mathbf{E}^3$. Jeśli krzywa zadana jest równaniem parametrycznym $[a, b] \ni t \mapsto f(t) \in \mathbf{E}^3$, to pracę określamy wzorem

$$L = \int_a^b \left(\vec{F}(f(t)) | f'(t) \right) dt.$$

Znowu dowodu wymaga niezależność od parametryzacji. Jeżeli $g : [c, d] \rightarrow \mathbf{E}^3$ jest inną parametryzacją tej samej krzywej, to, jak już

wspomnieliśmy, istnieje funkcja $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ taka, że $f = g \circ \varphi$. Rachunek wykazujący niezależność całki od parametryzacji krzywej przebiega tak samo, jak poprzednio dla całki określającej długość, ale w jednym miejscu różni się zasadniczo. Obecnie mamy do czynienia z całką \int_a^b , która zmienia znak przy przestawieniu granic całkowania. Jeżeli ograniczymy się do takich zmian parametryzacji, że $f(a) = g(c)$ oraz $f(b) = g(d)$, czyli φ jest funkcją rosnącą, to rachunek jest prosty:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\vec{F}(f(t)) | f'(t) \right) dt &= \int_a^b \left(\vec{F}(g(\varphi(t))) | g'(\varphi(t)) \right) \varphi'(t) dt = \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \left(\vec{F}(g(s)) | g'(s) \right) ds = \int_c^d \left(\vec{F}(g(s)) | g'(s) \right) ds. \end{aligned}$$

Całki takie zapisuje się zazwyczaj w trochę inaczej, tak, że nie występuje parametryzacja krzywej. Krzywą jakoś oznaczamy, np. literą Γ i piszemy

$$L = \int_{\Gamma} \left(\vec{F} | d\vec{l} \right).$$

Zapis ten rozumiemy w ten sposób, że należy wybrać parametryzację f krzywej, pamiętając przy tym o kierunku jej przebiegania, a następnie w miejsce $d\vec{l}$ wstawić $f'dt$ i całkować w granicach zadanych przez parametryzację. Przy użyciu współrzędnych całkę zapisujemy jako

$$L = \int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz,$$

a podstawienie parametryzacji krzywej wykonuje się tak samo, jak podstawienie w całkach funkcji jednej zmiennej³.

³**Uwaga.** Wyrażenia typu $adx + bdy + cdz$ mogą być określone w nawet w przestrzeni, w której nie jest zadany iloczyn skalarny. Układ liczb a, b, c opisuje obiekt zwany *formą liniową* lub *kowektorem*. Z pojęciem tym spotkaliśmy się już w związku z definicją iloczynu wektorowego. Jeśli przyjrzeć się tej sprawie trochę dokładniej, to można dostrzec, że siła nie jest wektorem, tylko kowektorem, a wektor siły bierze się stąd, że w \mathbf{E}^3 mamy zadany iloczyn skalarny i korzystamy z twierdzenia o postaci funkcjonału liniowego.

Przykład 2. Przechodzimy teraz do drugiego przykładu — strumienia pola wektorowego przez zadaną powierzchnię. Mamy daną parametryzację $f : P \ni (t, s) \mapsto f(t, s) \in \mathbf{E}^3$ oraz pole wektorowe $\mathbf{E}^3 \ni x \mapsto \vec{F}(x) \in \mathbf{E}^3$. Aby obliczyć strumień całkujemy po zbiorze parametrów funkcją przedstawiającą objętość równoległoscianu rozpiętego w danym punkcie przez wektory styczne $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}$ oraz wektor \vec{F} . Objętość ta zdefiniowana jest jako moduł wyznacznika, ale ponieważ chcemy uwzględnić orientację układu tych trzech wektorów (czyli to, “z której strony” powierzchni jest koniec wektora \vec{F}), to trzeba całkować sam wyznacznik. Ostatecznie strumień definiowany jest jako

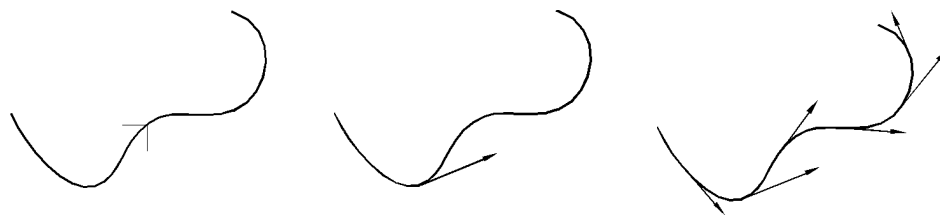
$$\Phi = \int_a^b dt \int_c^d ds \det\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}, \vec{F}\right).$$

Tutaj również stosuje się skrócony zapis, w którym nie występuje wprost parametryzacja. Jeśli przypomnimy sobie powiązanie między wyznacznikiem, iloczynem wektorowym i iloczynem skalarnym⁴, to, zapisując $\frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial s} dt ds$ jako $d_2\vec{S}$ otrzymamy

$$\Phi = \int_S (\vec{F} | d_2\vec{S}),$$

Można sprawdzić, że całka określająca strumień nie zależy od wyboru parametryzacji, byle tylko orientacja była taka sama.

Użyty już kilkakrotnie termin *orientacja* wymaga wyjaśnienia i sprecyzowania. Zaczniemy od nieprecyzyjnego, poglądowego przedstawienia tego, o co chodzi. W przypadku **krzywej** wybieramy jeden z dwóch możliwych kierunków jej przebiegania.

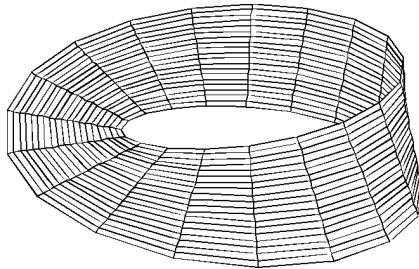


Orientacja krzywej.

⁴Dla tych, którzy już zdążyli to zapamiętać, przypominam: $\det(u, v, w) = (u \times v | w)$.

Można to zrobić tak, jak na lewym rysunku; często w taki sposób wskazuje się na mapach kierunek prądu rzeki. Aby pojęcie to dało się sprecyzować tak, jak jest to u matematyków w zwyczaju, można zamiast tego podać wektor styczny do krzywej w jakimś punkcie (rys. środkowy), albo wektory styczne we wszystkich punktach (rys. prawy) dbając tylko o to, aby pokazywały one ten sam “kierunek”. Wektory te można interpretować jako prędkość ruchu po danej krzywej, a stąd wynika bezpośrednich związek z parametryzacją krzywej. Jeśli f jest parametryzacją danej krzywej, to $f'(t)$ jest wektorem stycznym do tej krzywej w punkcie $f(t)$.

Orientacja **powierzchni dwuwymiarowej** polega na wyróżnieniu jednej ze stron. Można tę stronę pomalować np. na zielono. Zauważmy, że nie zawsze jest to możliwe, co można stwierdzić na przykładzie tzw. *wstęgi Möbiusa*.



Wstęga Möbiusa.

Jeśli jednak da się wyróżnić jedną stronę powierzchni, to można to zrobić nie tylko za pomocą pędzla i farby, które trudno jest opisać w języku matematyki. Używa się zasadniczo dwóch sposobów. Pierwszy to podanie wektora prostopadłego do powierzchni w jakimś punkcie (albo we wszystkich punktach, byle zgodnie). Drugi sposób nasuwa się wtedy, gdy powierzchnia zadana jest za pomocą parametryzacji. Parametryzacja jest odwzorowaniem $f : (t, s) \mapsto f(t, s)$ przypisującym parze liczb (t, s) punkt przestrzeni $f(t, s)$. Wektory $\frac{\partial f}{\partial t}$ i $\frac{\partial f}{\partial s}$ są styczne do powierzchni, a ich iloczyn wektorowy jest do niej prostopadły. Problem, w jakiej kolejności mnożyć te wektory ($\frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial s}$, czy $\frac{\partial f}{\partial s} \times \frac{\partial f}{\partial t}$) to jest właśnie wybór *zwrotu* iloczynu wektorowego. W rezultacie orientację wyznacza kolejność parametrów (t, s) , a przy obliczaniu całek

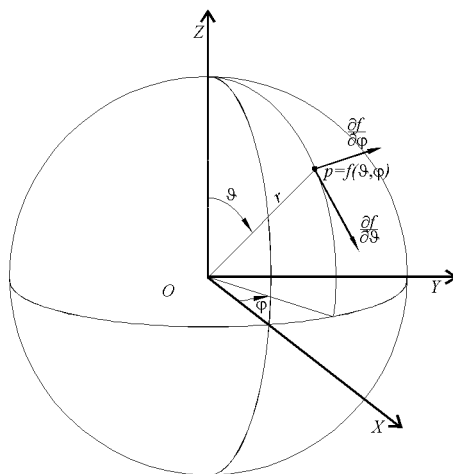
typu strumienia przez powierzchnię trzeba się zdecydować, w jakiej kolejności mnożyć wektory styczne, tzn. czy

$$d_2\vec{S} = \frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial s}, \text{ czy też } d_2\vec{S} = \frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial s}.$$

Jako przykład weźmiemy sferę o promieniu r w przestrzeni trójwymiarowej. Parametryzujemy ją za pomocą kątów ϑ, φ we współrzędnych sferycznych określonych wzorami:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Chcemy wybrać taką orientację sfery, żeby strumień wychodzący na zewnątrz liczony był jako dodatni, czyli orientację wyznaczoną przez wektory prostopadłe skierowane na zewnątrz sfery. W jakiej kolejności mamy mnożyć wektorowo $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ i $\frac{\partial f}{\partial \vartheta}$, aby otrzymać wektor wychodzący na zewnątrz? Zobaczmy to na rysunku:



Współrzędne sferyczne i wektory styczne do sfery.

Rysunek sugeruje, że trzeba wziąć

$$d_2\vec{S} = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

bowiem przy obracaniu wektora $\frac{\partial f}{\partial \vartheta}$ w kierunku wektora $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ śruba prawoskrętna poruszałaby się na zewnątrz kuli. Jest to poprawna odpowiedź, ale co ma zrobić ktoś, do kogo nie przemawiają argumenty rysunkowe? Można wziąć wektor niewątpliwie wychodzący na zewnątrz kuli i prostopadły do niej, np. wektor p o współrzędnych $(x, y, z,)$ i sprawdzić, czy iloczyn skalarny $(p|d_2\vec{S})$ jest dodatni. Jeśli tak, to znaczy, że wybraliśmy tę orientację, o którą chodziło. Sprawdzamy:

$$d_2\vec{S} = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \dots = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \\ r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$(p|d_2\vec{S}) = r^3 \sin \vartheta > 0.$$

Wynik ten (rachunki trzeba wykonać samodzielnie!) przekonuje o tym, iż kolejność mnożenia wektorowego przy definicji $d_2\vec{S}$ została wybrana właściwie.

Orientacja **przestrzeni trójwymiarowej** czy też jakiegoś obszaru w niej nie była przedmiotem żadnego z przykładów rozważanych dotychczas. Chodzi tutaj o odróżnienie np. śruby prawoskrętnej od lewoskrętnej i wybranie jednej z nich. Wybór taki równoważny jest podaniu jakiejś bazy przestrzeni i kolejności jej wektorów. Niech będzie to baza (v_1, v_2, v_3) . Wyróżnimy wtedy tę śrubę, która przy obracaniu tak, że wektor v_1 kręci się w stronę v_2 , posuwa się w stronę wskazywaną przez v_3 .

4.2.3 Twierdzenie Stokesa i pokrewne

Przykłady

Przykład 1. Przypomnijmy sobie najpierw podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego. Orzeka ono mniej więcej tyle, że dla funkcji F różniczkowalnej na przedziale $[a, b]$ zachodzi wzór

$$\int_a^b \frac{dF}{dx} dx = F(b) - F(a).$$

Zastosowanie tego twierdzenia do całek krzywoliniowych daje wzór

$$\int_{\Gamma} (\text{grad } F | \vec{dl}) = F(b) - F(a),$$

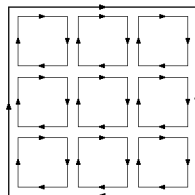
gdzie Γ jest krzywą zorientowaną, a jej początkiem, a b końcem.

Przedmiotem dalszych rozważań będą pewne uogólnienia tego twierdzenia na całki krzywoliniowe drugiego rodzaju.

Przykład 2. Na płaszczyźnie \mathbf{E}^2 dane jest pole wektorowe \vec{F} . Interesuje nas całka tego pola po brzegu Γ prostokąta $[a, b] \times [c, d]$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Całka ta jest równa:

$$\int_{\Gamma} (\vec{F} | d\vec{l}) = \int_a^b F_1(x, c) dx + \int_c^d F_2(b, y) dy + \int_b^a F_1(x, d) dx + \int_d^c F_2(a, y) dy.$$

Prostokąt ten można podzielić na wiele mniejszych prostokątów. Jeśli wszystkie obiegamy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, to, jak widać na rysunku, całka po dużym prostokącie jest sumą całek po małych prostokącikach, ponieważ całki po wszystkich liniach wewnętrznych się znoszą.



Obliczamy przybliżoną wartość całki po małym prostokącie γ . Niech (x, y) będą współrzędnymi jego lewego dolnego wierzchołka, a Δx i Δy długością jego boków. Całka po γ jest równa

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (\vec{F} | d\vec{l}) &= \int_x^{x+\Delta x} F_1(x', y) dx' + \int_y^{y+\Delta y} F_2(x + \Delta x, y') dy' + \\ &\quad \int_{x+\Delta x}^x F_1(x', y + \Delta y) dx' + \int_{y+\Delta y}^y F_2(x, y') dy' \\ &= \int_x^{x+\Delta x} (F_1(x', y) - F_1(x', y + \Delta y)) dx' + \\ &\quad \int_y^{y+\Delta y} (F_2(x + \Delta x, y') - F_2(x, y')) dy'. \end{aligned}$$

Stosujemy teraz do obydwu całek twierdzenie o wartości średniej ra-

chunku całkowego⁵. Oznaczając przez ξ i η odpowiednie punkty pośrednie w ostatnich dwóch całkach mamy

$$\int_{\gamma} (\vec{F} | d\vec{l}) = [F_1(\xi, y) - F_1(\xi, y + \Delta y)] \Delta x + [F_2(x + \Delta x, \eta) - F_2(x, \eta)] \Delta y.$$

Do wyrażeń umieszczonych w nawiasach kwadratowych stosujemy twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej:

$$\int_{\gamma} (\vec{F} | d\vec{l}) = \left[-\frac{\partial F_1}{\partial y}(\xi, \eta') + \frac{\partial F_2}{\partial x}(\xi', \eta) \right] \Delta x \Delta y.$$

Iloczyn $\Delta x \Delta y$ jest polem powierzchni małego prostokąta. Jeśli zastąpimy punkty (ξ', η) i (ξ, η') przez jakikolwiek jeden punkt małego prostokąta, to, ze względu na (jednostajną) ciągłość nie popełnimy dużego błędu (dokładniej: przy przechodzeniu do zera z rozmiarami małych prostokątów błąd będzie dążył do zera), a przedstawienie całki po dużym prostokącie jako sumy całek po małych prostokątach przybiera postać sumy Riemanna dla całki

$$\int \int_{\tilde{\Gamma}} dx dy \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right],$$

gdzie $\tilde{\Gamma}$ oznacza (dwuwymiarowy) prostokąt. W rezultacie mamy

$$\int_{\Gamma} (\vec{F} | d\vec{l}) = \int \int_{\tilde{\Gamma}} dx dy \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right].$$

Przykład 3. Dane mamy takie samo pole wektorowe i prostokąt, jak w poprzednim przykładzie. Obecnie interesować nas będzie strumień Φ pola wektorowego \vec{F} przez łamaną Γ . Jeśli pole wychodzi na zewnątrz prostokąta, to strumień uważamy za dodatni. Przy takiej umowie wyraża się on całką:

$$\Phi = \int_{\Gamma} (\vec{F} | \vec{n} dl) =$$

⁵Dla tych, którzy zdążyli to *zupełnie* zapomnieć, przypominam: Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to istnieje taki punkt c wewnątrz tego przedziału, że $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

$$\int_a^b [-F_2(x, c)] dx + \int_c^d F_1(b, y) dy + \int_b^a [-F_2(x, d)] dx + \int_d^c F_1(a, y) dy.$$

Tak samo, jak w poprzednim przykładzie dzielimy dany prostokąt na mniejsze i stwierdzamy, że strumienie przez sąsiadujące z sobą brzegi małych prostokątów się znoszą, więc strumień pola \vec{F} przez brzeg dużego prostokąta jest sumą strumieni przez brzegi małych prostokątów. Przyjmując takie same oznaczenia, jak w poprzednim przykładzie obliczamy strumień Φ przez brzeg małego prostokąta.

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_x^{x+\Delta x} [-F_2(x', y)] dx' + \int_y^{y+\Delta y} F_1(x + \Delta x, y') dy' + \\ &\quad \int_{x+\Delta x}^x [-F_2(x', y + \Delta y)] dx' + \int_{y+\Delta y}^y F_1(x, y') dy' \\ &= \int_x^{x+\Delta x} [F_2(x', y + \Delta y) - F_2(x', y)] dx' + \\ &\quad \int_y^{y+\Delta y} [F_1(x + \Delta x, y') - F_1(x, y')] dx' \\ &= [F_2(\xi, y + \Delta y) - F_2(\xi, y)] \Delta x + [F_1(x + \Delta x, \eta) - F_1(x, \eta)] \Delta y \\ &= \left[\frac{\partial F_2}{\partial y}(\xi, \eta') + \frac{\partial F_1}{\partial x}(\xi', \eta) \right] \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Rozumując dalej podobnie, jak w Przykładzie 1 otrzymujemy wzór

$$\int_{\Gamma} (\vec{F} | \vec{n} dl) = \int_{\bar{\Gamma}} dx dy \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right].$$

W Przykładzie 1 wyprowadziliśmy szczególny przypadek twierdzenia *Stokesa*, a w Przykładzie 2 — twierdzenia *Greena-Gaussa-Ostrogradskiego*. Obydwa te twierdzenia formułują związek między odpowiednią całką pola wektorowego po brzegu obszaru a całką po samym obszarze wyrażenia zawierającego pierwsze pochodne współrzędnych tego pola. Podobny charakter ma również twierdzenie przytoczone na początku obecnego paragrafu.

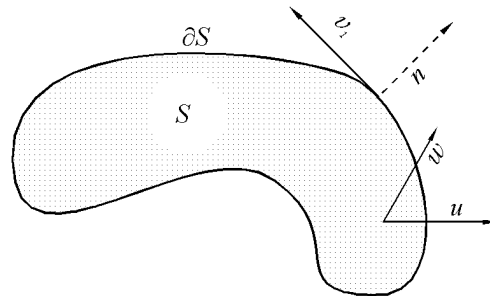
Orientacja brzegu

Zanim przystąpimy do formułowania twierdzeń musimy zająć się sprawą orientacji. Rzecz polega na tym, że w rozważanych twierdzeniach po

jednej stronie równości stoi całka po pewnym obszarze, a po drugiej — całka po brzegu tego obszaru. Każda z nich zmienia znak przy zmianie orientacji, konieczne jest więc uzgodnienie orientacji obszaru i jego brzegu. Podamy tutaj regułę uzgadniania, niezależną od wymiaru przestrzeni, w której pracujemy, przy założeniu której formułowane będą twierdzenia. Oznaczmy obszar, o którym mowa przez S , a jego brzeg przez ∂S . Reguła brzmi następująco:

Definicja 32 *Jeśli układ wektorów (v_1, v_2, \dots, v_k) jest bazą przestrzeni stycznej do ∂S w jakimś punkcie i wyznacza orientację ∂S , a n jest wektorem prostopadłym do ∂S w tym punkcie, wychodzącym na zewnątrz S i stycznym do S , to układ wektorów $(n, v_1, v_2, \dots, v_k)$ wyznacza orientację S zgodną z orientacją ∂S .*

Definicję tę ilustruje rysunek.



Orientacja ∂S dana przez v_1 jest zgodna z orientacją S daną przez (u, w) .

Przykład. Zobaczymy teraz, jak stosuje się tę definicję w praktyce. Niech S będzie walcem określonym przez układ nierówności:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Dla walca, który jest figurą trójwymiarową, wybieramy orientację wyznaczoną przez układ wektorów (e_1, e_2, e_3) . Zadanie nasze polega na stwierdzeniu, która orientacja brzegu ∂S zgodna jest z wybraną powyżej orientacją S . Musimy zająć się osobno każdą z trzech części brzegu.

Powierzchnia boczna. Wygodnie jest sparametryzować tę powierzchnię używając współrzędnych walcowych

$$\begin{aligned}x &= \cos \varphi, \\y &= \sin \varphi, \\z &= h\end{aligned}$$

Parametrami są tutaj φ oraz h . Aby stwierdzić, jaka ich kolejność daje szukaną orientację, znajdujemy wektory styczne oraz wektor prostopadły wskazujący na zewnątrz.

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ

$$\det\left(n, \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial h}\right) = 1 > 0,$$

Orientację tej części brzegu zgodną z orientacją S wyznacza kolejność parametrów (φ, h) .

Górne denko. Bierzemy parametryzację:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi, \\z &= 1.\end{aligned}$$

Wektory styczne i wektor prostopadły:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ

$$\det\left(n, \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = r \geq 0,$$

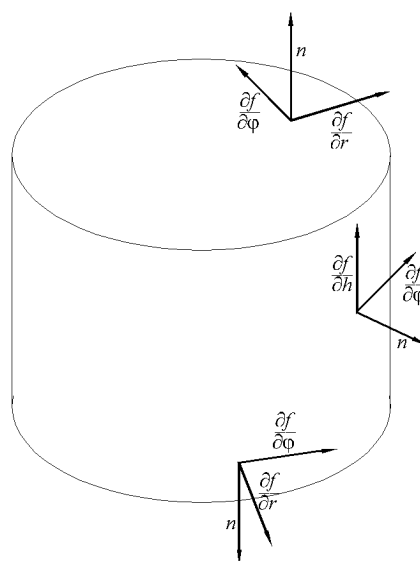
właściwą kolejnością parametrów jest (r, φ) .

Dolne denko. Parametryzacja:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi, \\z &= 1.\end{aligned}$$

Dalszy rachunek wygląda tak samo, jak w poprzednim przypadku, z tą tylko zmianą, że wektor prostopadły ma przeciwny zwrot (ma przecież wychodzić na zewnątrz obszaru). Wobec tego wyznacznik zmienia znak i orientacja brzegu odpowiada kolejności parametrów (φ, r) .

Ten sam rezultat otrzymamy przyglądając się rysunkowi:



Znajdowanie orientacji brzegu walca.

Twierdzenia typu twierdzenia Stokesa

Przykłady wymienione na początku obecnego podrozdziału dotyczyły przestrzeni dwuwymiarowej (z wyjątkiem pierwszego, który dotyczy przestrzeni o dowolnym wymiarze). Zbierzemy teraz twierdzenia tego

typu. Nie będziemy wypisywali szczegółowo założeń dotyczących regularności funkcji czy pól wektorowych występujących w tych twierdzeniach. Dowody również pominiemy, ponieważ wszystkie można sprowadzić do argumentów użytych w przykładach. Aby uprościć sformułowania wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \Gamma & \text{ — krzywa,} & a, b & \text{ — jej początek i koniec,} \\ S & \text{ — obszar dwuwymiarowy,} & \partial S & \text{ — jej brzeg,} \\ V & \text{ — obszar trójwymiarowy,} & \partial V & \text{ — jego brzeg.} \end{aligned}$$

Zakładamy przy tym, że Γ, S, V i brzegi są zorientowane, a orientacje brzegów są zgodne z orientacjami obszarów.

Twierdzenie 75

$$\int_{\Gamma} (\text{grad } U | d\vec{l}) = U(b) - U(a).$$

Następne twierdzenia podamy w sformułowaniu odpowiednim dla przestrzeni trójwymiarowej.

Twierdzenie 76 (STOKES)

$$\iint_S (\text{rot } \vec{F} | d_2\vec{S}) = \int_{\partial S} (\vec{F} | d\vec{l}),$$

gdzie

$$\text{rot } \vec{F} \text{ oznacza wektor o składowych } \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right).$$

Twierdzenie 77 (GREEN-GAUSS-OSTROGRADSKI)

$$\iiint_V \text{div } \vec{F} d_3V = \iint_{\partial V} (\vec{F} | d_2\vec{S}),$$

gdzie

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Jako przykład zastosowania twierdzenia GGO pokażemy wyprowadzenie prawa Archimedesesa. Zakładamy, że ciśnienie cieczy p spełnia równanie

$$\text{grad } p = \rho \vec{g},$$

gdzie ρ jest gęstością cieczy, a g przyspieszeniem ziemskim (a więc wielkością wektorową). Niech V będzie obszarem zajęтым przez ciało zanurzone w tej cieczy. Siła wyporu \vec{F} działająca na to ciało w myśl prawa Pascala równa się

$$\vec{F} = - \iint_{\partial V} p d_2 \vec{S}.$$

Minus we wzorze związany jest z tym, że interesuje nas siła, którą ciecz działa na ciało, skierowana do wnętrza V . Bierzymy dowolny wektor \vec{x} , obliczamy iloczyn skalarny i stosujemy twierdzenie GGO

$$(\vec{x}|\vec{F}) = - \iint_{\partial V} (p\vec{x}|d_2 \vec{S}) = \iiint_V \operatorname{div} (p\vec{x}) d_3 V = - \iiint_V (\vec{x}|\operatorname{grad} p) d_3 V.$$

Ponieważ wektor \vec{x} był dowolny, możemy pozbyć się go (po wyciągnięciu przed całką), skąd mamy

$$\vec{F} = - \iiint_V \operatorname{grad} p d_3 V = - \iiint_V \rho \vec{g} d_3 V.$$

Ta ostatnia całka to właśnie ciężar cieczy wypartej przez rozważane ciało. Minus oznacza, że siła ma zwrot przeciwny do tego ciężaru, czyli wyszło tak, jak trzeba.

Zadania.

1. Niech u i v będą funkcjami. Sprawdzić, że zachodzi wzór

$$\operatorname{div} (u \operatorname{grad} v) = \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + u \Delta v.$$

2. Korzystając ze wzoru wyprowadzonego w poprzednim zadaniu wykazać, że zachodzi wzór zwany *pierwszą formułą Greena*:

$$\iiint_V u \Delta v d_3 V = \iint_{\partial V} u \operatorname{grad} v d_2 \vec{S} - \iiint_V \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v d_3 V.$$

3. Korzystając z pierwszej formuły Greena wyprowadzić *drugą formułę Greena*:

$$\iiint_V u \Delta v - v \Delta u d_3 V = \iint_{\partial V} u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u d_2 \vec{S}.$$

4.2.4 Potencjały

Bardzo łatwo jest sprawdzić, że spełnione są tożsamości

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0.$$

Rzeczywiście, obliczając np. pierwszą składową $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U$ mamy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0,$$

na mocy twierdzenia o symetrii pochodnych mieszanych.

Przyjrzyjmy się bliżej pierwszej z tych tożsamości. Głosi ona, że jeśli pole wektorowe jest gradientem jakiejś funkcji, to jego rotacja równa się zeru. Można zadać pytanie, czy zachodzi twierdzenie odwrotne: Czy prawdziwe jest wynikanie:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \implies \text{istnieje funkcja } U \text{ taka, że } \vec{F} = \operatorname{grad} U ?$$

Odpowiedź jest typu: „tak, ale ...”. Chodzi o to, że istnieje, ale lokalnie, to znaczy wtedy, gdy zagadnienie rozpatruje się w dostatecznie małych obszarach. Ściśle biorąc, nie chodzi tu nawet o małość obszaru, lecz o to, żeby nie był „dziurawy”, ale tego pojęcia nie będziemy tutaj wyjaśniali. Funkcję U nazywamy *potencjałem skalarnym* pola wektorowego \vec{F} .

Potencjał skalarny łatwo jest skonstruować. Niech będzie dane pole \vec{F} takie, że $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ (pole spełniające taki warunek nazywa się *bezwirowym*). Wybieramy w przestrzeni jakikolwiek punkt a . Wartość potencjału skalarnego w punkcie p określamy według następującego przepisu: Bierzemy jakąkolwiek krzywą zorientowaną Γ o początku a i końcu p . Definiujemy:

$$U(p) := \int_{\Gamma} (\vec{F} | d\vec{l}).$$

Pojawia się natychmiast wątpliwość, czy $U(p)$ zależy tylko od punktu p , czy także od wyboru krzywej Γ . Przypuśćmy, że ktoś wybrał inną krzywą, którą oznaczymy $\tilde{\Gamma}$. Obliczmy różnicę całek

$$\int_{\Gamma} (\vec{F} | d\vec{l}) - \int_{\tilde{\Gamma}} (\vec{F} | d\vec{l}).$$

Jest to całka po krzywej zamkniętej — najpierw posuwamy się od punktu a do p po krzywej Γ , a potem idziemy od p do a po krzywej $\tilde{\Gamma}$ (idziemy w przeciwnym kierunku, a zmiana orientacji powoduje zmianę znaku całki — stąd minus). Z kolei krzywa zamknięta jest brzegiem jakiegoś obszaru dwuwymiarowego S (tu tkwi założenie o tym, że w przestrzeni nie ma „dziur”), wobec czego nasza różnica całek zamienia się, na mocy twierdzenia Stokesa, na strumień rotacji pola \vec{F} przez powierzchnię S . Założyliśmy, że rotacja pola \vec{F} jest równa zeru, skąd wynika znikanie tego strumienia, a wobec tego całka w definicji $U(p)$ nie zależy od drogi Γ , tylko od punktu początkowego i końcowego. Sprawdzenie, że grad $U = \vec{F}$ jest proste.

Podobne pytanie można zadać w związku z tożsamością $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$. Odpowiedź, z podobnym zastrzeżeniem, jak poprzednio, brzmi tak oto:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \implies \text{istnieje pole wektorowe } \vec{A} \text{ takie, że } \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Pole wektorowe \vec{A} nazywamy *potencjałem wektorowym* danego pola wektorowego \vec{F} .

Pole wektorowe o znikającej dywergencji nazywamy *bezźródłowym*. Potencjał wektorowy pola bezźródłowego można znajdować metodą nieco podobną, choć trochę bardziej skomplikowaną od opisanej w przypadku potencjału skalarnego.

Zbierzmy razem poznane fakty dotyczące pól bezwirowych i bezźródłowych.

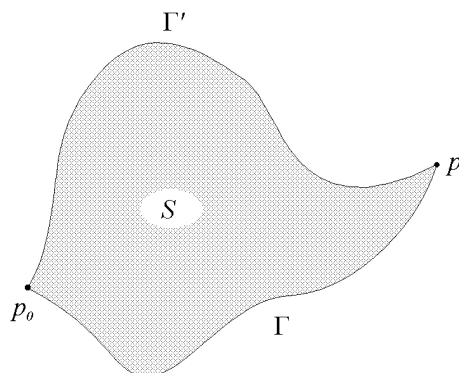
*Pole bezwirowe posiada potencjał skalarny.
Pole bezźródłowe posiada potencjał wektorowy.*

Jak znajdować potencjały?

Zacznijmy od potencjału skalarnego. Mamy dane pole bezwirowe \vec{F} (czyli $\text{rot } \vec{F} = 0$). Należy znaleźć taką funkcję U , żeby $\nabla U = \vec{F}$. Wybieramy jakikolwiek punkt p_0 i bierzemy jakąś krzywą $\Gamma(p_0, p)$ o początku p_0 i końcu p . Definiujemy

$$U(p) := \int_{\Gamma(p_0, p)} \vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad (4.1)$$

Zauważmy najpierw, że całka ta nie zależy od drogi, jeśli na dowolnych dwóch drogach łączących p_0 i p można rozpiąć powierzchnię (zarówno drogi, jak i pole \vec{F} powinny być wystarczająco regularne, aby można było stosować twierdzenie Stokesa).

**Znajdowanie potencjału skalarnego.**

Rzeczywiście, niech S będzie powierzchnią rozpiętą na dwóch drogach Γ i Γ' łączących p_0 i p . Wtedy, na mocy twierdzenia Stokesa

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_{\Gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Jeśli założenie o możliwości rozpięcia powierzchni na dowolnej drodze zamkniętej nie jest spełnione (z czym spotkaliśmy się na wykładzie

przy sprawdzaniu prawa Ampera), to funkcję U można określać z pewnymi ograniczeniami, na przykład w dostatecznie małym otoczeniu p_0 .

Sprawdźmy teraz, że U zdefiniowane wzorem (4.1) jest potencjałem skalarnym pola \vec{F} , czyli $\nabla U = \vec{F}$.

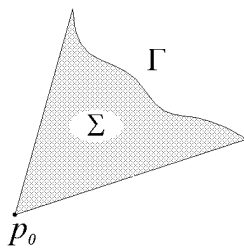
$$U(p+h) - U(p) = \int_{\Gamma(p_0, p+h)} \vec{F} d\vec{l} - \int_{\Gamma(p_0, p)} \vec{F} d\vec{l} =$$

$$\int_{\Gamma(p, p+h)} \vec{F} d\vec{l} = (\vec{F}|_h) + o(\|h\|),$$

co właśnie należało sprawdzić.

Przechodzimy do potencjału wektorowego. Mamy dane pole bezźródłowe \vec{F} (tzn. $\operatorname{div} \vec{F} = 0$). Szukamy potencjału wektorowego, czyli takiego pola \vec{A} , że $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$.

Niech Γ będzie jakąkolwiek krzywą zorientowaną. Końce Γ łączymy odcinkami prostych z ustalonym punktem p_0 . Otrzymujemy w ten sposób zamkniętą krzywą $\tilde{\Gamma}$, którą orientujemy tak, aby Γ , która jest jej częścią, była zorientowana tak, jak poprzednio. Na $\tilde{\Gamma}$ rozpinamy powierzchnię dwuwymiarową Σ i nadajemy jej orientację taką, aby $\tilde{\Gamma}$ była jej brzegiem.



Znajdowanie potencjału wektorowego.

Pole wektorowe \vec{A} definiujemy teraz za pomocą równania

$$\int_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l} = \int \int_{\Sigma} \vec{F} d_2\vec{S}. \quad (4.2)$$

Zauważmy najpierw, że prawa strona tego równania nie zależy od powierzchni Σ , lecz tylko od jej brzegu $\tilde{\Gamma}$. Rzeczywiście, jeśli weźmiemy inną powierzchnię Σ' o tym samym brzegu $\tilde{\Gamma}$, a przez V oznaczymy obszar trójwymiarowy⁶ ograniczony przez Σ i Σ' , to z warunku $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ otrzymamy $\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d_3v = 0 = \int \int_{\Sigma} \vec{F} d_2\vec{S} - \int \int_{\Sigma'} \vec{F} d_2\vec{S}$.

Zobaczmy teraz, że $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$. W tym celu wystarczy zauważyć, że z równania (4.2) wynika, iż dla dowolnej krzywej zamkniętej L będącej brzegiem dwuwymiarowej powierzchni S zachodzi

$$\int_L \vec{A} d\vec{l} = \int \int_S \vec{F} d_2\vec{S},$$

skąd $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$.

Wzór (4.2) wykorzystamy do znalezienia współrzędnych pola wektorowego \vec{A} . Jako krzywą Γ weźmiemy odcinek łączący punkty $\vec{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $\vec{p}_0 + \Delta\vec{p} = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$. Jeżeli wektor o współrzędnych $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \Delta\vec{p}$ ma bardzo małą długość, to lewa strona wzoru (4.2) jest w dobrym przybliżeniu równa $A_x \Delta x + A_y \Delta y + A_z \Delta z = (\Delta\vec{p} | \vec{A})$. Do obliczenia prawej strony sparametryzujemy powierzchnię Σ następująco:

$$x = s(x_0 + t\Delta x), y = s(y_0 + t\Delta y), z = s(z_0 + t\Delta z),$$

przy czym, aby uzyskać zgodność z orientacją Γ , trzeba (s, t) uznać za kolejność parametrów wyznaczającą orientację⁷ Σ . Obliczenie prawej strony wzoru (4.2) daje (po pominięciu składników będących małymi wyższego rzędu przy małym $\Delta\vec{p}$) daje $(\Delta\vec{p} | \int_0^1 s ds \vec{F}(s\vec{p}) \times \vec{p})$. Wobec tego

$$\vec{A} = \int_0^1 s ds \vec{F}(s\vec{p}) \times \vec{p}. \quad (4.3)$$

Przykład. Niech będzie $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$. Oczywiście $\operatorname{div} \vec{F} = 0$. Podstawiamy do (4.3): $\vec{F}(s\vec{p}) = (sy, sz, sx)$, $\vec{F} \times \vec{p} = s(z^2 - xy, x^2 - yz, y^2 - xz)$, a po scałkowaniu $\vec{A}(x, y, z) = \frac{1}{3}(z^2 - xy, x^2 - yz, y^2 - xz)$.

⁶Zakładamy, że tak można zrobić, to znaczy, że pole \vec{F} jest określone i dostatecznie regularne w obszarze przestrzeni „bez dziur”. Warunku tego nie spełnia na przykład pole kulombowskie.

⁷To, oczywiście, koniecznie trzeba sprawdzić.

Rozdział 5

Rachunek prawdopodobieństwa

Rachunek prawdopodobieństwa, bardzo szeroki i ważny dział matematyki, w fizyce ma liczne zastosowania. Z zastosowaniami rachunku prawdopodobieństwa spotkaliście się na pracowni fizycznej, głównie w zagadnieniach rachunku błędów, a także w związku z kinetyczną teorią gazów. Nie mamy tutaj dosyć miejsca ani czasu na głębsze zajęcie się tą dziedziną, ograniczymy się do przypomnienia i podstawowych pojęć, niewiele wykraczającego poza materiał szkoły średniej.

5.1 Podstawowe pojęcia

Zacznijmy od przykładu. Rzucamy dwiema kostkami. Zadanie polega na znalezieniu prawdopodobieństwa wyrzucenia w sumie dziewięciu punktów. Rozwiązuje się je zwykle w następujący sposób:

- Znajdujemy liczbę wszystkich możliwych wyników rzutu kostką, nazywanych zdarzeniami elementarnymi — w danym przypadku 36.
- Spośród wszystkich możliwych wyników wybieramy te, które spełniają zadany warunek — czyli $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(6,3)$.

- Prawdopodobieństwo obliczamy dzieląc liczbę zdarzeń elementarnych spełniających zadany warunek przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych — w naszym zadaniu otrzymujemy

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

W zadaniach takiego typu mamy do czynienia ze skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, którego elementy uważamy za jednakowo prawdopodobne. Założenie jednakowego prawdopodobieństwa zdarzeń elementarnych jest dowolne i na ogół wymaga jakiegoś dodatkowego uzasadnienia (w rozpatrywanym przykładzie argumentem za takim wyborem prawdopodobieństw może być przekonanie o tym, że kostka jest symetryczna). Również wybór zbioru zdarzeń elementarnych nie jest, jak mogłoby się wydawać, wyznaczony jednoznacznie przez warunki zadania. Można byłoby bowiem rozważać zadanie dotyczące rzutu dwiema kostkami jako szczególny przypadek zadania dotyczącego rzutu trzema kostkami, w którym pyta się o prawdopodobieństwo zdarzenia, którego zajście nie zależy od wyniku rzutu trzecią kostką.

Trzecim elementem, z którym mamy do czynienia w przykładzie jest warunek wyróżniający pewien podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych. Ponieważ w rachunku prawdopodobieństwa nie zawsze wystarcza skończony zbiór zdarzeń elementarnych, należy wyróżnić te podzbiory zbioru zdarzeń elementarnych, dla których ma być określone prawdopodobieństwo.

Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa stanowi trójka (Ω, \mathcal{A}, P) . Elementy tej trójki to:

Ω – zbiór, nazywany *zbiorem zdarzeń elementarnych*,

\mathcal{A} – pewien zbiór podzbiorów Ω , zwany *zbiorem zdarzeń losowych*.
Zakładamy spełnienie następujących warunków¹:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$, $\emptyset \in \mathcal{A}$.

¹Wymienione tutaj warunki nie są niezależne. Utworzenie równoważnego układu niezależnych warunków, na przykład przez odrzucenie niektórych z wypisanych tutaj, jest prostym ćwiczeniem, które pozostawiamy czytelnikowi.

$$2. A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B, A \cap B, A - B \in \mathcal{A}.$$

$$3. A_n \in \mathcal{A}, n = 1, 2, \dots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

P – funkcja przypisująca elementom \mathcal{A} liczby z przedziału $[0, 1]$ z zachowaniem następujących warunków:

$$1. P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0.$$

2. Jeżeli $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to

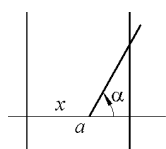
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Sposób używania tych pojęć zobaczymy na przykładach.

Przykład 1. Interesuje nas doświadczenie polegające na rzucie kostką do gry. Jako Ω bierzemy zbiór wszystkich możliwych wyników rzutu, czyli zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, \mathcal{A} będzie zbiorem wszystkich podzbiorów Ω , a P można określić wzorem $P(A) = N(A)/N(\Omega)$, gdzie $N(\cdot)$ oznacza liczbę elementów danego zbioru. Odpowiadając na pytanie o prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby parzystej najpierw znajdujemy podzbiór Ω (czyli element \mathcal{A}), o który chodzi w tym pytaniu, jest to $A = \{2, 4, 6\}$, a następnie obliczamy prawdopodobieństwo stosując przyjęty wzór: $P(A) = 3/6 = 1/2$.

Przykład 2. Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucaniu kostką. Jako Ω bierzemy zbiór par uporządkowanych $\{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$, a jako \mathcal{A} zbiór wszystkich podzbiorów Ω . Prawdopodobieństwo określamy takim samym wzorem, jak w poprzednim przykładzie, czyli $P(A) = N(A)/N(\Omega)$. Możemy teraz zadawać i odpowiadać na pytania dotyczące prawdopodobieństwa różnych zdarzeń, np. tego, że suma będzie większa niż 7, albo tego, że obydwa wyniki będą parzyste. Interesujące jest to, że możemy zadać takie samo pytanie, jak w Przykładzie 1, mając na myśli wynik pierwszego rzutu. Obliczenia będą wtedy wyglądały trochę inaczej, ale wynik jest oczywiście taki sam. Widać stąd, że do danego zadania można dobrać trójkę (Ω, \mathcal{A}, P) na różne sposoby.

Przykład 3. Na płaszczyznę poliniowaną równoległymi liniami odległymi o a rzuca się igłę o długości a . Interesuje nas prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z linii. Jako Ω weźmiemy zbiór parametrów w możliwie prosty sposób opisujących wynik rzutu igłą. Przyjmujemy, że linie na płaszczyźnie są pionowe. Ze względu na periodyczność poliniowania wystarczy, jak się wydaje, rozpatrzyć tylko takie sytuacje, w których najbardziej na lewo położony koniec igły znalazł się między dwiema wyróżnionymi prostymi.



Pionowe przesunięcie igły również wydaje się nieistotne. Jako parametry wybieramy odległość x lewego końca igły od lewej prostej oraz kąt α między igłą a osią poziomą. Parametry te spełniają nierówności: $0 < x < a$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ze względu na to, że będzie chodziło o pola pewnych figur, nie jest istotne, czy nierówności są ostre, czy nieostre. Bierzemy więc $\Omega =]0, a[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Podanie reguły rozstrzygającej, które podzbiory Ω mają należeć do \mathcal{A} nie jest proste. Wystarczy nam jednak założenie, że do \mathcal{A} na pewno należą wszystkie te podzbiory Ω , dla których bez wątpliwości da się określić pole powierzchni czyli te, których funkcje charakterystyczne są całkowalne w sensie Riemanna. Niech $S(\cdot)$ oznacza pole powierzchni. Jako prawdopodobieństwo zdarzenia losowego opisanego przez zbiór $A \subset \Omega$ przyjmijmy liczbę $P(A) = S(A)/S(\Omega)$.

Musimy znaleźć zbiór związany z pytaniem o to, czy igła przecina którąś z linii. Nastąpi to wtedy, gdy $x + a \cos \alpha > a$. Mamy więc

$$A = \{(x, \alpha) \in \Omega : x + a \cos \alpha > a\}.$$

Obliczamy pole powierzchni

$$S(A) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_{a(1-\cos\alpha)}^a dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos \alpha d\alpha = 2a.$$

Ponieważ $S(\Omega) = \pi a$, mamy

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2a}{\pi a} = \frac{2}{\pi}.$$

W ostatnim przykładzie wyraźnie widać, że wybór zbioru zdarzeń elementarnych nie jest od razu oczywisty. Inny wybór parametrów opisujących położenie igły (np. położenie środka i kąt) może dać ten sam wynik, ale nie musi. Jeśli przyjmiemy zamiast parametru α współrzędną pionową drugiego wierzchołka względem osi poziomej zaznaczonej na rysunku, czyli po prostu $a \sin \alpha$, to obliczanie prawdopodobieństwa jako stosunku odpowiednich pól będzie dawało inne wyniki. Łatwo zauważyć, że chodzi o to, że jacobian odwzorowania opisującego zmianę parametryzacji nie jest stały. Powstaje pytanie, który z wzorów na prawdopodobieństwo jest dobry. Odpowiedź nie jest prosta. Każdy z przyjętych wzorów może być dobry — opisują one *różne* doświadczenia. Rozstrzygnięcie pytania, który wzór należy przyjąć do opisu danego doświadczenia może wymagać bliższego przyjrzenia się sposobowi wykonywania prób. Przyjęcie jakiejś symetrii może wyróżnić jeden z wzorów na prawdopodobieństwo. Inne podejście oferuje statystyka. Zauważmy, że nawet w przypadku rzutów kostką możemy mieć wątpliwości co do symetryczności kostki lub sposobu rzucania. Wykonanie długiej serii rzutów daje pewne wskazówki co do wyboru prawdopodobieństw.

5.2 Prawdopodobieństwo warunkowe. Zdarzenia niezależne

Definicja 33 Niech A i B będą zdarzeniami losowymi, oraz $P(B) \neq 0$. Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A pod warunkiem B nazywamy liczbę

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Z pojęciem tym związane są następujące dwa pożyteczne wzory:

Twierdzenie 78 (Wzór na prawdopodobieństwo całkowite) *Załóżmy, że mamy dany ciąg (skończony lub nie) zdarzeń losowych B_i , $P(B_i) \neq 0$ spełniający następujące warunki:*

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, czyli zdarzenia te parami się wykluczają,

2. $\cup_i B_i = \Omega$ – wyczerpują wszystkie możliwości.

Wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ zachodzi wzór

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

Wzór ten wyprowadza się bardzo prosto. Zauważmy najpierw, że zbiory $A \cap B_i$ są parami rozłączne oraz $A = \cup_i A \cap B_i$. Wobec tego

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

Zakładając dodatkowo, że $P(A) \neq 0$ wyprowadzimy stąd drugi interesujący wzór.

Twierdzenie 79 (WZÓR BAYESA)

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_k P(A|B_k)P(B_k)}.$$

Aby docenić znaczenie tego wzoru zastosujemy go do następującego, aktualnego ze względu na zbliżającą się sesję zadania.

Zadanie. Studenci zdawali egzamin u jednego z dwóch egzaminatorów. U pierwszego zdawało 30% studentów, a reszta u drugiego. Pierwszy egzaminator oblał 80% zdających, a drugi tylko 50%. Przypadkowo spotkany student stwierdza, że oblał egzamin. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zdawał u pierwszego egzaminatora?

Zacznijmy od wprowadzenia oznaczeń. Niech B_1 oznacza zdawanie u pierwszego, B_2 – u drugiego egzaminatora, a A – oblanie egzaminu. Dane wymienione w zadaniu to: $P(B_1) = 0,3$, $P(B_2) = 0,7$, $P(A|B_1) = 0,8$ oraz $P(A|B_2) = 0,5$. Szukane jest $P(B_1|A)$. Podstawiamy do wzoru Bayesa.

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{0,8 \cdot 0,3}{0,8 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,7} \\ &= \frac{24}{59} \approx 0,41. \end{aligned}$$

Zdarzenia niezależne

Niech A i B będą zdarzeniami losowymi. Załóżmy, że $P(B) \neq 0$. Zdarzenia te uważamy za niezależne, jeżeli

$$P(A|B) = P(A).$$

Podstawiając tutaj to, co trzeba w miejsce prawdopodobieństwa warunkowego otrzymamy $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Postać ta lepiej nadaje się do przyjęcia jako definicja, ponieważ nie trzeba zakładać, że $P(B) \neq 0$, poza tym widoczna jest symetria. Podobną definicję przyjmujemy dla większej liczby zdarzeń.

Definicja 34 Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ogólniej, układ zdarzeń losowych $\{A_1, \dots, A_n\}$ nazywamy niezależnym, jeżeli dla dowolnie wybranego podukładu $\{A_{n_1}, \dots, A_{n_k}\}$ zachodzi równość

$$P(A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_k}) = P(A_{n_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{n_k}).$$

Jako zadanie dla czytelnika pozostawiamy podanie przykładu trzech zdarzeń, z których każde dwa są niezależne, a trójka nie jest układem niezależnym.

Przykład. Doświadczenie polega na n -krotnym rzucaniu monetą. Zakładamy, że wyniki poszczególnych rzutów są niezależne, a prawdopodobieństwo wyrzucenia orła za każdym razem jest takie samo i równa się p . Przekładając to na bardziej formalny język stwierdzamy, że mamy do czynienia z układem n zdarzeń niezależnych A_1, \dots, A_n , ponadto $P(A_i) = p$, $i = 1, \dots, n$. Wyrzuceniu za i -tym razem reszki odpowiada dopełnienie zbioru A_i , czyli $\Omega - A_i$. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia równa się $1 - p$.

Obliczymy prawdopodobieństwo $p(k)$ tego, że w n rzutach orzeł wyjdzie k razy. Istnieją tutaj różne możliwości związane z tym, że kolejność, w jakiej wychodzą orły i reszki może być różna. Oznacza to tyle, że zdarzenie, o które chodzi, rozkłada się na sumę rozłącznych

zdarzeń takiego oto typu: $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap (\Omega - A_{i_{k+1}}) \cap (\Omega - A_{i_n})$, gdzie i_1, \dots, i_n są to liczby $1, \dots, n$ wzięte w jakiejś innej kolejności. Prawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń, zgodnie z założeniem o niezależności, równa się $p^k(1-p)^{n-k}$. Możliwości, o których mowa, jest tyle, na ile sposobów można wybrać k elementów ze zbioru n -elementowego, czyli $\binom{n}{k}$. Wobec tego

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

5.3 Zmienna losowa. Wartość oczekiwana.

Zmienne losowe są to funkcje na zbiorze zdarzeń elementarnych Ω . Po to, aby można było obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń związanych z tymi funkcjami potrzebne jest dodatkowe założenie pewnego rodzaju regularności.

Definicja 35 Zmienną losową nazywamy funkcję $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ taką, że dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$ zbiór $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\}$ należy do \mathcal{A} .

Zwykle stosuje się krótsze oznaczenie zbiorów tego typu, jak występujący w tej definicji, pisze się po prostu $\{X < a\}$. Własności zbioru zdarzeń losowych \mathcal{A} pozwalają na udowodnienie, że jeśli X jest zmienną losową, to również zbiory $\{X \leq a\}$, $\{X > a\}$, $\{X \geq a\}$, $\{a < X < b\}$ są elementami \mathcal{A} , czyli zdarzeniami losowymi. Przykłady zmiennych losowych podamy razem z przykładami obliczania wartości oczekiwanej, do określenia której teraz przystępujemy.

Metoda definiowania wartości oczekiwanej polega z grubsza na tym, że zbiór wartości zmiennej losowej X dzieli się na przedziały Δ_i o niewielkiej długości, w każdym z nich wybiera się jakąś liczbę x_i , a następnie tworzy się przybliżenie wartości oczekiwanej w postaci sumy $\sum_i x_i P(X_i \in \Delta_i)$. Wartością oczekiwaną nazywa się granicę otrzymanych sum, gdy długość przedziałów Δ_i dąży do zera. W przypadku nieograniczonych zmiennych losowych trzeba zachować pewną ostroż-

ność, bowiem nie zawsze taka procedura daje ten sam wynik².

Jeśli zmienna losowa X przyjmuje tylko pewien ciąg wartości x_i (ciąg ten może być skończony), to jej wartość oczekiwana wyraża się wzorem

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i).$$

Wzór ten może sprawiać trudności w przypadku, gdy zbiór wartości x_i nie jest ograniczony. Nie nastęrczającą kłopotów wartość oczekiwaną otrzymuje się wtedy, gdy szereg jest bezwzględnie zbieżny, co jest równoważne całkowalności zmiennej X .

Łatwo sprawdzić, że wartość oczekiwana ma następujące własności:

1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$,
2. $E(\alpha X) = \alpha E(X)$, $\alpha \in \mathbf{R}$,
3. $X \geq 0 \implies E(X) \geq 0$.

Przykłady.

1. Obliczymy wartość oczekiwaną liczby wyrzuconych orłów w doświadczeniu opisanym w poprzednim punkcie. Niech X oznacza

²Oto dokładniejsza definicja wartości oczekiwanej zmiennej losowej. Zmienną losową X nazywamy *całkowalną*, jeżeli istnieje (skończona) granica

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} n\epsilon P(n\epsilon \leq |X| < (n+1)\epsilon).$$

Jeśli zmienna losowa X jest całkowalna to jej *wartością oczekiwaną* nazywamy granicę (której istnienie można wykazać)

$$E(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\epsilon P(n\epsilon \leq X < (n+1)\epsilon).$$

Termin “zmienna całkowalna” związany jest z tym, że wartość oczekiwana jest po prostu całką danej funkcji X , inaczej definiowaną niż całka Riemanna (zbór Ω wcale nie musi być podzbiorem \mathbf{R}^n), ale o podobnych własnościach.

zmienną losową dającą tę liczbę. Mamy

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k p(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Do obliczenia tej sumy wykorzystamy tożsamość

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Różniczkujemy stronami po x i mnożymy przez x

$$xn(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k y^{n-k}.$$

Podstawiając $x = p$ i $y = 1 - p$ otrzymujemy

$$E(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$$

2. Pewien student postępuje według ustalonych zasad: nie uczy się wcale, a do egzaminu przystępuje przy każdej okazji. Zakładając, że prawdopodobieństwo zdania egzaminu w pojedynczej próbie jest zawsze takie samo (bo w międzyczasie przecież się nie uczy), równe p - na przykład 20%, a wyniki kolejnych prób są niezależne (student ten stara się wyglądać bardzo niepozornie, żeby egzaminator go nie zapamiętał), należy obliczyć wartość oczekiwaną liczby prób, które podejmuje aż do zdania egzaminu³. Prawdopodobieństwo zdania egzaminu za k -tym razem jest równe $(1-p)^{k-1}p$, należy więc obliczyć sumę

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{p}.$$

Podstawiając $p = 0,2$ mamy $N = 5$.

³Przy okazji radzimy czytelnikowi, aby przekonał się o tym, że prawdopodobieństwo tego, że ów student kiedykolwiek zda ten egzamin jest równe 1.

Rozkład zmiennej losowej

Przez *rozkład zmiennej losowej* X rozumiemy podanie prawdopodobieństw wszystkich zdarzeń typu $a \leq X < b$. Rozkład zmiennej losowej można całkowicie opisać podając jedną funkcję, zwaną *dystrybuantą* tego rozkładu, określoną w następujący sposób:

$$F_X x := P(X \leq x).$$

Dystrybuanta nie jest najwygodniejszym sposobem opisu rozkładu. Większość rozkładów spotykanych w praktyce dopuszcza prostszy opis. Dotyczy to zmiennych losowych następujących dwóch typów:

1. Jeśli zmienna losowa X przybiera tylko pewien (skończony lub nie) ciąg wartości (x_i) , to wystarczy podać ciąg prawdopodobieństw

$$p_k = P(X = x_k).$$

Ciąg ten spełnia warunki

$$p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1.$$

Mówimy, wtedy, że zmienna X ma *rozkład punktowy*.

2. Jeśli istnieje funkcja ρ_X taka, że

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b \rho_X(x) dx,$$

to mówimy, że X ma *rozkład ciągły*, a funkcję ρ nazywamy *gęstością rozkładu*. Gęstość rozkładu spełnia warunki

$$\rho \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1.$$

W przypadku rozkładu ciągłego dystrybuanta F_X jest różniczkowalna i zachodzi wzór

$$\rho_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x).$$

Mając dany rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X możemy obliczyć wartość oczekiwaną dowolnej (ściślej: takiej, żeby odpowiednia całka lub suma miała sens) funkcji f tej zmiennej losowej. W przypadku rozkładu punktowego prowadzi to do wzoru

$$E(f(X)) = \sum_k f(x_k)p_k,$$

a w przypadku rozkładu ciągłego do wzoru

$$E(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_X(x) dx.$$

W wielu przypadkach znajomość rozkładu nie jest potrzebna, wystarczy znajomość kilku liczb związanych z tym rozkładem. Jest to znana nam wartość oczekiwana $E(X)$ oraz *wariancja* $V(X)$ zdefiniowana wzorem

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Dla rozkładu punktowego wyrażają się one wzorami

$$E(X) = \sum_k x_k p_k, \quad V(X) = \sum_k (x_k - E(X))^2 p_k,$$

a dla rozkładu ciągłego wzorami

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_X(x) dx, \quad V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \rho_X(x) dx.$$

Przykłady rozkładów prawdopodobieństwa.

1. Rozkład Bernoulliego

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

2. Rozkład Poissona

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

3. Rozkład Gaussa

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right).$$

Parametry σ i μ w rozkładzie Gaussa są związane z wartością oczekiwaną i wariancją, mianowicie $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$.

Dla układu zmiennych losowych pożyteczne okazuje się pojęcie *łącznego rozkładu* tych zmiennych, w przypadku dwóch zmiennych opisanego przez prawdopodobieństwa $P(a < X_1 < b \cap c < Y < d)$. Rozkłady łączne w większości przypadków można opisywać podobnie, jak rozkłady pojedynczych zmiennych, to używając prawdopodobieństw poszczególnych wartości albo gęstości.

Zmienne losowe X, Y nazywamy niezależnymi, jeżeli dowolne dwa zdarzenia typu $a < X < b$ i $c < Y < d$ są niezależne. W przypadku większej liczby zmiennych niezależność określamy analogicznie, jak w przypadku zdarzeń losowych. Jeśli niezależne zmienne losowe mają rozkłady ciągłe, to rozkład łączny również jest ciągły, a jego gęstość jest iloczynem gęstości rozkładów tych zmiennych.

Przypuśćmy, że znamy rozkład zmiennej losowej X . Możemy zadać pytanie o rozkład zmiennej losowej $f(X)$, gdzie f jest daną funkcją. Nie będziemy się tutaj zajmowali przypadkiem ogólnym, rozważymy szczególny przypadek, mający pewne znaczenie w teorii kinetycznej gazów.

Założmy, że trzy składowe prędkości cząsteczki gazu opisana są przez niezależne zmienne losowe X, Y, Z o rozkładzie Gaussa z takimi samymi parametrami μ i σ . Zakładamy przy tym, że wartość oczekiwana prędkości jest równa zero, czyli $\mu = 0$. Znajdziemy rozkład zmiennej losowej $E = m(X^2 + Y^2 + Z^2)/2$ opisującej energię kinetyczną cząstki (m jest masą cząstki). Rozkład łączny zmiennych losowych X, Y, Z ma gęstość

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{\pi})^3} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sigma^2}\right).$$

Obliczamy prawdopodobieństwo tego, że energia kinetyczna jest mniejsza od jakiegoś ε .

$$P(E < \varepsilon) = \int \int \int_{m \frac{x^2+y^2+z^2}{2} < \varepsilon} dx dy dz \rho(x, y, z).$$

Przechodzimy do zmiennych sferycznych

$$\begin{aligned} P(E < \varepsilon) &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{\pi})^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}} dr e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} r^2 \sin \theta \\ &= \frac{4\pi}{(\sigma\sqrt{\pi})^3} \int_0^{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}} dr e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} r^2. \end{aligned}$$

Gęstość rozkładu obliczamy różniczkując dystrybuantę:

$$\begin{aligned} \rho_E(\varepsilon) &= \frac{dP(E < \varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{4\pi}{(\sigma\sqrt{\pi})^3} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}} dr e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} r^2 \\ &= \frac{4\pi}{(\sigma\sqrt{\pi})^3} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m^3}} e^{-\frac{2\varepsilon}{m\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Znane z wykładów fizyki wzory otrzymamy biorąc pod uwagę to, że σ^2 jest wartością oczekiwaną kwadratu każdej ze składowych prędkości, a związek σ z temperaturą opisuje wzór $\frac{1}{2}m\sigma^2 = \frac{1}{2}kT$.

5.3.1 Funkcja charakterystyczna

Niech X będzie zmienną losową.

Definicja 36 Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X zdefiniowana jest wzorem:

$$\varphi_X(t) = E(e^{iX}).$$

Ponieważ, jak umówiliśmy się na początku, X przybiera wartości rzeczywiste, więc funkcja charakterystyczna φ_X jest określona na całej osi rzeczywistej. Jeśli X ma rozkład ciągły o gęstości ρ_X to

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \rho_X(x) dx.$$

Funkcja charakterystyczna jest więc po prostu transformatą Fouriera gęstości rozkładu (w innych działach matematyki zwykle stosuje się inne umowy dotyczące stałych stojących przed całką i w wykładniku).

Nie będziemy tutaj wymieniać wszystkich podstawowych własności funkcji charakterystycznej, poprzestaniemy na tych, z których będziemy korzystali na ćwiczeniach i w dalszej części wykładu.

Twierdzenie 80 (WŁASNOŚCI FUNKCJI CHARAKTERYSTYCZNEJ)

Niech X będzie zmienna losowa a φ_X jej funkcją charakterystyczną.

1. φ_X jest funkcja ciągła.
2. Jeśli X posiada wartość oczekiwaną, to φ_X jest różniczkowalna i pochodna jej jest ciągła.
3. Jeśli $V(X) < \infty$, to φ_X jest dwukrotnie różniczkowalna i druga pochodna jest ciągła.
4. Pochodne funkcji charakterystycznej spełniają wzory:

$$\begin{aligned}\varphi_X(0) &= 1, \\ \varphi'_X(0) &= iE(X), \\ \varphi''_X(0) &= -E(X^2).\end{aligned}$$

5. Jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, to

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Dowód 1–4 polega na zróżniczkowaniu stronami po t wzoru definiującego funkcję charakterystyczną. Trudność sprawia uzasadnienie tego, że z różniczkowaniem można wejść pod znak wartości oczekiwanej. Nie jest to sprawa trywialna, ale dowodu tutaj nie podamy, można go znaleźć w książkach poświęconych teorii całki i miary. Dowód punktu 5 pozostawiamy jako ćwiczenie.

5.4 Prawa wielkich liczb i twierdzenia graniczne

Zamieszczamy tutaj dwa twierdzenia mające znaczenie ze względu na zagadnienia interpretacji rachunku prawdopodobieństwa, o czym będzie jeszcze mowa. Badania w dziedzinach, z których pochodzą te dwa twierdzenia są rozwijane do chwili obecnej znajdując zastosowania również w dziedzinach nie mających bezpośredniego związku z rachunkiem prawdopodobieństwa.

5.4.1 Prawo wielkich liczb

Jedna z najczęściej przyjmowanych interpretacji prawdopodobieństwa, tak zwana interpretacja częstościowa mówi, że jeśli prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia wynosi p , to, przy wielokrotnym powtarzaniu doświadczenia związanego tym zdarzeniem, częstość jego zachodzenia powinna dążyć do p gdy liczba prób dąży do nieskończoności. Ponieważ można obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń dotyczących serii doświadczeń, to można zapytać, czy częstość zachodzenia danego zdarzenia w ciągu (niezależnych) prób dąży do jego prawdopodobieństwa. Jeśli tak nie jest, to interpretacja częstościowa nie ma sensu.

Sformułujmy to trochę bardziej precyzyjnie. Zdarzenie losowe mające prawdopodobieństwo p można reprezentować za pomocą zmiennej losowej X przyjmującej wartość 1 z prawdopodobieństwem p i wartość 0 z prawdopodobieństwem $1 - p$. Ciągowi niezależnych doświadczeń odpowiadać będzie ciąg X_n niezależnych zmiennych losowych o rozkładach takich, jak rozkład zmiennej X . Jeśli wykonamy n prób, to zmienna $X_1 + \dots + X_n$ określa, ile razy wyszła jedynka, czyli ile razy zaszło interesujące nas zdarzenie. Aby otrzymać częstość, trzeba to podzielić przez liczbę prób, czyli przez n . Pytanie sprowadza się więc do tego, czy

$$S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow p \text{ przy } n \rightarrow \infty.$$

Sformułowanie to nie jest jeszcze dostatecznie precyzyjne, ponieważ chodzi tutaj o zbieżność ciągu funkcji, a to pojęcie ma w matematyce

wiele różnych znaczeń. Zajmiemy się tutaj tak zwanym słabym prawem wielkich liczb, które orzeka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ $P(|S_n - p| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$. Twierdzenie to, pochodzące od J. Bernoulliego, można próbować udowodnić korzystając z faktu, że rozkład zmiennej losowej S_n jest zupełnie znany, ponieważ $X_1 + \dots + X_n$ ma rozkład Bernoulliego. Droga ta prowadzi jednak do dość długich rachunków. Udowodnimy tutaj twierdzenie trochę ogólniejsze, a przy tym znacznie prostszą metodą.

Twierdzenie 81 (SŁABE PRAWO WIELKICH LICZB) *Niech (X_i) będzie ciągiem zmiennych losowych o skończonych wariancjach, spełniającym warunki*

a)

$$E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) \quad \text{dla wszystkich par } i \neq j,$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = 0.$$

Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Ważny jest szczególny przypadek tego twierdzenia, gdy zmienne X_i są niezależne i mają taki sam rozkład. Wtedy twierdzenie to głosi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E(X)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

$E(X)$ oznacza tutaj wartość oczekiwaną tych zmiennych, taką samą dla każdej z nich, bo wartość oczekiwana zależy tylko od rozkładu. Warunek a) łatwo wyprowadza się z niezależności.

Dowód. Udowodnimy najpierw użyteczną, choć prostą nierówność:

Lemat 1 (NIERÓWNOŚĆ CZEBYSZEWA) *Niech X będzie zmienną losową o skończonej i różnej od zera wariancji. Niech $\sigma^2 = V(X)$ oraz $k > 0$. Wtedy*

$$P(|X - E(X)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

5.4. PRAWA WIELKICH LICZB I TWIERDZENIA GRANICZNE 239

Dowód tej nierówności przedstawimy dla zmiennej X o rozkładzie ciągłym (dowód ogólny, poza koniecznością wprowadzenia pewnych pojęć nie wnosi nic istotnego).

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(|X - E(X)|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 d\rho_X(x) \\ &\geq \int_{\{x: |x - E(X)| \geq k\sigma\}} (x - E(X))^2 d\rho_X(x) \\ &\geq k^2 \sigma^2 \int_{\{x: |x - E(X)| \geq k\sigma\}} 1 d\rho_X(x) = k^2 \sigma^2 P(|X - E(X)| \geq k\sigma).\end{aligned}$$

Dzieląc stronami przez $\sigma^2 k^2$ otrzymuje się szukaną nierówność. Zanim przejdziemy do dowodu Twierdzenia 81 udowodnimy jeszcze

Lemat 2 Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą zmiennymi spełniającymi warunki:

$$E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) \quad \text{dla każdej pary } i \neq j.$$

Wtedy $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$.

Rzeczywiście, ponieważ dla $i \neq j$ mamy

$$\begin{aligned}&E((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))) \\ &= E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) - E(X_j)E(X_i) + E(X_i)E(X_j) = 0,\end{aligned}$$

to

$$\begin{aligned}V(X_1 + \dots + X_n) &= E\left((X_1 + \dots + X_n - E(X_1 + \dots + X_n))^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^n E\left((X_i - E(X_i))^2\right) + 2 \sum_{i \neq j} E((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))) \\ &= V(X_1) + \dots + V(X_n).\end{aligned}$$

Przechodzimy do dowodu Twierdzenia 81. Podstawiając w nierówności Czebyszewa $\varepsilon = k\sigma$ mamy

$$\begin{aligned}P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{V\left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

□

5.4.2 Przykład twierdzenia granicznego

W odróżnieniu od praw wielkich liczb, które mówiły o zbieżności pewnych ciągów zmiennych losowych, twierdzenia graniczne zajmują się zbieżnością *rozkładów* pewnych zmiennych losowych. Twierdzeń tego rodzaju używa się czasem jako argumentu, gdy zakłada się, że jakaś zmienna losowa ma pewien konkretny rozkład, na przykład Gaussa lub Poissona.

Twierdzenie 82 (SZCZEGÓLNY PRZYPADEK CENTRALNEGO TWIERDZENIA GRANICZNEGO) *Niech (X_i) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i skończonej s^2 (tzn. $V(X_i) = s^2, i = 1, 2, \dots$). Wtedy rozkłady zmiennych Y_n zdefiniowanych wzorem*

$$Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - E(X_1 + \dots + X_n)}{s\sqrt{n}}$$

dążą do rozkładu Gaussa o parametrach $\mu = 0, \sigma = 1$.

Idea dowodu. Bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że X_i mają wartość oczekiwaną równą zeru. Ponieważ zmienne losowe X_i mają ten sam rozkład, to mają one również tę samą funkcję charakterystyczną, która oznaczymy przez φ . Ponieważ funkcja charakterystyczna sumy niezależnych zmiennych losowych jest iloczynem ich funkcji charakterystycznych (twierdzenie 80, punkt 5), możemy łatwo obliczyć funkcję charakterystyczną φ_{Y_n} . Mianowicie

$$\varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Skąd, biorąc pod uwagę to, że dla $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{\alpha X}(t) = E(e^{it\alpha X}) = \varphi_X(\alpha t)$$

mamy

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left(\varphi \left(\frac{t}{s\sqrt{n}} \right) \right)^n.$$

Ponieważ X_i mają skończoną wariancję, φ ma ciągłą drugą pochodną. Piszemy wzór Taylora dla φ :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \varphi''(\theta t)\frac{t^2}{2}, \quad \text{gdzie } 0 < \theta < 1.$$

5.5. KILKA SŁÓW O INTERPRETACJI PRAWDOPODOBIEŃSTWA 241

Ponieważ $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = -s^2$, mamy

$$\varphi(t) = 1 - \frac{s^2}{2}t^2 + (\varphi''(\theta t) - \varphi''(0))\frac{t^2}{2}.$$

Wobec tego

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + (\varphi''(\theta_n t/s\sqrt{n}) - \varphi''(0))\frac{t^2}{s^2 n} \right]^n.$$

Przechodząc do granicy $n \rightarrow \infty$ z wykorzystaniem ciągłości φ'' mamy

$$\varphi_{Y_n}(t) \rightarrow e^{-t^2},$$

skąd wynika teza twierdzenia (trzeba tutaj zauważyć, że mamy do czynienia ze zbieżnością jednostajną funkcji tworzących, która pociąga za sobą zbieżność rozkładów).

5.5 Kilka słów o interpretacji prawdopodobieństwa

W zadaniach i przykładach rozważanych w obecnym rozdziale na początku zadawaliśmy pewne prawdopodobieństwa, po czym z większym lub mniejszym trudem obliczaliśmy inne prawdopodobieństwa. Powinny nas więc dręczyć dwa pytania:

1. Na podstawie jakich argumentów zadajemy prawdopodobieństwa na początku?
2. Co oznaczają obliczone prawdopodobieństwa?

Pytania te są oczywiście blisko związane. Gdy zadajemy prawdopodobieństwo, to powinniśmy wiedzieć, *co* zadajemy, potrzebna jest więc choćby prowizoryczna odpowiedź na drugie pytanie. Nie udzielimy tutaj odpowiedzi, zresztą nie jest to chyba możliwe. Wymienimy tylko kilka kierunków, w których szuka się odpowiedzi, a to, co się znajduje, jest na ogół lepszym zrozumieniem samego pytania.

ad 1. Można tu wymienić dwie metody zadawania prawdopodobieństw, oparte na zupełnie różnych argumentach.

Pierwsza z nich polega na zadaniu prawdopodobieństw przed wykonaniem doświadczeń. Typowe są tutaj dwa przykłady: przyjęcie jednakowego prawdopodobieństwa wszystkich wyników rzutu symetryczną kostką, oraz przyjmowanie rozkładu Gaussa jako podstawy przy obliczaniu dokładności pomiarów.

Argument symetrii w przypadku rzutu kostką można wzmocnić. Jeśli uważamy kostkę za element dosyć prostego układu mechanicznego, którego zachowanie jest jednoznacznie wyznaczone przez dane początkowe, np. położenie i prędkość, to od razu powstaje wątpliwość, po co tutaj mówić o prawdopodobieństwie, skoro wynik jest zdeterminowany jednoznacznie. Weźmiemy jednak pod uwagę to, że warunki początkowe zadajemy zawsze z pewną tolerancją. Tolerancję tę możemy uwzględnić zadając jakiś rozkład prawdopodobieństwa dla warunków początkowych. Okazuje się, że, niezależnie od tego, jaki rozkład wybierzemy (dokładniej: dla prawie każdego rozkładu, przy czym temu “prawie” można nadać ścisły sens), w wyniku zastosowania praw mechaniki otrzymujemy zawsze te same – równe – prawdopodobieństwa wyników rzutu kostką. Nie każdy układ mechaniczny posiada takie własności. Badaniem problemów tego rodzaju zajmuje się dział matematyki zwany *teorią ergodyczną*.

Wybieranie rozkładu Gaussa można popierać argumentem opartym na centralnym twierdzeniu granicznym, którego szczególny przypadek podaje Twierdzenie 82. Głosi ono z grubsza tyle, że jeśli dana zmienna losowa X jest sumą bardzo wielu niezależnych zmiennych losowych o mniej więcej takich samych wariancjach, to rozkład zmiennej X jest rozkładem Gaussa.

Druga metoda zadawania prawdopodobieństw czerpie dane z wykonanej serii doświadczeń. Prowadzi to do bardzo wielu problemów, zarówno matematycznych, jak i interpretacyjnych, tworzących dziedzinę zwaną *statystyką matematyczną*. Obydwie metody na ogół występują razem. Przykładem jest to, co zwykle stosuje się w rachunku błędów. Zakładamy, że badana zmienna ma rozkład Gaussa, ale parametry rozkładu dobieramy na podstawie wykonanej serii pomiarów.

ad 2. Chodzi tutaj o to, co rozumiemy na przykład przez to, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła równa się $1/2$. Od razu otwierają się dwie możliwości. Pierwsza polega na przypuszczeniu, że prawdopodobieństwo dotyczy pojedynczego rzutu, druga twierdzi, że chodzi tutaj o wyniki długich serii rzutów. Przyjmując pierwszą trzeba podać sposób rozumienia prawdopodobieństwa pojedynczego rzutu. Mówi się wtedy zwykle o tym, że opisuje ono stan naszej wiedzy na temat wyniku jeszcze nie wykonanego doświadczenia. Zarzut dotyczący subiektywnego charakteru tej interpretacji (“każdy wie coś innego”) odpiera się mówiąc, że chodzi tutaj o możliwą wiedzę, o to, co można wiedzieć, jeśli przeprowadza się doświadczenie według zadanego przepisu. Druga trudność tej interpretacji polega na tym, że w przypadku różnicy zdań na temat prawdopodobieństwa rozstrzygnięcie sporu odbywa się właśnie przez wykonanie długiej serii doświadczeń.

Interpretacja prawdopodobieństwa jako częstości występowania zdarzenia w długiej serii niezależnych doświadczeń wystawia się od razu na dwa zarzuty. Po pierwsze, każda seria, nawet najdłuższa, jest skończona, po drugie, skąd można wiedzieć, czy też, jak sprawdzić, że doświadczenia w tej serii są niezależne. Zwrócenie uwagi na skończoną długość serii prowadzi do pytania o to, co teoria przewiduje na temat częstości występowania danego zdarzenia w długiej, ale skończonej serii niezależnych doświadczeń. Teoria oczywiście nie przewiduje dokładnie wyniku takiej serii, lecz wypowiada się używając prawdopodobieństw. W pewnym sensie powraca się do punktu wyjścia, bowiem próba sprawdzenia prawdopodobieństwa drogą wykonania długiej serii doświadczeń nie daje kategoriycznego wyniku i prowadzi do dokładnie tych samych pytań, na które miała dać odpowiedź.

Jeśli przyjmiemy, że zdarzenia o prawdopodobieństwie bardzo bliskim jedności uważamy za pewne, a zdarzenia o prawdopodobieństwie bliskim zera za niemożliwe, to twierdzenia takiego typu, jak prawa wielkich liczb (Twierdzenie 81) dają jakieś rozwiązanie sprawy. Takiego rodzaju umowa jest jednak tylko umową i pytanie o jej uzasadnienie jest powrotem do punktu wyjścia.

Sprawa niezależności prób w serii stwarza między innymi problemy praktyczne. Przykłady takich problemów to: jak tasować karty, żeby rozkłady w różnych rozdaniach można było traktować jako niezależne,

jak konstruować generatory liczb losowych w komputerach. Jeden z pierwszych teoretyków brydża Ely Culbertson zatrudniał studentów, którzy tasowali i rozdawali karty zapisując rozkłady. Okazało się przy tym, że obliczone teoretycznie częstości nie zgadzają się z uzyskanymi w doświadczeniu, a różnice mają znaczenie praktyczne. Podobny efekt widzieliśmy oglądając wynik działania programu wykorzystującego generator liczb losowych w komputerze (z takich właśnie powodów nazywa się je liczbami pseudolosowymi).

Przedstawiliśmy tutaj w skrócie trudności związane z próbą wyjaśnienia pojęcia prawdopodobieństwa, jeśli pojęcie doświadczenia uważa się za znane. Założenie takie jest jednak bardzo wątpliwe. Każdy student fizyki wie, że wynik doświadczenia fizycznego z reguły, a może nawet zawsze, jest obciążony pewną niepewnością, zwaną błędem pomiaru. Oznacza to tyle, że wynikiem doświadczenia są w najlepszym przypadku jakieś prawdopodobieństwa.

Sugeruje to odwrócenie porządku wyjaśniania: przyjąć pojęcie prawdopodobieństwa za znane i wyjaśnić, uznane w takim ujęciu za pochodne, pojęcie doświadczenia. Zapewne można byłoby podjąć taką próbę, po czym napisać kilka stron krytyki, powrócić do punktu wyjścia itd. Na tym kończymy te uwagi, celem których było przede wszystkim postawienie pytań.