NOTATKI DO ĆWICZEŃ Z ANALIZY ZESPOLONEJ

Zebrał P.H. Chankowski

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\oint_\Gamma dz\, \frac{e^{1/z}}{1+z}\,.$$

w której kontur Γ jest okręgiem o środku w zerze i promieniu równym 2 (kółko na symbolu całki oznacza, że jest to całka po konturze zamkniętym).
Rozwiązanie: Funkcja podcałkowa $f(z)$ ma biegun prosty (tj. pierwszego rzędu) w $z=-1$ oraz punkt istotnie osobliwy w $z=0$.

$$\mathrm{res}\, f(z)|_{z=-1} = 1/e\,.$$

Residuum w $z=0$ najłatwiej znaleźć przez "inspekcję", wypisując odpowiednie szeregi:

$$f(z) = e^{1/z}(1+z)^{-1} = \left(1+\frac{1}{1!\,z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\dots\right)\left(1-z+z^2-z^3+\dots\right).$$

Wymnażając je widzimy, że współczynnik przy $1/z$ jest dany szeregiem

$$\begin{aligned}\mathrm{res}\, f(z)|_{z=0} &= \frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\dots\\ &= 1-\left(1+\frac{(-1)^1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\dots\right) = 1-e^{-1}\,.\end{aligned}$$

Zatem suma residuów w $z=-1$ i $z=0$ jest równa 1 i

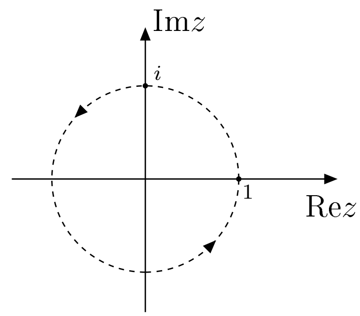
$$\int_\Gamma dz\, \frac{e^{1/z}}{1+z} = 2\pi i\,.$$

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a-\sin\theta}\,, \qquad\qquad |a|>1\,.$$

Rozwiązanie: Warunek $|a|>1$ zapewnia, że całka jest dobrze określona - mianownik nigdzie się nie zeruje. Całkę tę można obliczyć konwencjonalnie (co zrobimy dalej), ale można też przez residua. W tym celu podstawiamy $z=e^{i\theta}$, tak że zmienna z przebiega teraz zbiór liczb zespolonych o module równym 1. Wówczas $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, więc

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a-\sin\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz}\,\frac{1}{a-(1/2i)(z-1/z)} = -2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-2iaz-1}\,.$$



Rysunek 1: Kontur całkowania w płaszczyźnie zmiennej zespolonej z.

Zamknięty kontur całkowania, o równaniu $|z| = 1$, pokazany na rysunku 1, jest tu obiegany przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara. Skorzystaliśmy tu ze wzoru

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right).$$

Mianownik pod całką jest dwumianem i można go zapisać w postaci

$$z^2 - 2iaz - 1 = (z - z_+)(z - z_-)\,,$$

w której

$$z_\pm = i\left(a \pm \sqrt{a^2 - 1}\right),$$

są dwoma pierwiastkami równania $z^2 - 2iaz - 1 = 0$. Funkcja podcałkowa ma zatem dwa bieguny proste w $z = z_-$ i w $z = z_+$. Przyjmijmy na razie, że $a > 1$. W takim przypadku $|z_+| > 1$ ale z_- leży wewnątrz konturu, gdyż $|z_-| < 1$. Zatem zgodnie z twierdzeniem o residuach,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a - \sin\theta} &= 2\pi i \ \mathrm{res}\, \frac{-2}{(z - z_+)(z - z_-)}\bigg|_{z = z_-} \\ &= \frac{-4\pi i}{z_- - z_+} = \frac{-4\pi i}{-2i\sqrt{a^2 - 1}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}\,.\end{aligned}$$

Dla $a < -1$, gdy wyjściowa całka jest też dobrze określona, wewnątrz konturu $|z| = 1$ znalazłby się pierwiastek z_+ dwumianu i mielibyśmy

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a - \sin\theta} &= 2\pi i \ \mathrm{res}\, \frac{-2}{(z - z_+)(z - z_-)}\bigg|_{z = z_+} \\ &= \frac{-4\pi i}{z_+ - z_-} = \frac{-4\pi i}{2i\sqrt{a^2 - 1}} \\ &= -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}\,,\end{aligned}$$

jak też i powinno być, gdyż funkcja podcałkowa jest wtedy stale ujemna.

Konwencjonalnie dokonalibyśmy w wyjściowej całce podstawienia

$$t = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}, \qquad d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2},$$

co sprowadziłoby ją do

$$\begin{aligned}\frac{2}{a}\int\frac{dt}{t^2-(2/a)t+1} &= \frac{2}{a}\int\frac{dt}{(t-1/a)^2+(a^2-1)/a^2}\\ &= \frac{2a}{a^2-1}\int\frac{dt}{\left[\frac{a\,t}{\sqrt{a^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right]^2+1}\\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\left(t-\frac{1}{a}\right)\right].\end{aligned}$$

Gdy θ przebiega od 0 do 2π, wówczas $t = \mathrm{tg}(\theta/2)$ biegnie od 0 do $+\infty$ osiąganej, gdy $\theta \to \pi$ (od strony wartości mniejszych), a następnie od $-\infty$ (gdy θ przekracza π) do 0 osiąganego, gdy $\theta = 2\pi$. Zatem gdy θ dochodzi od zera do π funkcja $I(\theta)$

$$\begin{aligned}I(\theta) &\equiv \int_0^\theta\frac{d\varphi}{a-\sin\varphi}\\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left\{\mathrm{arctg}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}-\frac{1}{a}\right)\right]-\mathrm{arctg}\left[-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right]\right\}\end{aligned}$$

dochodzi (dla $a > 0$) do wartości

$$\begin{aligned}I(\pi) &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left\{\mathrm{arctg}(+\infty)-\mathrm{arctg}\left[-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right]\right\}\\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left\{\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\left[-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right]\right\}\end{aligned}$$

i po przekroczeniu przez φ wartości π (gdy $\mathrm{tg}(\theta/2)$ nagle spada do $-\infty$) nie powinna (jako całka z funkcji dodatniej!) zmaleć. Pokazuje to, że po drugiej stronie punktu $\theta = \pi$ należy wybrać tę gałąź funkcji arctg, na której

$$\mathrm{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}+\pi$$

(a nie $-\pi/2$). Na tej drugiej gałęzi wartością funkcji

$$\mathrm{arctg}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}-\frac{1}{a}\right)\right]$$

odpowiadającą $\theta = 2\pi$ jest

$$\mathrm{arctg}\left[-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right]+\pi$$

i stąd otrzymujemy[1]

$$I(2\pi) \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a - \sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,,$$

tak jak metodą wykorzystującą residua. Powtarzając powyższą analizę dla $a < 0$ otrzymamy oczywiście ten sam wynik z przeciwnym znakiem.

Zadanie
Obliczyć całkę[2]

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta}\,, \qquad\qquad |a| > 1\,.$$

Rozwiązanie: Warunek $|a| > 1$ zapewnia, że całka jest dobrze określona - mianownik nigdzie się nie zeruje. Dokonując jak w poprzednim przykładzie podstawienia $z = e^{i\theta}$ i korzystając ze wzoru

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right),$$

sprowadzamy całkę do

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}\,.$$

Pierwiastkami dwumianu w mianowniku pod całką są teraz

$$z_+ = -a + \sqrt{a^2-1}\,, \qquad z_- = -a - \sqrt{a^2-1}\,,$$

z czego, gdy $a > 0$, tylko z_+ leży wewnątrz konturu $|z| = 1$. Zatem

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{2}{i}\,\frac{2\pi i}{z_+ - z_-} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

[1] Aby uniknąć zmieniania gałęzi funkcji arctg można wyjściową całkę zapisać jako sumę

$$I(2\pi) = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a - \sin\theta} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{a - \sin\theta} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a - \sin\theta} + \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta}\,.$$

Po dokonaniu podstawienia standardowego otrzymamy

$$I = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{1}{a}\right)\right]_0^{\pi} + \operatorname{arctg}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{a}\right)\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

[2] Oczywiście musi ona dać to samo, co poprzednia całka, bo cosinus przyjmuje na odcinku $[0, 2\pi]$ te same wartości co sinus, tylko dla przesuniętych wartości kąta θ, ale miara $d\theta$ jest niezmiennicza względem przesunięć.

Dla $a < -1$ wewnątrz konturu $|z| = 1$ leżałby pierwiastek z_- i wynikiem całki byłoby $-2\pi/\sqrt{a^2-1}$ (wyjściowa funkcja podcałkowa byłaby wtedy stale ujemna).

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+b\cos\theta)^2}\,, \qquad\qquad |b| < 1\,.$$

Rozwiązanie: Warunek $|b| < 1$ zapewnia, że całka jest dobrze określona - mianownik nigdzie się nie zeruje. Dokonując tak jak w poprzednich przykładach podstawienia $z = e^{i\theta}$ mamy

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+b\cos\theta)^2} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz}\,\frac{1}{[1+(b/2)(z+1/z)]^2}\\ &= \frac{4}{ib^2}\oint_{|z|=1} \frac{dz\,z}{[z^2+(2/b)z+1]^2}\,.\end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio mianownik można zapisać w postaci $[(z-z_+)(z-z_-)]^2$, gdzie

$$z_\pm = \frac{1}{b}\left(-1 \pm \sqrt{1-b^2}\right),$$

przy czym dla $0 < b < 1$ tylko $|z_+| < 1$, tj. wewnątrz konturu $|z| = 1$ funkcja podcałkowa ma jeden biegun drugiego rzędu w $z = z_+$. Obliczamy residuum $f(z)$ w tym punkcie:

$$\begin{aligned}\operatorname{res} f(z)|_{z=z_+} &= \frac{d}{dz}\frac{z}{(z-z_-)^2}\bigg|_{z=z_+} = \frac{1}{(z_+-z_-)^2} - \frac{2z_+}{(z_+-z_-)^3}\\ &= -\frac{z_++z_-}{(z_+-z_-)^3} = \frac{b^2}{4(1-b^2)^{3/2}}\,.\end{aligned}$$

Stąd

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+b\cos\theta)^2} = \frac{4}{ib^2}\,2\pi i\,\frac{b^2}{4(1-b^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{(1-b^2)^{3/2}}\,.$$

Ten sam wynik samo można uzyskać korzystając z całki obliczonej w poprzednim zadaniu:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+b\cos\theta)^2} &= \frac{1}{b^2}\left[-\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}\right]_{a=1/b}\\ &= \frac{1}{b^2}\left[-\frac{\partial}{\partial a}\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\right]_{a=1/b} = \frac{2\pi}{b^2}\left[\frac{a}{(a^2-1)^{3/2}}\right]_{a=1/b}\\ &= \frac{b}{|b|}\,\frac{2\pi}{(1-b^2)^{3/2}}\,.\end{aligned}$$

Całkę tę można oczywiście obliczyć stosując konwencjonalne podstawienie, ale z uwagi na drugą potęgę w mianowniku jest to znacznie bardziej skomplikowane (z tym, że podstawienie $t = \mathrm{tg}(\theta/2)$ daje funkcję pierwotną, a metoda residuów stosuje się tylko do całki w granicach od 0 do 2π).

Zadanie
Metodą residuów obliczyć całkę

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta}\,, \qquad 0 < |b| < |a|\,.$$

Podać także wynik całki

$$\int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\sin^2\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta}\,.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy standardowo $z = e^{i\theta}$ i otrzymujemy

$$I = -\frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz}\,\frac{(z - 1/z)^2}{2a + b(z + 1/z)} = \frac{i}{2b}\oint_{|z|=1} dz\,\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2 + 2(a/b)z + 1)}\,.$$

Funkcja podcałkowa ma jeden biegun drugiego rzędu w $z = 0$ oraz dwa bieguny proste w $z_\pm = -(a/b) \pm \sqrt{(a/b)^2 - 1}$, z których, jeśli $a/b > 1$, tylko z_+ znajduje się wewnątrz konturu (z_-, gdy $a/b < -1$). Jej residua w $z = z_+$ oraz w $z = z_-$ znajdujemy standardowo:

$$\begin{aligned} \mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=z_+} &= \frac{(z_+ - 1/z_+)^2}{z_+ - z_-} \;=\; 2\sqrt{(a/b)^2 - 1}\,, \\ \mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=z_-} &= \frac{(z_- - 1/z_-)^2}{z_- - z_+} = -2\sqrt{(a/b)^2 - 1}\,. \end{aligned}$$

Residuum w $z = 0$ (biegun drugiego rzędu) najłatwiej znaleźć dokonując rozwinięcia:

$$f(z) = \frac{1 - 2z^2 + z^4}{z^2}\left(1 - 2\frac{a}{b}\,z - z^2 + \dots\right) = \frac{1}{z^2} - 2\frac{a}{b}\,\frac{1}{z} + \dots$$

Tak więc zgodnie z twierdzeniem o residuach otrzymujemy

$$I = \frac{i}{2b}\,2\pi i\left(-2\frac{a}{b} \pm 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right) = \frac{2\pi}{b}\left(\frac{a}{b} \mp \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right),$$

gdzie górny (dolny) znak odnosi się do $a/b > 1$ ($a/b < -1$).

Z powyższego wyniku, podstawiając $a \to 1 + a^2$ i $b \to -2a$, otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{\sin^2\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} = \begin{cases} \pi/a^2 & \text{gdy} \quad |a| > 1 \\ \pi & \text{gdy} \quad |a| < 1 \end{cases}.$$

Całki tego typu trafiają się w obliczeniach w elektrodynamice.

Zadanie
Metodą residuów obliczyć całkę

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\cos^2 3\theta}{1 + a^2 - 2a\cos 2\theta} \, .$$

Rozpatrzyć przypadki $|a| < 1$ oraz $|a| > 1$.
Rozwiązanie: Podstawiamy standardowo $z = e^{i\theta}$ i otrzymujemy

$$I = \frac{i}{4a} \oint_{|z|=1} dz \, \frac{(z^6+1)^2}{z^5\left(z^4 - \frac{1+a^2}{a} z^2 + 1\right)} \, .$$

Biegun w $z = 0$ jest piątego rzędu i jego residuum najłatwiej znaleźć metodą rozwinięcia:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z^6+1)^2}{z^5} \left\{ 1 + \left(\frac{1+a^2}{a} z^2 - z^4 \right) + \left(\frac{1+a^2}{a} z^2 - z^4 \right)^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{z^5} \left\{ 1 + \frac{1+a^2}{a} z^2 + \left[\left(\frac{1+a^2}{a} \right)^2 - 1 \right] z^4 + \dots \right\}, \end{aligned}$$

czyli że

$$\operatorname{res} f(z)\big|_{z=0} = \left(\frac{1+a^2}{a} \right)^2 - 1 \, .$$

Pozostałe bieguny są w punktach będących pierwiastkami równania bikwadratowego, które - jak można od razu dostrzec - ma prostą postać:

$$z^4 - \frac{1+a^2}{a} z^2 + 1 = (z^2 - a)\left(z^2 - \frac{1}{a} \right) = 0 \, .$$

Zatem, gdy $|a| < 1$ funkcja $f(z)$ ma wewnątrz konturu $|z| = 1$ dwa bieguny proste w $z_\pm^2 = a$, gdy zaś $|a| > 1$, dwa bieguny proste w $z_\pm^2 = 1/a$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek $0 < a < 1$. Oba residua, w $z = \sqrt{a}$ oraz w $z = -\sqrt{a}$ są takie same:

$$\operatorname{res} f(z)\big|_{z=\pm\sqrt{a}} = \frac{(a^3+1)^2}{2a^2(a^2-1)} \, .$$

Podobnie takie same są residua w $z = i\sqrt{|a|}$ i w $z = -i\sqrt{|a|}$, gdy $|a| < 1$ i $a < 0$; są one równe:

$$\operatorname{res} f(z)\big|_{z=\pm i\sqrt{|a|}} = -\frac{(a^3+1)^2}{2a^2(a-1/a)|a|} = \frac{(a^3+1)^2}{2a^2(a^2-1)} \, ,$$

gdyż $-|a|/a = 1$ dla $a < 0$.

Gdy $|a| < 1$ mamy zatem dla obu znaków a

$$I = \frac{i}{4a}\, 2\pi i \left\{ \left(\frac{1+a^2}{a}\right)^2 - 1 + \frac{(a^3+1)^2}{2a^2(a^2-1)} \right\}$$
$$= \frac{-\pi}{2a^3} \left\{ 1 + a^2 + a^4 + \frac{(1+a^3)(1+a)(1-a+a^2)}{(a+1)(a-1)} \right\}$$

i ostatecznie po uporządkowaniu, gdy $|a| < 1$, znajdujemy, że

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{\cos^2 3\theta}{1 + a^2 - 2a\cos 2\theta} = \pi\, \frac{1 - a + a^2}{1 - a} .$$

Gdy $|a| > 1$, zarówno, gdy $a > 0$, jak i gdy $a < 0$, dostajemy residua w punktach $z^2 = 1/a$ równe

$$\operatorname{res} f(z)|_{z^2=\pm 1/a} = \frac{(a^3+1)^2}{2a^2(1-a^2)} .$$

i wobec tego

$$I = \frac{-\pi}{2a^3} \left\{ 1 + a^2 + a^4 - \frac{(1+a^3)(1+a)(1-a+a^2)}{(a+1)(a-1)} \right\} .$$

Po uporządkowaniu mamy więc dla $|a| > 1$ wzór[3]

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{\cos^2 3\theta}{1 + a^2 - 2a\cos 2\theta} = \pi\, \frac{1 - a + a^2}{a^3(a - 1)} .$$

Zadanie
Korzystając z twierdzenia o residuach obliczyć całkę

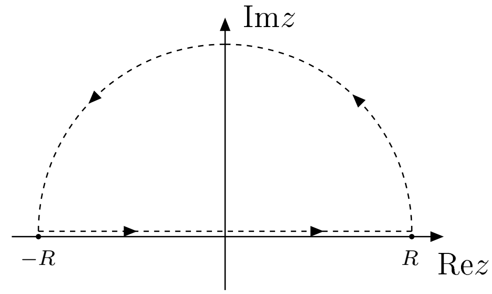
$$\int_0^{\infty} dx\, \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} .$$

Rozwiązanie: Ponieważ funkcja podcałkowa jest parzysta, rozciągamy najpierw całkowanie na całą oś rzeczywistą (i bierzemy połowę tego, co wyjdzie). Następnie metodą residuów obliczamy całkę

$$\int_\Gamma dz\, f(z) = \int_\Gamma dz\, \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3}$$

po konturze Γ pokazanym na rysunku 2. Mamy więc:

$$\int_\Gamma dz\, f(z) = \int_{-R}^{R} dx\, \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} + \int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, f(z) = 2\pi i\ \operatorname{res} f(z)|_{z=+i|a|} ,$$



Rysunek 2: Kontur Γ składający się z odcinka długości $2R$ leżącego symetrycznie na osi rzeczywistej domkniętego dużym półkolem o promieniu $R \to \infty$ w górnej półpłaszczyźnie.

jako że funkcja $f(z)$ ma wewnątrz konturu Γ jeden biegun trzeciego rzędu w punkcie $z = i|a|$ (bierzemy $R > |a|$).

Całka po półokręgu o promieniu R, na którym $z = R\, e^{i\varphi}$, znika w granicy $R \to \infty$:

$$\left| \int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, f(z) \right| = \left| \int_0^\pi d\varphi\, iR\, e^{i\varphi}\, \frac{R^2\, e^{2i\varphi}}{(R^2\, e^{2i\varphi} + a^2)^3} \right|$$

$$\leq \int_0^\pi d\varphi \left| iR\, e^{i\varphi}\, \frac{R^2\, e^{2i\varphi}}{(R^2\, e^{2i\varphi} + a^2)^3} \right| = \int_0^\pi d\varphi\, \frac{R^3}{|R^2\, e^{2i\varphi} + a^2|^3}\,.$$

W tym miejscu korzystamy z nierówności[4]

$$|w_1 \pm w_2| \geq ||w_1| - |w_2||\,,$$

która pozwala dokończyć szacowanie (zastępujemy $|R^2\, e^{2i\varphi} + a^2|$ w mianowniku czynnikiem mniejszym, tj. $|R^2\, e^{2i\varphi}| - |a^2|$):

$$\left| \int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, f(z) \right| \leq \int_0^\pi d\varphi\, \frac{R^3}{(R^2 - a^2)^3} = \frac{\pi\, R^3}{(R^2 - a^2)^3}\,.$$

Pokazuje ono, że gdy $R \to \infty$, całka po półokręgu znika jak $1/R^3$.

Trzeba jeszcze obliczyć residuum funkcji w $z = i|a|$. Mamy

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=i|a|} = \frac{1}{2!}\, \frac{d^2}{dz^2}\, \frac{z^2}{(z + i|a|)^3} = \frac{1}{2!}\, \frac{d}{dz} \left[\frac{2z}{(z + i|a|)^3} - \frac{3z^2}{(z + i|a|)^4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{(z + i|a|)^3} - \frac{12z}{(z + i|a|)^4} + \frac{12z^2}{(z + i|a|)^5} \right]_{z=i|a|} = \frac{-i}{16|a|^3}\,.$$

[3] Oba wzory końcowe można sprawdzić programem *Mathematica*, najlepiej dla jakichś konkretnych wartości parametru a; w ogólnym przypadku program ten daje mało czytelny wynik.

[4] Dowód: dla dowolnych dwu liczb zespolonych w_1 i w zachodzi nierówność $|w_1 + w| \leq |w_1| + |w|$. Podstawiamy $w = \pm w_2 - w_1$, co daje $|w_2| \leq |w_1| + |w_1 \mp w_2|$. Zatem dowolne dwie liczby w_1 i w_2 spełniają nierówność $|w_1 \mp w_2| \geq |w_2| - |w_1|$, nawet gdy $|w_2| > |w_1|$; ponieważ można dokonać zamiany $w_1 \leftrightarrow w_2$ więc prawą stronę nierówności można zastąpić modułem.

Zatem

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{2}\,2\pi i\,\frac{-i}{16|a|^3} = \frac{\pi}{16|a|^3}\,.$$

W przypadku tej całki mogliśmy byli równie dobrze zamknąć biegnący po osi rzeczywistej kontur całkowania dołączając doń półokrąg o promieniu $R \to \infty$ leżący w dolnej półpłaszczyźnie (zamiast półokręgu leżącego w górnej półpłaszczyźnie): ponieważ taki kontur byłby obiegany zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, całka by była równa $-2\pi i$ razy residuum w punkcie $z = -i|a|$:

$$\begin{aligned}\mathrm{res}\,f(z)|_{z=-i|a|} &= \frac{1}{2!}\,\frac{d^2}{dz^2}\,\frac{z^2}{(z-i|a|)^3} = \frac{1}{2!}\,\frac{d}{dz}\left[\frac{2z}{(z-i|a|)^3} - \frac{3z^2}{(z-i|a|)^4}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(z-i|a|)^3} - \frac{12z}{(z-i|a|)^4} + \frac{12z^2}{(z-i|a|)^5}\right]_{z=-i|a|} = \frac{+i}{16|a|^3}\,.\end{aligned}$$

Wynik jest oczywiście taki sam jak poprzednio.

Zadanie

Korzystając z twierdzenia o residuach obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,.$$

Rozwiązanie: Całka jest zbieżna, bo dla $|x| \to \infty$ funkcja podcałkowa zachowuje się jak $1/x^2$. Ponadto jest jasne, że mianownik funkcji podcałkowej nie zeruje się nigdy dla rzeczywistych wartości x. Całkę tę można obliczyć tak jak poprzednią, całkując funkcję

$$f(z) = \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9} = \frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z^2+9)}\,,$$

po konturze pokazanym na rysunku 2, lub podobnym konturze składającym się z osi rzeczywistej i półokręgu w dolnej półpłaszczyźnie. Przyjmijmy jednak kontur Γ z rysunku 2. Podobnie jak w poprzednim zadaniu pokazujemy, że gdy $R \to \infty$, całka po półokręgu dąży do zera:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\frac{1}{2}K_R} dz\,f(z)\right| &\le \int_0^\pi d\varphi\,\frac{R\,|R^2\,e^{2i\varphi} - R\,e^{i\varphi} + 2|}{|R^4\,e^{4i\varphi} + 10R^2\,e^{2i\varphi} + 9|}\\ &\le \int_0^\pi d\varphi\,\frac{R\,(R^2+R+2)}{R^4-10R^2-9} \sim \frac{1}{R} \to 0\,.\end{aligned}$$

Funkcja podcałkowa ma cztery bieguny dla $z_{1,2}^2 = -1$ i $z_{3,4}^2 = -9$, z czego dwa, w $z_1 = i$ oraz $z_3 = 3i$ leżą (dla dostatecznie dużego R) wewnątrz konturu całkowania. Zatem zgodnie z twierdzeniem o residuach

$$\oint_\Gamma f(z) = 2\pi i\,(\mathrm{res}\,f(z)|_{z=i} + \mathrm{res}\,f(z)|_{z=3i})\,.$$

Obliczamy residua:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=i} &= \lim_{z\to i} \frac{z^2-z+2}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{1-i}{16i}\,, \\
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=3i} &= \lim_{z\to 3i} \frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z+3i)} = \frac{7+3i}{48i}\,.
\end{aligned}
$$

Zatem w granicy $R\to\infty$ otrzymujemy

$$
\oint_\Gamma f(z) \to \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} = 2\pi i\left(\frac{3-3i}{48i}+\frac{7+3i}{48i}\right) = \frac{5}{12}\,\pi\,.
$$

Zadanie

Obliczyć całkę

$$
\int_0^\infty dx\, \frac{x^6}{(x^4+a^4)^2}\,.
$$

Rozwiązanie: Tu zastosujemy podejście fizyczne i przeskalujemy zmienną całkowania, żeby od razu uwidocznić zależność od a i mniej pisać. Mamy więc, po standardowym wykazaniu, że całka po półokręgu będącym częścią zamkniętego konturu Γ z rysunku 2 znika w granicy $R\to\infty$,

$$
\int_0^\infty dx\, \frac{x^6}{(x^4+a^4)^2} = \frac{1}{2|a|}\oint_\Gamma dz\, \frac{z^6}{(z^4+1)^2} = \frac{2\pi i}{2|a|}\sum_{\mathrm{Im} z_i>0} \operatorname{res} f(z)\big|_{z=z_i}\,.
$$

Z czterech pierwiastków czwartego stopnia z liczby -1, które są położeniami czterech biegunów drugiego rzędu funkcji podcałkowej, dwoma leżącymi w górnej półpłaszczyźnie, a więc wewnątrz konturu, są

$$
z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \qquad \text{oraz} \qquad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\,,
$$

przy czym $z_1^2 = i$, a $z_2^2 = -i$. W celu obliczenia residuów w tych biegunach wygodnie jest zapisać funkcję podcałkową w postaci

$$
f(z) = \frac{z^6}{(z-z_1)^2\,(z-z_2)^2\,(z^2+i\sqrt{2}\,z-1)^2}\,.
$$

Korzystamy następnie ze standardowego wzoru:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=z_1} &= \frac{d}{dz}\, \frac{z^6}{(z-z_2)^2\,(z^2+i\sqrt{2}\,z-1)^2}\bigg|_{z=z_1} \\
&= \frac{6\,z_1^5}{(z_1-z_2)^2\,(z_1^2+i\sqrt{2}\,z_1-1)^2} \\
&- \frac{2\,z_1^6}{(z_1-z_2)^3\,(z_1^2+i\sqrt{2}\,z_1-1)^2} \\
&- \frac{2\,z_1^6(2z_1+i\sqrt{2}\,)}{(z_1-z_2)^2\,(z_1^2+i\sqrt{2}\,z_1-1)^3}\,.
\end{aligned}
$$

Residum w $z = z_2$ jest dane analogicznym wzorem, w którym $z_1 \leftrightarrow z_2$. Ponieważ $z_1 - z_2 = \sqrt{2}$, $z_{1,2}^4 = -1$, a $z_1^2 + i\sqrt{2}\, z_1 - 1 = -2(1-i)$, $z_2^2 + i\sqrt{2}\, z_2 - 1 = -2(1+i)$, mamy

$$\begin{aligned} \mathrm{res}\, f(z)|_{z=z_1} &= \frac{-6z_1}{2\,[-2(1-i)]^2} - \frac{-2i}{2\sqrt{2}\,[-2(1-i)]^2} - \frac{-2i\,(2z_1 + i\sqrt{2})}{2\,[-2(1-i)]^3}\,, \\ \mathrm{res}\, f(z)|_{z=z_2} &= \frac{-6z_2}{2\,[-2(1+i)]^2} - \frac{2i}{-2\sqrt{2}\,[-2(1+i)]^2} - \frac{2i\,(2z_2 + i\sqrt{2})}{2\,[-2(1+i)]^3}\,. \end{aligned}$$

Sumując odpowiadające sobie wyrazy parami i uwzględniając, że $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$ oraz że $z_1 + z_2 = i\sqrt{2}$, znajdujemy że

$$\sum_{\mathrm{Im} z_i > 0} \mathrm{res}\, f(z)|_{z=z_i} = \frac{3\sqrt{2}}{8i} + 0 + \frac{3\sqrt{2}i}{16} = -i\,\frac{3\sqrt{2}}{16}\,.$$

Zatem (co potwierdza program *Mathematica*)

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^6}{(x^4 + a^4)^2} = \frac{2\pi i}{2|a|}\left(-i\,\frac{3\sqrt{2}}{16}\right) = \frac{3\sqrt{2}\,\pi}{16|a|}\,.$$

Zadanie
Obliczyć całkę

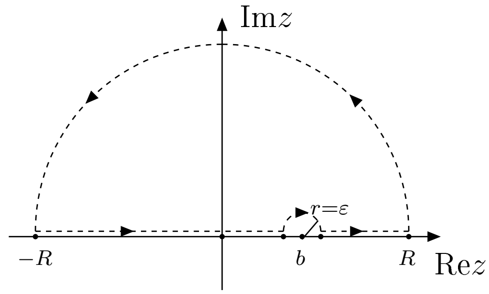
$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2}\,.$$

Rozwiązanie: Jak zwykle rozciągamy całkowanie wzdłuż osi rzeczywistej na półokrąg o promieniu R domykający kontur całkowania w górnej półpłaszczyźnie zespolonej zmiennej z, co umożliwia zastosowanie twierdzenia o residuach. Funkcja podcałkowa

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)^2} \equiv \frac{1}{(z + i|a|)(z - i|a|)(z + i|b|)^2(z - i|b|)^2}\,,$$

ma wewnątrz tego konturu jeden biegun prosty w $z = i|a|$ i jeden biegun drugiego rzędu w $z = i|b|$. Residua tych biegunów znajdujemy standardowo:

$$\begin{aligned} \mathrm{res}\, f(z)|_{z=i|a|} &= \frac{1}{2i|a|(b^2 - a^2)^2}\,, \\ \mathrm{res}\, f(z)|_{z=i|b|} &= \frac{d}{dz}\,\frac{1}{(z^2 + a^2)(z + i|b|)^2}\bigg|_{z=i|b|} \\ &= \left[\frac{-2z}{(z^2 + a^2)^2(z + i|b|)^2} - \frac{2}{(z^2 + a^2)(z + i|b|)^3}\right|_{z=i|b|} \\ &= \frac{i}{2(a^2 - b^2)^2|b|} - \frac{i}{4(a^2 - b^2)|b|^3}\,. \end{aligned}$$



Rysunek 3: Kontur Γ omijający biegun prosty w $z = b$.

Mamy zatem

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \left\{ \frac{-i}{2(b^2-a^2)^2|a|} + \frac{i}{2(a^2-b^2)^2|b|} - \frac{i}{4(a^2-b^2)|b|^3} \right\} \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{i\,(|a|-|b|)}{2(a^2-b^2)^2|a||b|} - \frac{i}{4(a^2-b^2)|b|^3} \right\} \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{2i|b|^2}{4(a^2-b^2)(|a|+|b|)|a||b|^3} - \frac{i|a|(|a|+|b|)}{4(a^2-b^2)(|a|+|b|)|a||b|^3} \right\} \\ &= -\frac{\pi}{2}\,\frac{2b^2-a^2-|a||b|}{(a^2-b^2)(|a|+|b|)|a||b|^3} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{(|b|-|a|)(2|b|+|a|)}{(a^2-b^2)(|a|+|b|)\,|a||b|^3}\,. \end{aligned}$$

Zatem ostatecznie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi\,(2|b|+|a|)}{2(|a|+|b|)^2|a||b|^3}\,.$$

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-b)(4x^2+a^2)}\,,$$

w której a i b są liczbami rzeczywistymi.
Rozwiązanie: Całka ma osobliwość (w punkcie $x = b$ funkcja podcałkowa jest nieskończona) i jest niezbieżna według standardowych kryteriów zbieżności. Można jej nadać sens. Obliczamy w tym celu całkę z funkcji

$$f(z) = \frac{1}{(z-b)(4z^2+a^2)}\,,$$

po konturze Γ pokazanym na rysunku 3, tj. podobnym do wykorzystywanego już poprzednio konturu z wysunku 2, ale mającym małe "wypuczenie" nad punktem $x = b$. Wewnątrz konturu funkcja ma tylko jeden punkt osobliwy (biegun prosty) w punkcie $z = i|a|/2$, w którym residuum jest równe

$$\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=i|a|/2} = \frac{i(b + i|a|/2)}{|a|(a^2 + 4b^2)}\,,$$

a zatem

$$\int_\Gamma dz\, f(z) = -\frac{2\pi b}{|a|(a^2 + 4b^2)} - \frac{i\pi}{(a^2 + 4b^2)}\,.$$

Jak w poprzednich przykładach łatwo pokazać, że w granicy $R \to \infty$ całka po dużym półokręgu znika. W granicy tej mamy więc równość:

$$\int_{-\infty}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(x-b)(4x^2+a^2)} + \int_{b+\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{(x-b)(4x^2+a^2)} + \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-} dz\, f(z) = -\frac{2\pi b}{|a|(a^2 + 4b^2)} - \frac{i\pi}{(a^2 + 4b^2)}\,.$$

Całkę po małym półokręgu nietrudno obliczyć: Ponieważ interesuje nas granica $\varepsilon \to 0$, możemy w otoczeniu punktu $z = b$ rozwinąć $f(z)$ w szereg Wawrzusia, który ma postać

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-b} + a_0 + a_1(z-b) + \dots$$

ponieważ funkcja $f(z)$ ma w punkcie $z = b$ biegun prosty. Residuum $f(z)$ w tym punkcie, czyli współczynnik a_{-1}, jest równe

$$\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=b} = \frac{1}{(a^2 + 4b^2)}\,.$$

Parametryzując teraz półokrąg $z = b + \varepsilon\, e^{i\varphi}$ i całkując szereg wyraz po wyrazie bez trudu znajdujemy, że w granicy $\varepsilon \to 0$ pozostaje tylko

$$\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-} dz\, f(z) = -\pi i a_{-1} = \frac{-\pi i}{(a^2 + 4b^2)}\,,$$

co dokładnie skraca urojoną część całki po całym konturze Γ. Zatem wyjściowa całka zdefiniowana przez wzięcie symetrycznie granicy $\varepsilon \to 0$, czyli jako tzw. *wartość główna całki*, wynosi[5]

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-b)(4x^2+a^2)} = -\frac{2\pi b}{|a|(a^2 + 4b^2)}\,.$$

Symbol P oznacza tu właśnie wartość główną (ang. *Principal Value*). Nietrudno zrozumieć, że dookreślanie całki mającej w punkcie x_0 osi rzeczywistej osobliwość typu bieguna

[5]Pytanie-test: czy otrzymalibyśmy ten sam wynik, gdybyśmy rozpatrzyli kontur Γ miający "wypuczenie" w dół , tzn. gdyby półokrąg o promieniu ε obiegał punkt $z = b$ od dołu?

jest możliwe wtedy, gdy w rozkładzie mianownika takiej całki na ułamki proste znikają współczynniki wszystkich składników z parzystymi odwrotnymi potęgami, tj. składników $1/(x-x_0)^{2|n|}$.

Warto zapamiętać udowodnioną tu przy okazji ogólną regułkę:
Regułka: Jeśli funkcja $f(z)$ ma w $z=z_0$ *biegun prosty* (tj. pierwszego rzędu) o residuum a_{-1}, to całka po opartym na kącie $\Delta\varphi$ fragmencie okręgu o promieniu ε i środku w z_0 daje, w granicy $\varepsilon\to 0$, wynik $\pm i a_{-1}|\Delta\varphi|$ (znak + przy obiegu zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara i − przy przeciwnym). Regułka ta *nie stosuje się* jeśli funkcja ma w z_0 biegun wyższego rzędu, lub punkt istotnie osobliwy, bo, jak łatwo zobaczyć, granica $\varepsilon\to 0$ naogół wtedy nie istnieje. Wyjątkiem jest punkt osobliwy (istotna osobliwość lub biegun skończonego rzędu), w którym znikają wszystkie współczynniki $a_{-2|n|}$: całka po łuku opartym na kącie $\Delta\varphi=\pi$ jest wtedy w granicy $\varepsilon\to 0$ dobrze określona i wynosi $\pm\pi a_{-1}$. Nietrudno zrozumieć, że ma to związek z możliwością dookreślania całek mających na osi rzeczywistej osobliwość typu $1/(x-x_0)^{2|k|+1}$ za pomocą brania ich wartości głównej.

Zadanie.
Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+2)(x^2+1)^2}\,.$$

Rozwiązanie: Postępujemy tak jak w poprzednim przykładzie: całkujemy funkcję

$$f(z)=\frac{1}{(z+2)(z^2+1)^2}\,,$$

po konturze Γ z rysunku 3.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,f(z)|_{z=i} &= \frac{d}{dz}\,\frac{1}{(z+2)(z+i)^2}\bigg|_{z=i}=\frac{-2-14i}{100}\,,\\ \mathrm{Res}\,f(z)|_{z=-2} &= \frac{1}{25}\,.\end{aligned}$$

Stąd,

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+2)(x^2+1)^2}=2\pi i\,\frac{-2-14i}{100}-(-i\pi)\,\frac{1}{25}=\frac{7\pi}{25}\,.$$

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_0^{\infty}dx\,\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,.$$

Rozwiązanie: Ponieważ cosinus jest funkcją parzystą możemy zamiast powyższej całki obliczać

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\frac{\cos x+i\sin x}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,,$$

bo całka z sinusa da zero (całka z funkcji nieparzystej w symetrycznych granicach). Aby obliczyć tę całkę całkujemy funkcję

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}\,,$$

po zamkniętym konturze Γ pokazanym na rysunku 2. Na półokręgu $z = R\,e^{i\varphi}$ i

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, f(z)\right| &= \left|\int_0^{\pi} d\varphi\, iR\,e^{i\varphi}\, \frac{e^{iR\cos\varphi}\, e^{-R\sin\varphi}}{R^2\,e^{2i\varphi} + a^2}\right| \\
&\leq R\int_0^{\pi} d\varphi\, \frac{e^{-R\sin\varphi}}{|R^2\,e^{2i\varphi} + a^2|} \leq R\int_0^{\pi} d\varphi\, \frac{e^{-R\sin\varphi}}{R^2 - a^2} = 2\,R\int_0^{\pi/2} d\varphi\, \frac{e^{-R\sin\varphi}}{R^2 - a^2} \\
&\leq 2\,R\int_0^{\pi/2} d\varphi\, \frac{e^{-2(R/\pi)\varphi}}{R^2 - a^2} \;=\; \frac{\pi}{R^2 - a^2}\left(1 - e^{-R}\right).
\end{aligned}$$

Wykorzystana tu została nierówność $\sin\varphi \geq 2\varphi/\pi$ słuszna dla $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$. Widać zatem, że całka po tym fragmencie konturu Γ dąży do zera w granicy $R \to 0$. Zauważmy też, że w rozpatrywanym tu przypadku całka po półokręgu domykającym kontur w dolnej półpłaszczyźnie *nie* znikałaby w tej granicy (bo $\sin\varphi < 0$ dla $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$). Dlatego kontur trzeba było domknąć półokręgiem w górnej półpłaszczyźnie. Ogólnie, tzw. Lemat Jordana orzeka, że w przypadku funkcji postaci

$$f(z) = R(z)\,e^{iaz}\,,$$

gdzie $R(z)$ jest funkcją wymierną znikającą dla $z \to \infty$ conajmniej jak $1/z$, jeśli $\mathrm{Re}\,a > 0 (< 0)$, w granicy $R \to \infty$ znika całka po półokręgu w górnej (dolnej) półpłaszczyźnie.

Ponieważ w granicy $R \to 0$ całka po tym półokręgu znika, otrzymujemy z twierdzenia o residuach związek

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} = \pi i\, \mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=i|a|}\,,$$

jako że wewnątrz konturu Γ z rysunku 2 funkcja $f(z)$ ma tylko jeden punkt osobliwy w $z = i|a|$. Residum funkcji $f(z)$ w tym punkcie znajdujemy standardowo

$$\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=i|a|} = \frac{e^{-|a|}}{2i|a|}\,.$$

Ostatecznie więc

$$\int_0^{\infty} dx\, \frac{\cos x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2|a|}\,e^{-|a|}\,.$$

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^3}\,.$$

Rozwiązanie: Postępujemy tak, jak w poprzednim zadaniu, tj. całkujemy po konturze z rysunku 2 funkcję

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^3}\,.$$

Ponieważ zgodnie z lematem Jordana całka po półokręgu znika w granicy $R \to \infty$, a wewnątrz konturu funkcja ma tylko jeden punkt osobliwy w $z = i|a|$, otrzymujemy związek

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^3} = 2\pi i \ \ \mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=i|a|}\,.$$

Biegun w $z = i|a|$ jest trzeciego rzędu, więc

$$\begin{aligned}\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=i|a|} &= \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dz^2}\,\frac{e^{iz}}{(z+i|a|)^3}\right]_{z=i|a|} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{i\,e^{iz}}{(z+i|a|)^3} - \frac{3e^{iz}}{(z+i|a|)^4}\right)\right]_{z=i|a|} \\ &= \frac{e^{-|a|}}{2}\left(\frac{-1}{(2i|a|)^3} - \frac{6i}{(2i|a|)^4} + \frac{12}{(2i|a|)^5}\right) = \frac{e^{-|a|}}{2}\left(\frac{-i}{8|a|^3} + \frac{-3i}{8a^4} + \frac{-3i}{8|a|^5}\right).\end{aligned}$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^3} = \frac{\pi}{8|a|^5}\left(a^2 + 3|a| + 3\right) e^{-|a|}\,.$$

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_{0}^{\infty} dx\, \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,.$$

Otrzymać też wynik dla $|a| = |b|$.
Rozwiązanie: Całkując to co trzeba po konturze z rysunku 2 i znajdując residua dwu biegunów prostych położonych wewnątrz konturu otrzymujemy dla $|a| \neq |b|$ wynik

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-|a|}}{2|a|} - \frac{e^{-|b|}}{2|b|}\right)\,.$$

Wynik dla $|a| = |b|$ najłatwiej otrzymać zauważając, że

$$\begin{aligned}\lim_{|a|\to|b|} \frac{\pi}{(|b|+|a|)(|b|-|a|)}\left(\frac{e^{-|a|}}{2|a|} - \frac{e^{-|b|}}{2|b|}\right) &= -\frac{\pi}{2|a|}\,\frac{d}{d|a|}\left(\frac{e^{-|a|}}{2|a|}\right) \\ &= \frac{\pi}{2a^2}\left(1 + \frac{1}{|a|}\right) e^{-|a|}\,.\end{aligned}$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^2}\left(1+\frac{1}{|a|}\right) e^{-|a|}\,.$$

Zadanie
Obliczyć całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,.$$

Rozwiązanie: Obie całki można otrzymać całkując funkcję

$$f(z) = \frac{z\, e^{iz}}{z^2-2z+10} = \frac{z\, e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,,$$

gdzie $z_1 = 1{+}3i$, $z_2 = 1{-}3i$ są dwoma pierwiastkami równania kwadratowego $z^2{+}2z{+}10 = 0$, po konturze z rysunku 2. Zgodnie z lematem Jordana całka po półokręgu o promieniu R znika w granicy $R \to \infty$ i otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x\, e^{ix}}{x^2-2x+10} = 2\pi i \;\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=z_1} = 2\pi i\, \frac{(1+3i)\, e^{-3+i}}{6i}\,.$$

Rozkładając prawą stronę na część rzeczywistą i urojoną znajdujemy, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x\cos x}{x^2-2x+10} = \frac{\pi}{3e^3}\left(\cos 1 - 3\sin 1\right),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x\sin x}{x^2-2x+10} = \frac{\pi}{3e^3}\left(3\cos 1 + \sin 1\right).$$

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_0^{\infty} dx\, \frac{x\,\sin x}{(x^2+a^2)^2}\,.$$

Rozwiązanie: Funkcja podcałkowa jest parzysta, co pozwala rozciągnąć całkowanie na całą oś rzeczywistą (potem bierzemy oczywiście połowę tego, co wyjdzie). Biorąc jako kontur Γ oś rzeczywistą domkniętą półokręgiem o promieniu $R \to \infty$ w górnej półpłaszczyźnie (patrz rys. 2) piszemy

$$\begin{aligned}\int_\Gamma dz\, \frac{z\, e^{iz}}{(z^2+a^2)^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x\,\cos x + ix\,\sin x}{(x^2+a^2)^2} + \int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, f(z)\\ &= 2i\int_0^{\infty} dx\, \frac{x\,\sin x}{(x^2+a^2)^2} + \int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, f(z)\,,\end{aligned}$$

(całka z cosinusem daje zero bo funkcja podcałkowa jest nieparzysta - ten sam wniosek wyniknie także z tego, że dana przez residuum całka $\oint dz\, f(z)$ będzie czysto urojona). Z drugiej strony całka po Γ jest równa

$$2\pi i\ \operatorname{res} f(z)|_{z=i|a|}\ .$$

W punkcie $z = i|a|$ jest biegun drugiego rzędu, więc

$$\begin{aligned}\operatorname{res} f(z)|_{z=i|a|} &= \frac{d}{dz}\frac{z\,e^{iz}}{(z+i|a|)^2}\bigg|_{z=i|a|}\\ &= \frac{e^{-|a|}}{(2i|a|)^2} - \frac{|a|\,e^{-|a|}}{(2i|a|)^2} - \frac{2i|a|\,e^{-|a|}}{(2i|a|)^3} = \frac{e^{-|a|}}{4|a|}\,.\end{aligned}$$

Zatem

$$2i\int_0^\infty dx\,\frac{x\,\sin x}{(x^2+a^2)^2} + \int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, f(z) = 2\pi i\,\frac{e^{-|a|}}{4|a|}\,.$$

Trzeba pokazać jeszcze, że w granicy $R\to\infty$ druga całka znika: mamy tam $z = R\,e^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, f(z)\right| &= \left|\int_0^\pi d\varphi\, iR\,e^{i\varphi}\,\frac{R\,e^{i\varphi}\exp(iR\cos\varphi - R\sin\varphi)}{(R^2e^{2i\varphi}+a^2)^2}\right|\\ &\leq R^2\int_0^\pi d\varphi\,\frac{e^{-R\sin\varphi}}{|R^2e^{2i\varphi}+a^2|^2} \leq R^2\int_0^\pi d\varphi\,\frac{e^{-R\sin\varphi}}{(R^2-a^2)^2}\,,\end{aligned}$$

(w ostatnim kroku użyta została nierówność $|z\pm w| \geq ||z| - |w||$). Można teraz wykorzystać słuszną dla $0\leq\varphi\leq\frac{1}{2}\pi$ nierówność $\sin\varphi \geq 2\varphi/\pi$ i napisać

$$R^2\int_0^\pi d\varphi\,\frac{e^{-R\sin\varphi}}{(R^2-a^2)^2} \leq \frac{2R^2}{(R^2-a^2)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, e^{-2R\varphi/\pi} = \frac{2R^2}{(R^2-a^2)^2}\,\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right).$$

Dla $R\to\infty$ całka jest więc tłumiona przez czynnik $1/R^3$ i znika.[6] Ostatecznie więc

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x\,\sin x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi\,e^{-|a|}}{4|a|}\,.$$

[6]Podkreślmy jeszcze raz, że w tym przypadku nie można konturu biegnącego po osi rzeczywistej domknąć półokręgiem w *dolnej* półpłaszczyźnie: jak łatwo sprawdzić, z powodu wystąpienia eksponencjalnie rosnącego czynnika $e^{+R\sin\varphi}$, całka po tym półokręgu nie znika, gdy $R\to\infty$. Ogólniej (lemat Jordana!) kontury całek, w których występuje czynnik $e^{i|a|z}$ ($e^{-i|a|z}$) trzeba domykać półokręgiem w górnej (dolnej) półpłaszczyźnie, gdyż tam część urojona zmiennej z jest dodatnia (ujemna), co w połączeniu z czynnikiem $+i|a|$ ($-i|a|$) daje tłumienie całki dla $R\to\infty$.

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\sin(ax)}{x\,(x^2+b^2)}\,.$$

Rozwiązanie: Ponieważ funkcja podcałkowa jest parzysta, rozciągamy całkę na całą oś rzeczywistą i bierzemy połowę tego, co wyjdzie. Załóżmy ponadto, że $a > 0$ (wynik dla $a < 0$ jest po prostu minus wynikiem dla $a > 0$). Mianownik funkcji podcałkowej zeruje się w punkcie $x = 0$; jest to jednak osobliwość pozorna, gdyż punkt ten jest zarazem zerem licznika. Kiedy jednak przechodzimy do całkowania po zamkniętym konturze funkcji

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z\,(z^2+b^2)}$$

(obliczana całka będzie dana przez część urojoną całki z powyższej funkcji po osi rzeczywistej), punkt $z = 0$ staje się punktem osobliwym i trzeba go przy całkowaniu wyizolować. Dlatego też w tym przypadku całkujemy funkcję $f(z)$ nie po konturze z rysunku 2, a po konturze pokazanym na rysunku 4 i bierzemy granicę $\varepsilon \to 0$. Z punktu widzenia całki po osi rzeczywistej z części rzeczywistej $f(z)$ procedura taka odpowiada dookreśleniu całki niewłaściwej z cosinusem w sensie wartości głównej (tj. symetrycznemu zbieganiu z lewej i prawej strony z x do zera).

Mamy zatem

$$\oint dz\, f(z) = \int_{-R}^{-\varepsilon} dx\, f(x) + \int_{\varepsilon}^{R} dx\, f(x) + \int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, f(z) + \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-} dz\, f(z) = 2\pi i\, \mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=i|b|}\,.$$

(Minus przy K_ε przypomina, że całka po tym półokręgu jest brana w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, czyli w kierunku przeciwnym do standardowego). Residuum funkcji $f(z)$ w jej biegunie prostym obliczamy standardowo:

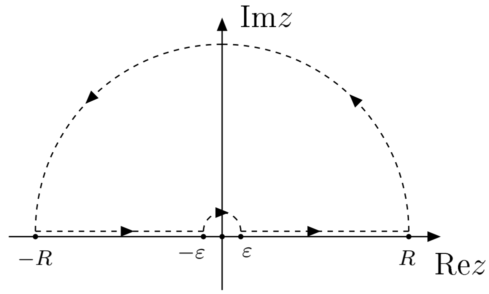
$$\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=i|b|} = \frac{e^{-a|b|}}{i|b|(2i|b|)} = -\,\frac{e^{-a|b|}}{2b^2}\,.$$

Zgodnie z lematem Jordana, całka po półokręgu o promieniu R znika w granicy $R \to \infty$ (bo założyliśmy, że $a > 0$). Z kolei w granicy $\varepsilon \to 0$ całka po małym półokręgu, na którym $z = \varepsilon\, e^{i\varphi}$, nie znika i daje (jest to zastosowanie regułki sformułowanej pod zadaniem, w którym obliczaliśmy wartość główną całki)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-} dz\, f(z) = \int_\pi^0 d\varphi\, i\varepsilon\, e^{i\varphi}\, \frac{e^{ia\,\varepsilon\, e^{i\varphi}}}{\varepsilon\, e^{i\varphi}\,(\varepsilon^2\, e^{2i\varphi} + b^2)} = -i\,\frac{\pi}{b^2}\,.$$

Łącząc wyniki znajdujemy, że w podwójnej granicy $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{iax}}{x\,(x^2+b^2)} = i\frac{\pi}{b^2} - 2\pi i\, \frac{e^{-|ab|}}{2b^2}\,.$$



Rysunek 4: Kontur omijający biegun prosty w $z = 0$, zwany także "konturem ODS", a po staropolsku ORZS (po dorysowaniu paru elementów kontur zaczyna przypominać pewną olbrzymią część słonia...). Chwytliwą tę nazwę zawdzięczamy prof. J. Wojtkiewiczowi.

Stąd, przyrównując do siebie części urojone i rzeczywiste obu stron powyższej równości, znajdujemy, że

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\sin(ax)}{x\,(x^2+b^2)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\sin(ax)}{x\,(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2b^2}\left(1 - e^{-|ab|}\right),$$

$$P\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\cos(ax)}{x\,(x^2+b^2)} = 0\,.$$

P oznacza tu całkę w sensie *wartości głównej* (na anglijskom jiazykie *principal value* - stąd P) tj. otrzymywaną, gdy granice dwu całek zbiegają z dwu stron symetrycznie do punktu osobliwego funkcji podcałkowej.

Zadanie.
Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\sin x}{x}\,.$$

Rozwiązanie: Całka ta jest warunkowo zbieżna. Jej wartość można znaleźć także metodami konwencjonalnymi, ale wymaga to większego nakładu pracy i sporej dozy sprytu.[7] Korzystając twierdzenia o residuach można to zrobić następująco. Obliczamy całkę

$$-i\oint_\Gamma dz\, \frac{e^{iz}}{z}$$

po konturze Γ pokazanym na rysunku 4. Mamy wtedy

$$-i\oint_\Gamma dz\, f(z) \equiv \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right) dx\, \frac{\sin x - i\cos x}{x} - i\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-} dz\, \frac{e^{iz}}{z} - i\int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, \frac{e^{iz}}{z} = 0\,,$$

gdyż wewnątrz konturu funkcja jest holomorficzna.

[7] Patrz np. F. Leja *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1973 (wyd. XII) s. 299.

Sprawdzamy najpierw, że całka po okręgu o promieniu R

$$\int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, \frac{e^{iz}}{z} = \int_0^\pi d\varphi\, \frac{iR\, e^{i\varphi}}{R\, e^{i\varphi}}\, e^{iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

znika w granicy $R \to \infty$. W rzeczy samej:

$$\left| \int_{\frac{1}{2}K_R} dz\, \frac{e^{iz}}{z} \right| \le \int_0^\pi d\varphi\, e^{-R\sin\varphi} = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi\, e^{-R\sin\varphi}$$
$$\le 2\int_0^{\pi/2} d\varphi\, e^{-2R\varphi/\pi} = \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right) \to 0.$$

Wykorzystaliśmy tu tak jak poprzednio nierówność $\sin\varphi \ge 2\varphi/\pi$ słuszną dla $0 \le \varphi \le \frac{1}{2}\pi$.

Następnie obliczamy całkę po małym półokręgu, na którym $z = \varepsilon\, e^{i\varphi}$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-} dz\, \frac{e^{iz}}{z} = \lim_{\varepsilon\to 0} i \int_\pi^0 d\varphi\, e^{-\varepsilon\sin\varphi}\, e^{i\varepsilon\cos\varphi} \to i\int_\pi^0 d\varphi\, 1 = -i\pi\,.$$

W granicy $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ mamy zatem równość

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^\infty \right) dx\, \frac{\sin x - i\cos x}{x} = \pi\,.$$

Ponieważ $\cos x$ jest funkcją parzystą, całka z cosinusem daje zero (jest to całka z funkcji nieparzystej w symetrycznych granicach), co zgadza się z tym, że prawa strona jest liczbą czysto rzeczywistą (po lewej całka z cosinusem jest czysto urojona). Całka z sinusem daje zaś podwojoną szukaną całkę. Zatem

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Zadanie

Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^\infty dx\, \frac{\sin^2 x}{x^2}\,.$$

Rozwiązanie: Całka nie ma żadnej osobliwości na osi rzeczywistej (i jest, w odróżnieniu od poprzedniej zbieżna bezwzględnie), ale żeby ją obliczyć wykorzystując twierdzenie o residuach trzeba przejść przez całki z osobliwościami. Piszemy

$$\int_{-\infty}^\infty dx\, \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dx\, \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^\infty \right) \frac{dx}{x^2} - \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^\infty \right) dx\, \frac{\cos 2x}{x^2} \right\}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^\infty \right) dx\, \frac{\cos 2x}{x^2} \right\}.$$

Aby znaleźć drugą całkę rozpatrujemy następującą całkę po konturze ODS z rysunku 4:

$$\oint_\Gamma dz\,\frac{e^{2iz}}{z^2} = \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) dx\,\frac{e^{2ix}}{x^2} + \int_{\frac{1}{2}K_R} dz\,\frac{e^{2iz}}{z^2} + \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-} dz\,\frac{e^{2iz}}{z^2} = 0\,.$$

Oczywiście interesuje nas tylko część rzeczywista powyższej całki. Ponieważ w granicy $R \to \infty$ całka po półokręgu o promieniu R znika, otrzymujemy stąd, że

$$\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) dx\,\frac{e^{2ix}}{x^2} = \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon} dz\,\frac{e^{2iz}}{z^2}\,,$$

(całka po półokręgu o promieniu ε ma teraz obieg we właściwym kierunku). Gdy $\varepsilon \to 0$, całkę tę można obliczyć rozwijając funkcję podcałkową w szereg Wawrzusia wokół $z = 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon} dz\,\frac{e^{2iz}}{z^2} &= \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon} dz \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2i}{z} - 2 + \dots\right) \\
&= \int_0^\pi d\varphi\, i\varepsilon\, e^{i\varphi}\left(\frac{1}{\varepsilon^2\, e^{2i\varphi}} + \frac{2i}{\varepsilon\, e^{i\varphi}} - 2 + \dots\right) = \frac{i}{\varepsilon}\int_0^\pi d\varphi\, e^{-i\varphi} - 2\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= -\frac{1}{\varepsilon}\, e^{-i\varphi}\Big|_0^\pi - 2\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon} - 2\pi + \mathcal{O}(\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

Wynik jest, jak należało oczekiwać, liczbą rzeczywistą (całka z $(\sin 2x)/x^2$ w symetrycznych granicach powinna być równa zeru), jest on więc wartością potrzebnej nam całki z $(\cos 2x)/x^2$. ykorzystujemy ten wynik widzimy, że wyrazy osobliwe (tj. $\propto 1/\varepsilon$) się skracają i otrzymujemy ostatecznie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi\,,$$

co potwierdza program *Mathematica*. Zauważmy, że jest to tyle samo, co całka od $-\infty$ do $+\infty$ z funkcji $(\sin x)/x$ (w poprzednim zadaniu całka z tej funkcji była obliczona w granicach od 0 do ∞, co da lo $\pi/2$). Nie powinno to dziwić: wprawdzie funkcja $(\sin x)/x$ maleje wolniej ze wzrostem $|x|$ niż $(\sin^2 x)/x^2$, ale za to jest raz dodatnia, a raz ujemna, wiec przyczynki od różnych x-ów częściowo się kasują i dlatego wychodzi tyle samo, co całka z szybciej malejącej, ale za to zawsze dodatniej funkcji $(\sin^2 x)/x^2$.

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\sin^3 x}{x^3}\,.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z tożsamości $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ i obliczamy całkę

$$\frac{1}{4i}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{dx}{x^3}\left(3e^{ix} - e^{3ix}\right).$$

Przy symetrycznym całkowaniu cosinusy powstające z e^{ix} oraz e^{3ix} dadzą zera, a i razy sinusy dadzą to co trzeba (dlatego dzielimy wynik całki przez i). Ponieważ funkcja $f(z) \equiv (3e^{iz} - e^{3iz})/z^3$ jest holomorficzna w obszarze ograniczonym konturem ODS z rysunku 4, całka z $f(z)$ po tym konturze daje zero, co oznacza, że

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{dx}{x^3}\left(3e^{ix} - e^{3ix}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\varepsilon}\frac{dz}{z^3}\left(3e^{iz} - e^{3iz}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\varepsilon}\frac{dz}{z^3}\left(2 + 3z^2 + \dots\right).$$

Jak zwykle parametryzujemy półłuczek o promieniu ε pisząc: $z = \varepsilon e^{i\varphi}$ i znajdujemy, że

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\varepsilon}\frac{dz}{z^3}\left(2 + 3z^2 + \dots\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\pi}\frac{id\varphi}{\varepsilon^2\, e^{2i\varphi}}\left(2 + 3\varepsilon^2\, e^{2i\varphi} + \dots\right) = 3i\pi\,.$$

Tu akurat całka z $1/z^2$ dała zero, bo kąt na którym był oparty łuk o promieniu ε był dokładnie równy π (jest to właśnie jeden ze szczególnych przypadków wspomnianych przy regułce podanej na stronie 15; tu musiało to tak wyjść, bo obliczana całka z funkcji $(\sin^3 x)/x^3$ jest dobrze określona, a nawet bezwzględnie zbieżna). Zatem,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\sin^3 x}{x^3} = \frac{3}{4}\,\pi\,.$$

Zadanie

Obliczyć "frendzelki", tj. całki Fresnela

$$F_S \equiv \int_0^{\infty} dx\,\sin(x^2)\,, \qquad F_C \equiv \int_0^{\infty} dx\,\cos(x^2)\,.$$

Rozwiązanie: Całki te są zbieżne warunkowo: dzięki coraz szybszym, gdy $x \to \infty$, oscylacjom funkcji podcałkowych od -1 do $+1$, przyczynki wnoszone do całek przez duże x-y uśredniają się do zera. Aby je obliczyć całkujemy funkcję $f(z) = e^{-z^2}$ po konturze Γ_F pokazanym na rysunku 5. Ponieważ wewnątrz konturu funkcja $f(z)$ jest holomorficzna, mamy

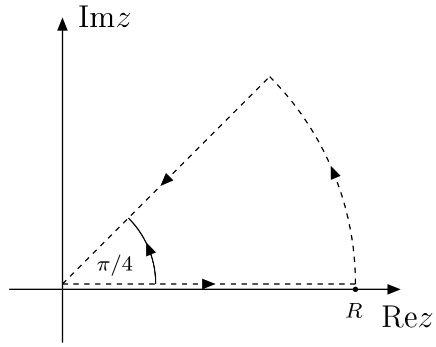
$$\oint_{\Gamma_F} dz\, f(z) = \int_0^R dx\, e^{-x^2} + \int_{\frac{1}{8}K_R} dz\, f(z) + \int_{\text{skos}} dz\, f(z) = 0\,.$$

W granicy $R \to \infty$ całka po $\frac{1}{8}$ okręgu o promieniu R, na którym $z = R\,e^{i\varphi}$, znika:

$$\left|\int_{\frac{1}{8}K_R} dz\, f(z)\right| = \left|\int_0^{\pi/4} d\varphi\, iR\, e^{i\varphi}\, e^{-R^2\cos 2\varphi}\, e^{-iR^2\sin 2\varphi}\right| \leq R\int_0^{\pi/4} d\varphi\, e^{-R^2\cos 2\varphi}\,,$$

i korzystając z nierówności $\cos 2\varphi \geq 1 - 4\varphi/\pi$ (słusznej dla $0 \leq \varphi \leq \pi/4$) mamy

$$\left|\int_{\frac{1}{8}K_R} dz\, f(z)\right| \leq R\, e^{-R^2}\int_0^{\pi/4} d\varphi\, e^{4R^2\varphi/\pi} = \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{-R^2}\right) \to 0\,.$$



Rysunek 5: Kontur całkowania Γ_F (tzw. "topserek").

Dalej,[8]

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R dx\, e^{-x^2} = \int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dx\, e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,$$

i uwzględniając, że w całce po skosie, $z = r\, e^{\frac{i}{4}\pi}$, $dz = dr\, e^{\frac{i}{4}\pi}$ oraz $z^2 = r^2\, e^{\frac{i}{2}\pi} = ir^2$, mamy

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{\frac{i}{4}\pi}\int_\infty^0 dr\, e^{-ir^2} = 0\,.$$

Stąd,

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty dr\, \cos(r^2) - i\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty dr\, \sin(r^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,$$

i przyrównując do siebie części rzeczywiste i urojone po lewej i prawej stronie otrzymujemy dwa równania

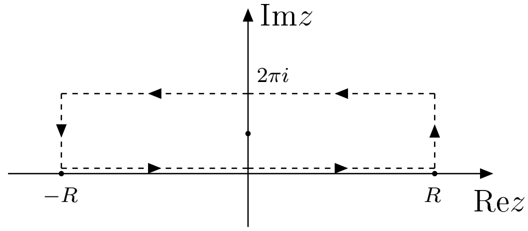
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty dr\, \cos(r^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty dr\, \sin(r^2) &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty dr\, \cos(r^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty dr\, \sin(r^2) &= 0\,,\end{aligned}$$

których rozwiązanie daje

$$F_S = F_C = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,.$$

[8]Ponieważ bywają i tacy, co nie wiedzą:

$$\left(\int_{-\infty}^\infty dx\, e^{-x^2}\right)^2 = \int_{-\infty}^\infty dx\, e^{-x^2}\int_{-\infty}^\infty dy\, e^{-y^2} = \iint_{\mathbb{R}^2} dxdy\, e^{-(x^2+y^2)} = 2\pi\int_0^\infty dr\, r\, e^{-r^2} = \pi\,.$$



Rysunek 6: Prostokątny kontur całkowania w płaszczyźnie zmiennej zespolonej z.

Zadanie
Podać warunki zbieżności całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ax}}{1+e^x}$$

i obliczyć ją metodą residuów.
Rozwiązanie: Dla $x \to +\infty$ funkcja podcałkowa zachowuje się jak $e^{(a-1)x}$, a dla $x \to -\infty$, jak e^{ax}. Wynika stąd, że całka jest zbieżna (bezwzględnie), jeśli $0 < a < 1$.

Aby znaleźć całkę dla takich wartości a, obliczamy całkę po konturze Γ pokazanym na rysunku 6 z funkcji $f(z) = e^{az}/(1+e^z)$. Funkcja ta ma bieguny proste w punktach, w których $e^z = -1$, tj. w $z_n = i(\pi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Wewnątrz konturu znajduje się jednak tylko punkt $z_0 = i\pi$. Kontur składa się z czterech odcinków prostych, na których odpowiednio: $z = x$, $z = R + iy$, $z = x + 2\pi i$ i wreszcie $z = -R + iy$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma dz\, f(z) = &\int_{-R}^{R} dx\, \frac{e^{ax}}{1+e^x} + i\int_0^{2\pi} dy\, \frac{e^{aR}\, e^{iay}}{1+e^R\, e^{iy}} \\ &+ \int_R^{-R} dx\, \frac{e^{2a\pi i}\, e^{ax}}{1+e^x} + i\int_{2\pi}^{0} dy\, \frac{e^{-aR}\, e^{iay}}{1+e^{-R}\, e^{iy}} = 2\pi i\ \operatorname{res} f(z)\big|_{z=i\pi}\ .\end{aligned}$$

Kontur został tak sprytnie dobrany, że w mianownik w trzeciej całce jest taki sam jak w pierwszej i po wyłączeniu przed nią stałego czynnika $e^{2a\pi i}$ jest ona równa (z minusem, ze względu na przeciwną orientację) pierwszej całce.

Jak zwykle musimy pokazać, że w granicy $R \to \infty$ całki po bokach prostokąta znikają. Szacujemy. Prawy boczek (kroki standardowe):

$$\left|\int_0^{2\pi} dy\, \frac{e^{aR}\, e^{iay}}{1+e^R\, e^{iy}}\right| \le \int_0^{2\pi} dy\, \frac{e^{aR}}{|1+e^R\, e^{iy}|} \le \int_0^{2\pi} dy\, \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \to 0\,,$$

jako że założyliśmy, że $a < 1$. Lewy podobnie:

$$\left|\int_{2\pi}^{0} dy\, \frac{e^{-aR}\, e^{iay}}{1+e^{-R}\, e^{iy}}\right| \le \int_0^{2\pi} dy\, \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}} \to 0\,,$$

bo z kolei $0 < a$. Czyli w granicy $R \to \infty$ mamy:

$$\left(1 - e^{2a\pi i}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ax}}{1+e^x} = 2\pi i\ \operatorname{res} f(z)\big|_{z=i\pi}\ .$$

Obliczamy residuum (H nad znakiem równości oznacza zastosowanie reguły Szpitalnika):

$$\begin{aligned}\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=i\pi} &= \lim_{z\to i\pi} \frac{(z-i\pi)e^{az}}{1+e^z} \\ &= e^{ia\pi} \lim_{z\to i\pi} \frac{z-i\pi}{1+e^z} \stackrel{\mathrm{H}}{=} e^{ia\pi}\, \frac{1}{e^z}\bigg|_{z=i\pi} = -e^{ia\pi}\,.\end{aligned}$$

Ostatecznie więc[9]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ax}}{1+e^x} = \frac{-2\pi i\, e^{ia\pi}}{1-e^{2a\pi i}} = \frac{-2\pi i}{e^{-ia\pi}-e^{a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}\,.$$

Zadanie

Metodą residuów obliczyć całkę "kolokwialkę" tzn. typową wydumaną (z powodu tego π^2) całkę, która nadaje się na kolokwia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+\pi^2)\,\mathrm{ch}\, x}\,.$$

Rozwiązanie: Całkę tę można obliczyć całkując funkcję

$$f(z) = \frac{1}{(z-i\pi)\,\mathrm{ch}\, z}\,,$$

po konturze z rysunku 6. Mamy bowiem

$$\begin{aligned}\oint dz\, f(z) = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x-i\pi)\,\mathrm{ch}\, x} &+ \int_{R}^{-R} \frac{dx}{(x+2\pi i-i\pi)\,\mathrm{ch}\,(x+2\pi i)} \\ &+ \int_{\mathrm{boki}} dz\, f(z) = 2\pi i \sum_i \mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=z_i}\,,\end{aligned}$$

gdzie z_i są punktami osobliwymi funkcji $f(z)$ znajdującymi się wewnątrz konturu całkowania. W granicy $R\to\infty$ całki po bokach konturu z rysunku 6 znikają. Np. całkę po prawym boku, na którym $z=R+iy$, szacujemy następująco:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} \frac{i\,dy}{(R+iy-i\pi)\,\mathrm{ch}\,(R+iy)}\right| &\le \int_0^{2\pi} \frac{2dy}{|R+i(y-\pi)|\,|e^R e^{iy}+e^{-R}e^{-iy}|} \\ &\le \int_0^{2\pi} \frac{2dy}{|R+i(y-\pi)|\,(e^R-e^{-R})} \to 0\,.\end{aligned}$$

Ponieważ jednak $\mathrm{ch}\,(x+2\pi i) = \mathrm{ch}\, x$, po odwróceniu granic drugiej całki otrzymujemy w granicy $R\to\infty$ związek

$$2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+\pi^2)\,\mathrm{ch}\, x} = 2\pi i \sum_i \mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=z_i}\,,$$

[9] Czy ten sam wynik dostaniemy biorąc górny bok konturu na rysunku 6 na wysokości $4\pi i$? A na wysokości $2\pi i\, k$ z $k\in\mathbb{Z}_+$ lub $k\in\mathbb{Z}_-$? (Ćwiczenie w sumowaniu szeregu geometrycznego...)

Funkcja $f(z)$ ma biegun prosty w $z = i\pi$,

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=i\pi} = \frac{1}{\operatorname{ch}(i\pi)} = \frac{1}{\cos\pi} = -1\,,$$

oraz bieguny proste w $z_n = i\pi(\frac{1}{2} + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, z czego tylko te odpowiadające $n = 0$ i $n = 1$ znajdują się wewnątrz konturu całkowania.

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=i\frac{\pi}{2}} = \lim_{z\to i\frac{\pi}{2}} \frac{z - i\frac{\pi}{2}}{(z - i\pi)\operatorname{ch} z} =^H= \frac{1}{-i\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}\,,$$

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=i\frac{3\pi}{2}} = \lim_{z\to i\frac{3\pi}{2}} \frac{z - i\frac{3\pi}{2}}{(z - i\pi)\operatorname{ch} z} =^H= \frac{1}{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}\left(i\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Łącząc wszystko znajdujemy, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \pi^2)\operatorname{ch} x} = \frac{4}{\pi} - 1\,.$$

(A *Mathematica* na tej całce pada...).

Zadanie
Metodą residuów obliczyć całkę

$$\int_0^{\infty} dx\, \frac{x^n}{1 + x^{2n}}\,,$$

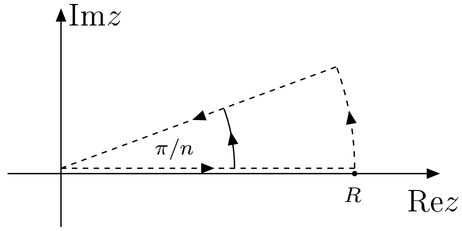
w której $n \in \mathbb{N}$ (całka jest zbieżna dla $n \geq 2$, bo dla $x \to \infty$ funkcja podcałkowa zachowuje się jak $\sim 1/x^n$). Ograniczamy się tu do naturalnych n, aby uniknąć problemu definiowania z^n dla niecałkowitych n, którym to problemem zajmiemy się dalej; oczywiście powyższa całka z funkcji reczywistej jest zbieżna dla dowolnych rzeczywistych $n > 1$.
Rozwiązanie: Potrzebna tu sztuczka jest podobna do tej z poprzedniego zadania z tym, że kontur trzeba teraz wybrać tak, by jednym jego fragmentem była dodatnia półoś rzeczywista i by na drugim fragmencie czynnik z^{2n} w mianowniku był też równy x^{2n}. Takie wymagania spełnia pokazany na rysunku 7 kontur typu "klin". Po tym konturze całkujemy funkcję $f(z) = z^n/(1 + z^{2n})$. Ma ona bieguny proste w miejscach zerowych mianownika, tj. w punktach będących pierwiastkami $2n$-tego stopnia z -1:

$$z_k = (-1)^{1/2n} = \exp\left(\frac{i}{2n}(\pi + 2k\pi)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n - 1\,.$$

Jak nietrudno zauważyć, wewnątrz konturu pokazanego na rysunku 7 znajduje się tylko pierwiastek z_0.

Mamy zatem:

$$\oint_\Gamma dz\, f(z) = \int_0^R dx\, f(x) + \int_0^{\pi/n} d\varphi\, iR\, e^{i\varphi} f\big(R\, e^{i\varphi}\big)$$
$$+ \int_R^0 dr\, e^{i\pi/n} \frac{r^n\, e^{i\pi}}{1 + r^{2n}} = 2\pi i\, \operatorname{res} f(z)|_{z=z_0}\,.$$



Rysunek 7: Kontur całkowania typu "klin" (lub "chudy topserek").

W ostatniej całce po górnej "krawędzi klina" podstawiliśmy $z = r\, e^{i\pi/n}$ i wykorzystaliśmy to, że wtedy $z^{2n} = r^{2n}$.

Następne kroki polegają na standardowym sprawdzeniu, że (jeśli $n > 1$)

$$\left| \int_0^{\pi/n} d\varphi\, iR\, e^{i\varphi}\, f\big(R\, e^{i\varphi}\big) \right| \leq \int_0^{\pi/n} d\varphi\, \frac{R^{n+1}}{R^{2n}-1} \to 0\,,$$

gdy $R \to \infty$ oraz na zauważeniu, że

$$\int_R^0 dr\, e^{i\pi/n}\, \frac{r^n\, e^{i\pi}}{1+r^{2n}} = -e^{i\pi/n} \int_R^0 dr\, \frac{r^n}{1+r^{2n}} = e^{i\pi/n} \int_0^R dx\, \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,,$$

co w granicy $R \to \infty$ pozwala napisać

$$\big(1 + e^{i\pi/n}\big) \int_0^\infty dx\, \frac{x^n}{1+x^{2n}} = 2\pi i\ \operatorname{res} f(z)\big|_{z=z_0}\ .$$

Residuum nietrudno obliczyć (biegun prosty):

$$\operatorname{res} f(z)\big|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)z^n}{z^{2n}+1} = i\ \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{z^{2n}+1} \overset{\mathrm{H}}{=} \frac{i}{2n\, z^{2n-1}}\bigg|_{z=z_0} = \frac{-i}{2n}\, e^{i\pi/2n}\,.$$

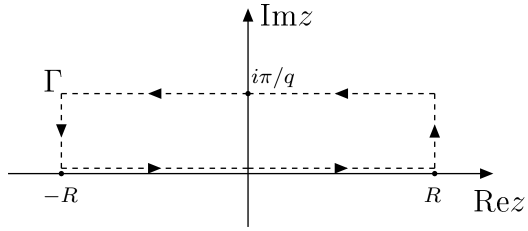
Tak więc

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^n}{1+x^{2n}} = 2\pi i\, \frac{-i\, e^{i\pi/2n}}{2n(1+e^{i\pi/n})} = \frac{\pi}{2n}\, \frac{1}{\cos(\pi/2n)}\,.$$

Zadanie
Podać warunki zbieżności całki

$$I = \int_0^\infty dx\, \frac{\operatorname{ch}(px)}{\operatorname{ch}(qx)}\, \cos(mx)\,,$$

i obliczyć ją metodą wykorzystującą residua.



Rysunek 8: Prostokątny kontur całkowania w płaszczyźnie zmiennej zespolonej z.

Rozwiązanie: Całka jest zbieżna, jeśli $q > p$. Aby ją obliczyć rozpatrujemy całkę

$$\oint_\Gamma dz\, f(z) \equiv \oint_\Gamma dz\, \frac{e^{pz+imz}}{\mathrm{ch}(qz)}\,,$$

po zamkniętym konturze Γ pokazanym na rysunku 8.

W granicy $R \to \infty$ część rzeczywista całki po osi rzeczywistej z funkcji $f(z)$ da podwojoną szukaną całkę:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{px+imx}}{\mathrm{ch}(qx)} &= \int_{-\infty}^{0} dx\, \frac{e^{px+imx}}{\mathrm{ch}(qx)} + \int_0^{\infty} dx\, \frac{e^{px+imx}}{\mathrm{ch}(qx)} \\ &= \int_0^{\infty} dx\, \frac{e^{-px-imx}}{\mathrm{ch}(qx)} + \int_0^{\infty} dx\, \frac{e^{px+imx}}{\mathrm{ch}(qx)} \\ &= 2\int_0^{\infty} dx\, \frac{\mathrm{ch}(px)}{\mathrm{ch}(qx)}\cos(mx) + 2i\int_0^{\infty} dx\, \frac{\mathrm{sh}(px)}{\mathrm{ch}(qx)}\sin(mx)\,.\end{aligned}$$

Wewnątrz konturu pokazanego na rysunku 8 funkcja $f(z)$ ma tylko jeden biegun prosty w $z = i\pi/2q$. Jej residuum w tym punkcie wynosi

$$\begin{aligned}\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=\frac{i\pi}{2q}} &= e^{(p+im)\frac{i\pi}{2q}} \lim_{z\to\frac{i\pi}{2q}} \frac{z - i\pi/2q}{\mathrm{ch}(qz)} \\ &\overset{H}{=} e^{(p+im)\frac{i\pi}{2q}} \lim_{z\to\frac{i\pi}{2q}} \frac{1}{q\,\mathrm{sh}(i\pi/2)} = \frac{e^{(p+im)\frac{i\pi}{2q}}}{qi}\,.\end{aligned}$$

(H nad znakiem równości oznacza zastosowanie reguły Szpitalnika).

Całka po górnym boku konturu z rysunku 8, na którym $z = x + i\pi$, jest równa

$$\int_{\infty}^{-\infty} dx\, \frac{e^{(p+im)(x+i\pi/q)}}{\mathrm{ch}(qx+i\pi)} = e^{(p+im)\frac{i\pi}{q}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{(p+im)x}}{\mathrm{ch}(qx)}\,,$$

gdyż $\mathrm{ch}(qx + i\pi) = -\mathrm{ch}(qx)$. Jeśli więc tylko znikają całki po pionowych bokach konturu z rysunku 8, otrzymujemy z twierdzenia o residuach związek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{(p+im)x}}{\mathrm{ch}(qx)} = \frac{2\pi}{q}\, \frac{e^{(p+im)\frac{i\pi}{2q}}}{1 + e^{(p+im)\frac{i\pi}{q}}} = \frac{\pi}{q}\, \frac{1}{\cos\left[(p+im)\frac{\pi}{2q}\right]}$$

$$= \frac{\pi}{q} \, \frac{\cos\left(\frac{p\pi}{2q}\right)\, \mathrm{ch}\left(\frac{m\pi}{2q}\right) + i \sin\left(\frac{p\pi}{2q}\right)\, \mathrm{sh}\left(\frac{m\pi}{2q}\right)}{\cos^2\left(\frac{p\pi}{2q}\right)\, \mathrm{ch}^2\left(\frac{m\pi}{2q}\right) + \sin^2\left(\frac{p\pi}{2q}\right)\, \mathrm{sh}^2\left(\frac{m\pi}{2q}\right)} \, .$$

Zatem

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\mathrm{ch}(px)}{\mathrm{ch}(qx)} \, \cos(mx) = \frac{\pi}{2q} \, \frac{\cos\left(\frac{p\pi}{2q}\right)\, \mathrm{ch}\left(\frac{m\pi}{2q}\right)}{\cos^2\left(\frac{p\pi}{2q}\right)\, \mathrm{ch}^2\left(\frac{m\pi}{2q}\right) + \sin^2\left(\frac{p\pi}{2q}\right)\, \mathrm{sh}^2\left(\frac{m\pi}{2q}\right)} \, ,$$

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\mathrm{sh}(px)}{\mathrm{ch}(qx)} \, \sin(mx) = \frac{\pi}{2q} \, \frac{\sin\left(\frac{p\pi}{2q}\right)\, \mathrm{sh}\left(\frac{m\pi}{2q}\right)}{\cos^2\left(\frac{p\pi}{2q}\right)\, \mathrm{ch}^2\left(\frac{m\pi}{2q}\right) + \sin^2\left(\frac{p\pi}{2q}\right)\, \mathrm{sh}^2\left(\frac{m\pi}{2q}\right)} \, .$$

Pozostaje tylko pokazać, że znikają całki po bokach prostokąta z rysunku 8. Na tych bokach $z = \pm R + iy$ i

$$\left| \int_{\mathrm{bok}} dz \, f(z) \right| \leq 2 \int_0^{\pi/q} dy \, \frac{e^{\pm pR} \, e^{-my}}{|e^{\pm qR} \, e^{iqy} + e^{\mp qR} \, e^{-iqy}|} \, .$$

Widać więc, że np. dla prawego boku, tj. dla $z = R + iy$, gdy $R \to \infty$,

$$\left| \int_{\mathrm{prawy\ bok}} dz \, f(z) \right| \leq 2 \int_0^{\pi/q} dy \, \frac{e^{pR} \, e^{-my}}{e^{qR} - e^{-qR}} \to 0 \, ,$$

jeśli, co też i było warunkiem zbieżności wyjściowej całki, $q > p$.

Przypomnienie

Funkcja $\ln(z)$ nie może być określona na całej płaszczyźnie zespolonej zmiennej z. Dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$ wyrażenie

$$r \, e^{i(\varphi + 2\pi k)}$$

reprezentuje jedną i tę samą liczbę zespoloną z, ale wartość logarytmu z,

$$\ln(z) = \ln\left(r \, e^{i(\varphi+2\pi k)}\right) = \ln r + i\varphi + 2k\pi i \, ,$$

zależy od wyboru $k \in \mathbb{Z}$. Przy obchodzeniu punktu $z = 0$, gdy faza argumentu funkcji $\ln z$ przyrastałaby o 2π, wartość funkcji logarytm zmieniałaby się o $2\pi i$ za każdym obiegnięciem. Z tego powodu punkt $z = 0$ jest zwany *punktem rozgałęzienia* funkcji $\ln z$.

Najbardziej eleganckim sposobem zdefiniowania logarytmu jako funkcji jednoznacznej (to jest pleonazm: funkcja jest z definicji jednoznaczna) jest określenie go nie na zwykłej płaszczyźnie zespolonej, lecz na powierzchni Riemanna reprezentowanej przez nawijające się wokół punktu $z = 0$ powierzchnie (przypominające kluczowy element - być może dziś już przedpotopowych - maszynek do mięsa). Z praktycznego punktu widzenia (tj.

do obliczania całek z funkcji rzeczywistych metodą residuów) wystarczy jednak określić logarytm na płaszczyźnie zespolonej z rozcięciem biegnącym od punktu rozgałęzienia $z = 0$ do nieskończoności, co umożliwia jednoznaczne przypisanie fazy każdej (nieleżącej na rozcięciu) liczbie zespolonej, jako że na rozciętej płaszczyźnie do tego samego z nie można powrócić po drodze owijającej się (raz lub więcej razy) wokół punktu $z = 0$.

Najwygodniej jest przyjąć rozcięcie biegnące od punktu $z = 0$ do nieskończoności wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej i zdefiniować fazę z tak, by logarytm dodatniej liczby rzeczywistej był taki sam jak logarytm określony na $\mathbb{R}_+$. Przyjmujemy zatem, że liczba $z = x + i\delta$, gdzie $x > 0$, a $\delta \to 0^+$ (którą będziemy oznaczać $x + i0$), ma fazę $\varphi = 0$ (i wobec tego $\ln(x + i0) = \ln x$), a liczba $z = x - i0$ (tj. $z = x - i\delta$) ma fazę 2π (i stąd $\ln(x-i0) = 2\pi+\ln x$). Zauważmy też, że logarytm z rzeczywistej liczby ujemnej $x = -|x|$ jest przy takiej definicji logarytmu dobrze określoną liczbą zespoloną $\ln|x| + i\pi$.

Zadanie

Obliczyć całkę

$$\oint_\Gamma dz\, f(z) \equiv \oint_\Gamma dz\, \frac{\ln z}{z^2 + a^2}$$

po konturze "dziurka od klucza" pokazanym na rysunku 9.

Rozwiązanie: Wewnątrz konturu funkcja podcałkowa ma dwa bieguny proste w punktach $z_\pm = \pm i|a|$. Zatem

$$\oint_\Gamma dz\, f(z) \equiv \int_{K_\varepsilon^-} dz\, f(z) + \int_\varepsilon^R dx\, f(x + i0) + \int_{K_R} dz\, f(z) + \int_R^\varepsilon dx\, f(x - i0) = 2\pi i \left(\operatorname{res} f(z)|_{z=i|a|} + \operatorname{res} f(z)|_{z=-i|a|} \right).$$

Nietrudno pokazać, że całka po małym okręgu, na którym $z = \varepsilon\, e^{i\varphi}$, znika w granicy $\varepsilon \to 0$. Rzeczywiście:

$$\left| \int_{K_\varepsilon^-} dz\, f(z) \right| \le \int_\delta^{2\pi-\delta} d\varphi \left| \varepsilon\, \frac{\ln(\varepsilon\, e^{i\varphi})}{a^2 + \varepsilon^2\, e^{2i\varphi}} \right| \le \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \frac{\varepsilon\, \ln \varepsilon}{a^2 + \varepsilon^2\, e^{2i\varphi}} \right| + \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \varepsilon\, \frac{\varphi}{a^2 + \varepsilon^2\, e^{2i\varphi}} \right| \to 0\,,$$

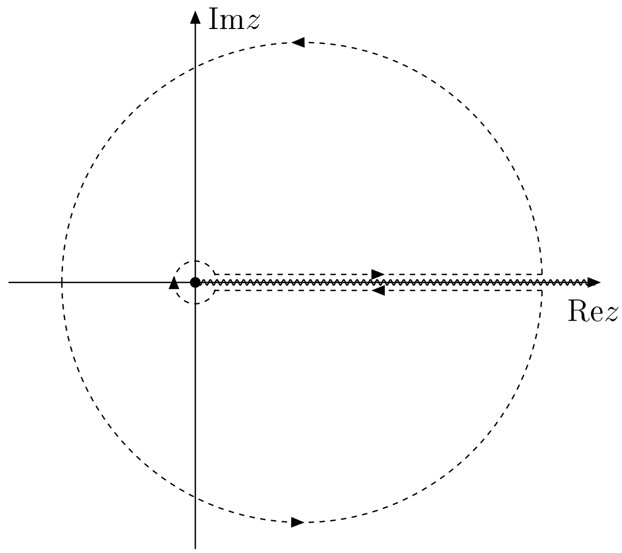
gdyż w granicy tej mianownik w obu wyrazach dąży do stałej równej a^2, a same całki są skończone i proporcjonalne do znikających czynników $\varepsilon \ln \varepsilon$ oraz ε.

Również całka po dużym okręgu, na którym $z = R\, e^{i\varphi}$ znika w granicy $R \to \infty$:

$$\left| \int_{K_R} dz\, f(z) \right| \le \int_0^{2\pi} d\varphi\, R \left| \frac{\ln R + i\varphi}{R^2 e^{2i\varphi} + a^2} \right| \le \int_0^{2\pi} d\varphi\, R\, \frac{|\ln R + i\varphi|}{R^2 - a^2} \to 0\,.$$

W podwójnej granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ mamy zatem równość

$$\int_0^\infty dx\, f(x + i0) + \int_\infty^0 dx\, f(x - i0) = 2\pi i \left(\operatorname{res} f(z)|_{z=i|a|} + \operatorname{res} f(z)|_{z=-i|a|} \right).$$



Rysunek 9: Kontur Γ zwany "dziurką od klucza". Falista linia biegnąca wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej oznacza rozcięcie, tj. zbiór liczb nie należących do dziedziny funkcji $\ln z$. Promień ε małego okręgu obiegającego $z = 0$ dąży do zera; promień R dużego okręgu dąży do nieskończoności.

Residua łatwo znaleźć:

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=i|a|} = \frac{\ln\left(|a|e^{i\pi/2}\right)}{2i|a|},$$
$$\operatorname{res} f(z)|_{z=-i|a|} = \frac{\ln\left(|a|e^{3i\pi/2}\right)}{-2i|a|},$$

tak iż suma residuów wynosi $-\pi/2|a|$. Ponieważ

$$f(x-i0) = \frac{\ln\left(x\, e^{2\pi i}\right)}{x^2+a^2} = \frac{\ln x}{x^2+a^2} + 2\pi i \frac{1}{x^2+a^2},$$

wyrazy z logarytmami redukują się (po "wyprostowaniu" granic drugiej całki) i uzyskujemy równość

$$-2\pi i \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = 2\pi i \left(\operatorname{res} f(z)|_{z=i|a|} + \operatorname{res} f(z)|_{z=-i|a|} \right) = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{2|a|} \right),$$

która jakkolwiek prawdziwa, sama w sobie jest mało interesująca - ten sam wynik, tj. całkę z $f(x) = 1/(x^2+a^2)$ można znaleźć prościej. Przykład ten pokazuje jednak, jak należy się obchodzić z logarytmami. Łatwo także na tym przykładzie sprawdzić, że uzyskiwane wyniki nie zależą od wyboru gałęzi logarytmu, tj. otrzymalibyśmy ten sam kośowy związek, nawet gdyby zdefiniować logarytm tak, że na górnym brzegu rozcięcia mielibyśmy $\ln z = \ln\left(x\, e^{2\pi k i}\right)$, a na dolnym wobec tego $\ln z = \ln\left(x\, e^{2\pi(k+1)i}\right)$.

Co więcej poniesioną tu porażkę można przekuć w sukces, tj. w narzędzie do obliczania całek w granicach od 0 do ∞ z funkcji wymiernych $R(x)$, które nie są parzyste, tj. $R(-x) \neq R(x)$ (i mogą mieć osobliwości na ujemnej osi rzeczywistej), których to całek nie można obliczać przez rozciągięcie całkowania na całą oś rzeczywistą i skorzystanie z konturu z rysunku 2. Ilustruje to następujące Zadanie.

Zadanie
Obliczyć całkę

$$I = \int_0^\infty dx \, \frac{x}{(x^2+1)(x+1)} \, ,$$

wykorzystując kontur typu "dziurka od klucza" z rysunku 9.
Rozwiązanie: Nauczeni doświadczeniem rozpatrujemy całkę

$$\oint_\Gamma dz \, \frac{z \ln z}{(z^2+1)(z+1)} \, ,$$

po konturze z rysunku 9. Po standardowym pokazaniu, że całki po okręgach o promieniach ε i R znikają w granicach $\varepsilon \to 0$ i $R \to \infty$, otrzymujemy równość

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x \ln x}{(x^2+1)(x+1)} + \int_\infty^0 dx \, \frac{x \ln(x \, e^{2\pi i})}{(x^2+1)(x+1)} = 2\pi i \sum_{z_i = \pm i, -1} \mathrm{res} \left[\frac{z \ln z}{(z^2+1)(z+1)} \right]_{z=z_i} \, ,$$

czyli, po zredukowaniu się całek z logarymami, tak jak w poprzednim przykładzie,

$$-\int_0^\infty dx \, \frac{x \ln x}{(x^2+1)(x+1)} = \sum_{z_i = \pm i, -1} \mathrm{res} \left[\frac{z \ln z}{(z^2+1)(z+1)} \right]_{z=z_i} \, ,$$

Residua obliczamy tak jak poprzednio:

$$\begin{aligned}
\mathrm{res} \left[\frac{z \ln z}{(z^2+1)(z+1)} \right]_{z=i} &= \frac{i \ln \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)}{2i(1+i)} = \frac{1-i}{4} \, i \, \frac{\pi}{2} \, , \\
\mathrm{res} \left[\frac{z \ln z}{(z^2+1)(z+1)} \right]_{z=-i} &= \frac{-i \ln \left(e^{i\frac{3\pi}{2}} \right)}{-2i(1-i)} = \frac{1+i}{4} \, i \, \frac{3\pi}{2} \, , \\
\mathrm{res} \left[\frac{z \ln z}{(z^2+1)(z+1)} \right]_{z=-1} &= -\frac{1}{2} \ln \left(e^{i\pi} \right) = -\frac{i}{2} \, \pi \, .
\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem

$$I = -\frac{\pi}{4} \left(-2i + i \, \frac{1-i}{2} + 3i \, \frac{1+i}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \, .$$

Wynik ten można oczywiście sprawdzić standardową metodą:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2} \lim_{\Lambda \to \infty} \int_0^\Lambda dx \left(\frac{1}{1+x} - \frac{x-1}{1+x^2} \right) .$$

Konieczne jest tu wprowadzenie “reularyzacji” Λ, gdyż rozkładając na ułamki proste funkcję, z której całka była zbieżna, otrzymaliśmy różnicę dwu z osobna niezbieżnych całek. Stąd

$$I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\lim_{\Lambda\to\infty}\left(\ln(1+x)\big|_0^{\Lambda} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\big|_0^{\Lambda^2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\,,$$

tak jak wyżej.

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,,$$

wykorzystując kontur typu “dziurka od klucza” z rysunku 9.
Rozwiązanie: Poprzedni przykład pokazuje, że całkowanie funkcji $(z^2+a^2)^{-1}\ln z$ po konturze “dziurka od klucza” nie daje poszukiwanej całki (jak zobaczymy dalej, całkę tę można jednak otrzymać całkując funkcję $(z^2+a^2)^{-1}\ln z$ po konturze ODS pokazanym na rysunku 4). Spróbujmy więc scałkować po “dziurce od klucza” funkcję

$$f(z) = \frac{(\ln z)^2}{z^2+a^2}\,.$$

W granicy $\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$ (znikanie w tej granicy całek po okręgach małym i dużym wykazuje się tak samo, jak poprzednio) otrzymujemy:

$$\int_0^\infty dx\,\frac{(\ln x)^2}{x^2+a^2} + \int_\infty^0 dx\,\frac{(2\pi i+\ln x)^2}{x^2+a^2} = 2\pi i\left(\mathrm{res}\,f(z)\big|_{z=+i|a|} + \mathrm{res}\,f(z)\big|_{z=-i|a|}\right).$$

Obliczamy residua:

$$\mathrm{res}\,f(z)\big|_{z=+i|a|} = \frac{\ln^2\left(|a|e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{2i|a|}\,,$$
$$\mathrm{res}\,f(z)\big|_{z=+i|a|} = \frac{\ln^2\left(|a|e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)}{-2i|a|}\,.$$

Ich suma wynosi

$$\sum \mathrm{res}\,f(z) = \frac{1}{2i|a|}\left\{\ln^2|a| + i\pi\ln|a| - \frac{\pi^2}{4} - \left(\ln^2|a| + 3i\pi\ln|a| - \frac{9\pi^2}{4}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{i|a|}\left(-i\pi\ln|a| + \pi^2\right).$$

Rozpisując kwadrat logarytmu w drugiej całce i obracając w niej granice całkowania znajdujemy, że całki z $\ln^2 x$ ulegają redukcji i otrzymujemy równość:

$$-4\pi i\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{x^2+a^2} + 4\pi^2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = 2\pi i\,\frac{\pi^2 - i\pi\ln|a|}{i|a|}\,,$$

z której, przyrównując do siebie części rzeczywiste i urojone obu stron, otrzymujemy dwie całki (drugą z nich już oczywiście znamy):

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\ln x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2|a|} \, \ln|a| \, , \qquad\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2|a|} \, .$$

Zadanie
Obliczyć

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\ln x}{x^2+a^2} \, ,$$

wykorzystując kontur ODS z rysunku 4.
Rozwiązanie: Całkujemy po konturze ODS funkcję $(z^2+a^2)^{-1}\ln z$ wybierając cięcie tak jak poprzednio, tj. od $z=0$ do nieskończoności wzdłuż osi rzeczywistej. Standardowo pokazujemy, że całki po małym półokręgu o promieniu ε oraz po dużym półokręgu o promieniu R znikają w granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$. W tej granicy mamy zatem

$$\oint_{\mathrm{ODS}} dz \, f(z) = \int_{-\infty}^0 dx \, \frac{\ln\left(|x| \, e^{i\pi}\right)}{x^2+a^2} + \int_0^\infty dx \, \frac{\ln x}{x^2+a^2} = 2\pi i \; \mathrm{res} \, f(z)\big|_{z=+i|a|} \, ,$$

czyli

$$i\pi \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+a^2} + \int_{-\infty}^0 dx \, \frac{\ln|x|}{x^2+a^2} + \int_0^\infty dx \, \frac{\ln x}{x^2+a^2} = 2\pi i \; \frac{\frac{i}{2}\,\pi + \ln|a|}{2i|a|} \, .$$

Uwzględniliśmy tu to, że wewnątrz konturu ODS znajduje się tylko biegun prosty w $z = i|a|$. Dokonując w dwu pierwszych całkach zamiany zmiennych $x \to -x$ i przyrównując następnie do siebie części rzeczywiste i urojone obu stron równości dostajemy stąd dwa (znane już) wyniki:

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\ln x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2|a|} \, \ln|a| \, , \qquad\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2|a|} \, .$$

Zadanie
Do kompletu obliczmy jeszcze całkę z funkcji

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{z^2+a^2} \, ,$$

po konturze ODS z rysunku 4.
Rozwiązanie: Jak zwykle całki po małym półokręgu o promieniu ε oraz po dużym okręgu o promieniu R znikają w granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$. W tej granicy otrzymujemy więc

$$\oint_{\mathrm{ODS}} dz \, f(z) = \int_{-\infty}^0 dx \, \frac{(i\pi + \ln|x|)^2}{x^2+a^2} + \int_0^\infty dx \, \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2} = 2\pi i \; \mathrm{res} \, f(z)\big|_{z=+i|a|} \, .$$

Residuum tej funkcji w $z = i|a|$ było już znalezione. Rozpisując pierwszą całkę otrzymujemy więc

$$-\pi^2 \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + a^2} + 2\pi i \int_{-\infty}^{0} dx\, \frac{\ln|x|}{x^2 + a^2} + \int_{-\infty}^{0} dx\, \frac{\ln^2|x|}{x^2 + a^2}$$
$$+ \int_{0}^{\infty} dx\, \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{|a|} \left(\ln^2|a| + i\pi \ln|a| - \frac{\pi^2}{4} \right).$$

Po dokonaniu zamiany zmiennych $x \to -x$ w trzech pierwszych całkach, przyrównanie części urojonych obu stron daje znaną już całkę

$$\int_{0}^{\infty} dx\, \frac{\ln x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2|a|} \ln|a|.$$

Części rzeczywiste zaś dają równość

$$2\int_{0}^{\infty} dx\, \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} = \pi^2 \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} + \frac{\pi}{|a|} \left(\ln^2|a| - \frac{\pi^2}{4} \right).$$

Ponieważ znamy już całkę stojącą po prawej stronie ($\pi/2|a|$), otrzymujemy nowy wynik (potwierdzany przez program *Mathematica*)

$$\int_{0}^{\infty} dx\, \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{8|a|} \left(\pi^2 + 4\ln^2|a| \right).$$

Aby nie powstało mylne wrażenie, że zawsze jest lepiej całkować funkcje postaci funkcja wymierna razy logarytm po konturze ODS z rysunku 4, spróbujmy rozwiązać następujące zadanie.

Zadanie
Mmetodą residuów obliczyć całkę

$$\int_{0}^{\infty} dx\, \frac{x \ln x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)},$$

w której a i b są liczbami rzeczywistymi.
Rozwiązanie: Zobaczmy co wyjdzie, jeśli scałkujemy funkcje $f(z) = z(z^2 + a^2)^{-1}(z^2 + b^2)^{-1} \ln z$ po konturze ODS (rysunek 4). Można jak zwykle pokazać, że całki po półokręgach małym i dużym znikają w granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ i z twierdzenia o residuach otrzymujemy równość

$$\int_{-\infty}^{0} dx\, \frac{x \ln(|x|\, e^{i\pi})}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} + \int_{0}^{\infty} dx\, \frac{x \ln x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = 2\pi i \left(\operatorname{res} f(z)\big|_{i|a|} + \operatorname{res} f(z)\big|_{i|b|} \right).$$

Ponieważ jednak mnożąca logarytm funkcja była *nieparzysta* (w poprzednich przykładach funkcje takie były parzyste), po dokonaniu w pierwszej całce podstawienia $x \to -x$ i obróceniu granic całkowania, całki z logarytmami ulegną redukcji i otrzymamy równość

$$-i\pi \int_{0}^{\infty} dx\, \frac{x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = 2\pi i \left(\operatorname{res} f(z)\big|_{z=i|a|} + \operatorname{res} f(z)\big|_{z=i|b|} \right).$$

Po obliczeniu residuów

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=i|a|} &= \frac{i|a|\ln\left(|a|e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{2i|a|(b^2-a^2)} = \frac{\ln\left(|a|e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{2(b^2-a^2)}\,, \\
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=i|b|} &= \frac{i|b|\ln\left(|b|e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{2i|b|(a^2-b^2)} = \frac{\ln\left(|b|e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{2(a^2-b^2)}\,,
\end{aligned}
$$

znajdujemy, że

$$
-i\pi\int_0^\infty dx\,\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = 2\pi i\,\frac{\ln(|a|/|b|)}{2(b^2-a^2)}\,,
$$

czyli

$$
\int_0^\infty dx\,\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{a^2-b^2}\,\ln\frac{|a|}{|b|}\,.
$$

Nie jest to jednak ta całka, którą chcieliśmy obliczyć!

W tej sytuacji niema innego wyjścia niż skorzystanie z konturu “dziurka od klucza” (rysunek 9) i całkowanie po nim funkcji

$$
g(z) = \frac{z\ln^2 z}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\,.
$$

Po standardowym pokazaniu, że całki po obu okręgach znikają w granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ otrzymujemy równość

$$
\int_0^\infty dx\,\frac{x\ln^2 x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} + \int_\infty^0 dx\,\frac{x\,(2\pi i+\ln x)^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = 2\pi i \sum_{z_0=\pm i|a|,\ \pm i|b|} \operatorname{res} g(z)\big|_{z=z_0}\,.
$$

Po uporządkowaniu całki z kwadratami logarytmów zredukują się, ale zostanie pożądana całka z logarytmem. Po obliczeniu residuów

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res} g(z)\big|_{z=i|a|} &= \frac{(i\pi/2+\ln|a|)^2}{2(b^2-a^2)}\,, \\
\operatorname{res} g(z)\big|_{z=-i|a|} &= \frac{(3i\pi/2+\ln|a|)^2}{2(b^2-a^2)}\,, \\
\operatorname{res} g(z)\big|_{z=i|b|} &= \frac{(i\pi/2+\ln|b|)^2}{2(a^2-b^2)}\,, \\
\operatorname{res} g(z)\big|_{z=-i|b|} &= \frac{(3i\pi/2+\ln|b|)^2}{2(a^2-b^2)}\,,
\end{aligned}
$$

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
-4\pi i\int_0^\infty dx\,\frac{x\ln x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} &+ 4\pi^2\int_0^\infty dx\,\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \\
&= \frac{2\pi i}{2(a^2-b^2)}\left[-4\pi i\ln\frac{|a|}{|b|} - 2\left(\ln^2|a| - \ln^2|b|\right)\right].
\end{aligned}
$$

Mamy stąd tę samą całkę, co poprzednio:

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{a^2-b^2} \ln \frac{|a|}{|b|} \,,$$

oraz całkę, którą chcieliśmy obliczyć (oba wyniki potwierdza program *Mathematica*):

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x \ln x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{2(a^2-b^2)} \left(\ln^2|a| - \ln^2|b|\right) .$$

Uwaga

Z zadań tych płynie następująca nauka: jeśli pragniemy metodą residuów obliczyć całkę

$$\int_0^\infty dx\, f(x) = \int_0^\infty dx\, R(x) \ln^n x \,,$$

w której $R(x)$ jest funkcją wymierną (zakładamy, że taką, iż powyższa całka jest zbieżna, przy czym wystarczy zbieżność warunkowa), to w ogólnym przypadku musimy ją obliczać całkując po konturze "dziurka od klucza" (rysunek 9) funkcję $R(z)\ln^{n+1} z$. Z konturu ODS z rysunku 4 możemy skorzystać (całkując po nim funkcję $R(z)\ln^n z$) tylko wtedy, gdy funkcja $R(x)$ jest parzysta.

Zadanie

Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2} \,.$$

Rozwiązanie: Ponieważ funkcja wymierna mnożąca logarytm jest parzysta, najlepiej wykorzystać w tym celu kontur ODS (rysunek 4). Po standardowym sprawdzeniu, że całki po obu półokręgach znikają w podwójnej granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$, mamy równość

$$\int_{-\infty}^0 dx\, \frac{\ln\left(|x|\, e^{i\pi}\right)}{(x^2+a^2)^2} + \int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2} = 2\pi i \operatorname{res} f(z)\big|_{z=i|a|} \,.$$

Residuum funkcji w jej biegunie drugiego rzędu wyznaczamy ze standardowego wzoru

$$\begin{aligned}
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=i|a|} &= \frac{d}{dz} \frac{\ln z}{(z+i|a|)^2}\bigg|_{z=i|a|} \\
&= \left[\frac{1}{z\,(z+i|a|)^2} - \frac{2\ln z}{(z+i|a|)^3}\right]_{z=i|a|} \\
&= \frac{i}{4|a|^3}\left(1 - \ln|a| - i\frac{\pi}{2}\right) .
\end{aligned}$$

Zatem

$$i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} + 2\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2} = 2\pi i \frac{i}{4|a|^3}\left(1 - \ln|a| - i\frac{\pi}{2}\right) ,$$

a stąd (co potwierdza program *Mathematica*)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4|a|^3}\,, \qquad \int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4|a|^3}\,(-1+\ln|a|)\,.$$

Oczywiście te same wyniki można też otrzymać różniczkując odpowiednio po parametrze uzyskane wcześniej już całki:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{d}{da^2}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = -\frac{d}{da^2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a^2}}\right),$$
$$\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{d}{da^2}\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{x^2+a^2} = -\frac{d}{da^2}\left(\frac{\pi}{4\sqrt{a^2}}\ln a^2\right).$$

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{(x-a)^2+b^2}\,.$$

Rozwiązanie: Ponieważ funkcja mnożąca logarytm nie jest parzysta, całkujemy po konturze "dziurka od klucza" z rysunku 9 funkcję

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z-a)^2+b^2} = \frac{\ln^2 z}{(z-a-i|b|)(z-a+i|b|)}\,.$$

Jak zwykle całki po dużym okręgu o promieniu R i po małym okręgu o promieniu ε znikają w granicy $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$ i po uporządkowaniu granic całek otrzymujemy związek

$$-4\pi i\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{(x-a)^2+b^2} + 4\pi^2\int_0^\infty \frac{dx}{(x-a)^2+b^2}$$
$$= 2\pi i\left(\mathrm{res}\,f(z)|_{z=a+i|b|} + \mathrm{res}\,f(z)|_{z=a-i|b|}\right).$$

Residua funkcji w punktach $z_\pm = a\pm i|b|$ znajdujemy standardowo:

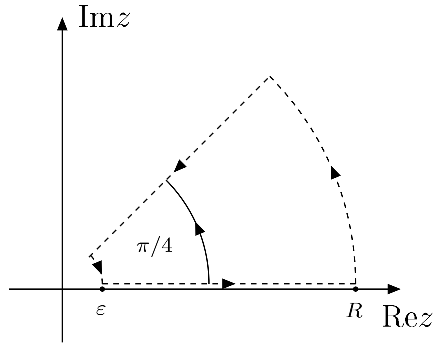
$$\mathrm{res}\,f(z)|_{z=a\pm i|b|} = \frac{(i\varphi_\pm + \ln\sqrt{a^2+b^2}\,)^2}{\pm 2i|b|}\,.$$

φ_+ i φ_- są tu fazami punktów z_+ i z_- (wyznaczanymi zgodnie z rozcięciem płaszczyzny), których moduły są jednakowe, $|z_\pm| = \sqrt{a^2+b^2}$. Ponieważ

$$2\pi i\left(\mathrm{res}\,f(z)|_{z=a+i|b|} + \mathrm{res}\,f(z)|_{z=a-i|b|}\right) = \frac{\pi}{|b|}\left\{2i(\varphi_+-\varphi_-)\ln|z_\pm| + \varphi_-^2 - \varphi_+^2\right\},$$

otrzymujemy związki

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{4|b|}\,(\varphi_- - \varphi_+)\ln(a^2+b^2)\,,$$
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{4\pi|b|}\,(\varphi_-^2 - \varphi_+^2)\,.$$



Rysunek 10: Kontur całkowania Γ ("nadgryziony topserek").

Jeśli $a > 0$, to

$$\varphi_+ = \operatorname{arctg}(|b|/|a|)\,, \qquad \varphi_- = 2\pi - \operatorname{arctg}(|b|/|a|)\,,$$

i $\varphi_- - \varphi_+ = 2(\pi - \operatorname{arctg}(|b|/|a|)$. Jeśli zaś $a < 0$, to, jak łatwo się zorientować,

$$\varphi_\pm = \pi \mp \operatorname{arctg}(|b|/a)\,,$$

i $\varphi_- - \varphi_+ = 2\operatorname{arctg}(|b|/a)$. Tak więc

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{(x-a)^2+b^2} = \frac{\pi}{2|b|}\ln(a^2+b^2) \times \begin{cases} \pi - \operatorname{arctg}(|b|/|a|)\,, & \text{gdy } a > 0 \\ \operatorname{arctg}(|b|/|a|)\,, & \text{gdy } a < 0 \end{cases}$$

i podobnie

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{|b|} \times \begin{cases} \pi - \operatorname{arctg}(|b|/|a|)\,, & \text{gdy } a > 0 \\ \operatorname{arctg}(|b|/|a|)\,, & \text{gdy } a < 0 \end{cases}.$$

Zadanie
Otrzymać dwie całki rzeczywiste z logarytmami obliczając całkę

$$\oint_\Gamma dz\, \frac{\ln z}{z^2+a^2}$$

po konturze Γ pokazanym na rysunku 10 w granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$.
Rozwiązanie: Jak zwykle całki po obu łukach znikają w podwójnej granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ i otrzymujemy równość

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{x^2+a^2} + \int_\infty^0 dr\, e^{i\frac{\pi}{4}}\, \frac{\ln r + i\pi/4}{ir^2+a^2} = 0\,,$$

(na skośnym fragmencie konturu $z = |r|e^{i\frac{\pi}{4}}$), jako że wewnątrz "topserka" całkowana funkcja $(z^2+a^2)^{-1}\ln z$ jest holomorficzna (ma ona bieguny w $z = \pm i|a|$, czyli poza konturem).

Mamy zatem (po odpowiednim obróceniu granic i wyciągnięciu i z mianownika)

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{x^2+a^2} + i\,e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty dr\,\frac{\ln r}{r^2-ia^2} - e^{i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{dr}{r^2-ia^2} = 0\,,$$

Pierwszą całkę już obliczyliśmy w poprzednich zadaniach (wynik: $(\pi/2|a|)\ln|a|$). Wykorzystując tożsamość $1/(x^2-ia^2)=(x^2+ia^2)/(x^4+a^4)$ możemy więc napisać

$$\begin{aligned}
&i\,e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty dx\,\frac{x^2\ln x}{x^4+a^4} - e^{i\frac{\pi}{4}}\,a^2\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{x^4+a^4}\\
&\qquad = e^{i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\pi}{4}\int_0^\infty dx\,\frac{x^2}{x^4+a^4} + i\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\pi}{4}\,a^2\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+a^4} - \frac{\pi}{2|a|}\ln|a|\,.
\end{aligned}$$

Całki po prawej stronie można obliczyć metodą residuów rozciągając je na całą oś rzeczywistą (i biorąc połowę tego, co wyjdzie) i domykając kontur półokręgiem np. w górnej półpłaszczyźnie, jak na rysunku 2. Wewnątrz takiego konturu mamy wtedy po dwa bieguny pierwszego rzędu w $z_1=(-1+i)|a|/\sqrt{2}$ oraz $z_2=(1+i)|a|/\sqrt{2}$. Wykorzystując rozkład

$$z^4+1=(z-z_1)(z-z_2)(z^2+i\sqrt{2}\,|a|z-a^2)\,,$$

łatwo znajdujemy ($z_1^2=-ia^2$, $z_2^2=ia^2$), że:

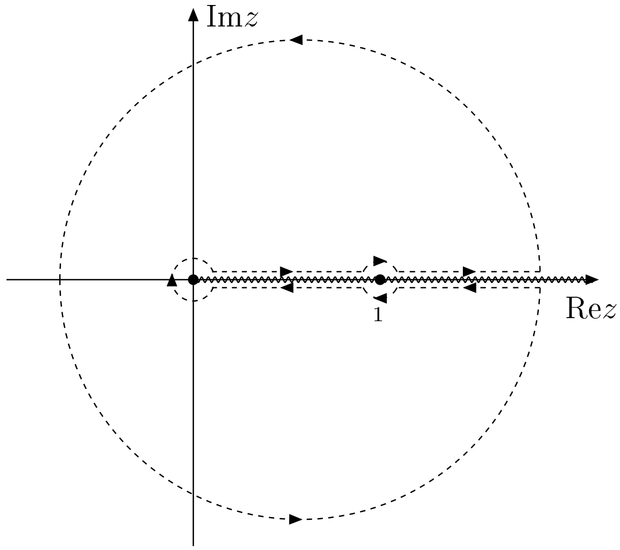
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1,2}\text{res}\,\frac{1}{z^4+a^4}\bigg|_{z=z_i} &= \frac{1}{2\sqrt{2}\,(1+i)|a|^3} + \frac{1}{-2\sqrt{2}\,(1-i)|a|^3} = \frac{-i}{2\sqrt{2}\,|a|^3}\,,\\
\sum_{i=1,2}\text{res}\,\frac{z^2}{z^4+a^4}\bigg|_{z=z_i} &= \frac{-ia^2}{2\sqrt{2}\,(1+i)|a|^3} + \frac{ia^2}{-2\sqrt{2}\,(1-i)|a|^3} = \frac{-i}{2\sqrt{2}\,|a|}\,.
\end{aligned}$$

Mamy więc (wykorzystaliśmy parzystość funkcji pod całkami po prawej stronie i pomnożyliśmy obie strony przez $e^{-i\frac{\pi}{4}}=(1-i)/\sqrt{2}$)

$$\begin{aligned}
&i\int_0^\infty dx\,\frac{x^2\ln x}{x^4+a^4} - a^2\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{x^4+a^4}\\
&\qquad = \frac{\pi}{8}\int_{-\infty}^\infty dx\,\frac{x^2}{x^4+a^4} + i\,\frac{\pi}{8}\,a^2\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+a^4} - \frac{\pi}{2|a|}\,\frac{1-i}{\sqrt{2}}\ln|a|\\
&\qquad = \frac{\pi}{8}\,\frac{2\pi}{2\sqrt{2}|a|} + i\,\frac{\pi}{8}\,\frac{2\pi}{2\sqrt{2}|a|} - \frac{\pi}{2|a|}\,\frac{1-i}{\sqrt{2}}\ln|a|\,.
\end{aligned}$$

Przyrównując części rzeczywiste i urojone obu stron otrzymujemy stąd dwa wyniki (sprawdzone programem *Mathematica*):

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dx\,\frac{x^2\ln x}{x^4+a^4} &= \frac{\pi^2+4\pi\ln|a|}{8\sqrt{2}\,|a|}\,,\\
\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{x^4+a^4} &= \frac{-\pi^2+4\pi\ln|a|}{8\sqrt{2}\,|a|^3}\,.
\end{aligned}$$



Rysunek 11: Będący modyfikacją “dziurki od klucza” kontur Γ' omijający biegun położony na rozcięciu (oznaczonym linią falistą). Promienie ε małych okręgów obiegających $z = 0$ i $z = 1$ dążą do zera; promień R dużego okręgu dąży do nieskończoności.

W zależności od wartości $|a|$, całki mogą być dodatnie bądź ujemne. Np. dla $|a| = 1$ druga całka jest ujemna, gdyż wskutek silnego tłumienia przez mianownik, gdy $x \gg 1$, dominujący przyczynek do niej wnosi obszar x-ów blisko zera, w którym to obszarze logarytm jest ujemny. W pierwszej zaś całce czynnik x^2 w liczniku powoduje, że przyczynek od tego obszaru wchodzi ze znacznie mniejszą wagą i całka jest dodatnia.

Zadanie
Metodą residuów obliczyć całkę

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\ln x}{(x-1)(x^2+1)} \, .$$

Rozwiązanie: Mimo pozornej osobliwości w $x = 1$ całka ta jest zbieżna bezwzględnie, gdyż w tym samym punkcie zeruje się także logarytm. Niemniej przy jej obliczaniu metodą residuów trzeba tę pozorną osobliwość wyizolować. W związku z tym zastąpimy kontur typu “dziurka od klucza” z rysunku 9 (ponieważ funkcja mnożąca logarytm nie jest parzysta, nie możemy skorzystć z konturu typu ODS) konturem Γ' pokazanym na rysunku 11 i scałkujemy po nim jak zwykle funkcję

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z-1)(z^2+1)} \, .$$

Jak zwykle w granicy $R \to \infty$ znika całka po dużym okręgu, a gdy $\varepsilon \to 0$, znika także całka po okręgu obiegającym punkt $z = 0$ (pokazuje się to tak samo jak w poprzednich przykładach). Pozostaje zatem zbadać całki po dwóch półokręgach obiegających punkt $z = 1$. Na górnym $z = 1 + \varepsilon\, e^{i\varphi}$ i

$$\int_{\frac{1}{2}K_{\varepsilon}^{-}(1)}^{\text{góra}} dz\, f(z) = \int_{\pi}^{0} d\varphi\, i\varepsilon\, e^{i\varphi}\, \frac{\ln^2(1+\varepsilon\, e^{i\varphi})}{\varepsilon\, e^{i\varphi}[1+(1+\varepsilon\, e^{i\varphi})^2]} \to 0\,,$$

gdy $\varepsilon \to 0$. Na dolnym zaś, zgodnie z definicją logarytmu na płaszczyźnie z rozcięciem, $z = e^{2\pi i}(1 + \varepsilon\, e^{i\varphi})$ i w tej samej granicy otrzymujemy[10]

$$\int_{\frac{1}{2}K_{\varepsilon}^{-}(1)}^{\text{dól}} dz\, f(z) = \int_{2\pi}^{\pi} d\varphi\, i\, \frac{[2\pi i + \ln(1+\varepsilon\, e^{i\varphi})]^2}{1+(1+\varepsilon\, e^{i\varphi})^2} \to -\pi i\, \frac{1}{2}\,(-4\pi^2)\,.$$

W granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ z twierdzenia o residuach otrzymujemy zatem (po przeniesieniu na drugą stronę przyczynku wnoszonego przez całkę po okręgu obiegającym punkt $z = 1$) równość

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} dx\, \frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)} + P\!\int_{\infty}^{0} dx\, \frac{(2\pi i + \ln x)^2}{(x-1)(x^2+1)}&\\ = 2\pi i\left(-\pi^2 + \operatorname{res} f(z)\big|_{z=e^{i\frac{\pi}{2}}} + \operatorname{res} f(z)\big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{2}}}\right).&\end{aligned}$$

Przed drugą całką dopisaliśmy tu znak P oznaczajacy całkę w sensie wartości głównej, gdyż część bez logarytmu tej całki nie jest bezwzględnie zbieżna.

Residua (oba bieguny są pierwszego rzędu) znajdujemy standardowo:

$$\begin{aligned}\operatorname{res} f(z)\big|_{z=e^{i\frac{\pi}{2}}} &= \frac{\ln^2\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{(i-1)2i} = \frac{\pi^2}{16}\,(1-i)\,,\\ \operatorname{res} f(z)\big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{2}}} &= \frac{\ln^2\left(e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)}{(-i-1)(-2i)} = \frac{9\pi^2}{16}\,(1+i)\,.\end{aligned}$$

Po rozpisaniu i obróceniu granic całki z $\ln^2 x$ ulegają redukcji i wynikająca z twierdzenia o residuach równość przyjmuje postać

$$-4\pi i\int_0^{\infty} dx\, \frac{\ln x}{(x-1)(x^2+1)} - 4\pi^2\, P\!\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = 2\pi i\left(-\pi^2 + \frac{\pi^2}{8}\,(5+4i)\right),$$

z której otrzymujemy dwie całki rzeczywiste. Pierwszą, której szukaliśmy:

$$\int_0^{\infty} dx\, \frac{\ln x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{16}\,\pi^2\,,$$

[10] Zauważmy, że wszystko to jest zgodne ze sformułowaną wcześniej regułką dotyczącą całek po fragmentach łuków (infinitezymalnie ciasno) obiegających biegun prosty: funkcja $f(z)$ "widziana od góry" nie ma w $z = 1$ bieguna (czyli jej residuum tam znika), widziana zaś "od dołu" ma biegun o residuum równym $-2\pi^2$.

(potwierdzaną przez program *Mathematica*) oraz drugą

$$P\int_0^\infty \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = -\frac{\pi}{4}\,,$$

którą możemy sprawdzić niezależnie: rozkładamy funkcję podcałkową na UAMki proste

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}\,,$$

i piszemy

$$P\int_0^\infty \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int_0^{1-\delta}\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int_{1+\delta}^{\Lambda}\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\Lambda} dx\,\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}\,.$$

Rozbicie funkcji podcałkowej na ułamki proste spowodowało, że niektóre z całek stały się rozbieżne dla $x \to \infty$; aby sobie z tym poradzić wprowadziliśmy ich regularyzację "w ultrafiolecie" w postaci obcięcia Λ (w kwantowej teorii pola takie rzeczy są na porządku dziennym). Ponieważ wyjściowa całka była zbieżna dla $x \to \infty$, oczekujemy, że wynik będzie skończony w granicy $\Lambda \to \infty$. Z kolei czynnik δ regularyzuje całki rozbieżne w $x = 1$ zgodnie z przepisem na obliczanie wartości głównej (w niedzielę na Głównym). Całki są elementarne i dają

$$P\int_0^\infty \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln\frac{-\delta}{-1} + \frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda-1}{\delta} - \frac{1}{4}\ln\frac{\Lambda^2+2}{1} - \frac{\pi}{4}\,.$$

Jak łatwo zobaczyć, zależność od δ wypada, a w granicy $\Lambda \to \infty$ redukują się wyrazy z $\ln\Lambda$ (pozostałości znikają conajmniej jak $1/\Lambda$) i otrzymujemy ten sam wynik, co metodą residuów.

Zadanie
Obliczyć metodą residuów całkę

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^2}{\mathrm{sh}^2 x}\,,$$

sprowadzając ją do całki z kwadratem logarytmu i całkując odpowiednią funkcję po odpowiednim konturze.
Rozwiązanie: Podstawiając $y = e^{2x}$ otrzymujemy

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^2}{\mathrm{sh}^2 x} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dx\,\frac{x^2}{\mathrm{sh}^2 x} = \frac{1}{4}\int_0^\infty dy\,\frac{\ln^2 y}{(y-1)^2}\,.$$

Całka ta jest dobrze określona, mimo pozornego podwójnego zera mianownika w $y = 1$: w tym samym punkcie podwójne zero ma bowiem też licznik. Ponieważ funkcja mnożąca logarytm nie jest parzysta, trzeba posłużyć się konturem typu "dziurka od klucza" i to "z gulką", takim jak na rysunku 11, gdyż konieczne jest wyizolowanie pozornej osobliwości leżącej na rozcięciu. Po konturze tym nauczeni doświadczeniem całkujemy funkcję

$$f(z) = \frac{\ln^3 z}{(z-1)^2}\,.$$

W standardowy sposób pokazujemy, że w granicy $R \to \infty$ znika całka po dużym okręgu o promieniu R, a w granicy $\varepsilon \to 0$ znika całka po małym okręgu (o promieniu ε) obiegającym punkt $z = 0$. Z małym okręgiem izolującym punkt $z = 1$ trzeba jednak postępować ostrożnie. Nietrudno sprawdzić, że w granicy $\varepsilon \to 0$ znika także całka po górnej części tego okręgu. Na tej części $z = 1 + \varepsilon\, e^{i\varphi}$ i

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(1)}^{\text{góra}} dz\, f(z) &= \int_\pi^0 d\varphi\, i\varepsilon\, e^{i\varphi}\, \frac{\ln^3\left(1+\varepsilon\, e^{i\varphi}\right)}{\left(\varepsilon\, e^{i\varphi}\right)^2} \\ &= i\int_\pi^0 d\varphi\, e^{-i\varphi}\, \frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon\, e^{i\varphi} - \frac{1}{2}\left(\varepsilon\, e^{i\varphi}\right)^2 + \dots\right)^3 \to 0\,.\end{aligned}$$

Ponieważ poza rozcięciem funkcja $f(z)$ jest holomorficzna, zgodnie z regułą przedłużania logarytmu na dolny brzeg rozcięcia piszemy:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx\, \frac{\ln^3 x}{(x-1)^2} &+ \int_\infty^{1+\varepsilon} dx\, \frac{(2\pi i)^3 + 3(2\pi i)^2 \ln x + 3(2\pi i)\ln^2 x + \ln^3 x}{(x-1)^2} \\ &+ \int_{1-\varepsilon}^0 dx\, \frac{(2\pi i)^3 + 3(2\pi i)^2 \ln x + 3(2\pi i)\ln^2 x + \ln^3 x}{(x-1)^2} + \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(1)}^{\text{dól}} dz\, f(z) = 0\,.\end{aligned}$$

Po odwróceniu granic całkowania można we wszystkich całkach z trzecią i drugą potęgą logarytmu położyć $\varepsilon = 0$; całki z $\ln^3 x$ ulegają wtedy redukcji i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(1)}^{\text{dól}} dz\, f(z) - (2\pi i)^3 \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)^2} - (2\pi i)^3 \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{dx}{(1-x)^2} \\ -3(2\pi i)^2 P\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{(x-1)^2} - 3(2\pi i)\int_0^\infty dx\, \frac{\ln^2 x}{(x-1)^2} = 0\,.\end{aligned}$$

Zamiast dwu całek z pierwszą potęgą logarytmu, jednej od 0 do $1-\varepsilon$ i drugiej od $1+\varepsilon$ do ∞, napisaliśmy tu jedną całkę opatrzoną symbolem wartości głównej; całka ta nie jest bezwzględnie zbieżna ale procedura omijania położonego na rozcięciu bieguna w $z = 1$ przez rozbicie jej na wspomniane dwie całki powoduje, że należy rozumieć ją w tym właśnie sensie.

Dolną część półokręgu otaczającego $z = 1$, zgodnie z procedurą przedłużania logarytmu, parametryzujemy następująco:

$$z = e^{2\pi i}\left(1 + \varepsilon\, e^{i\varphi}\right)\,.$$

Całka po tym fragmencie konturu daje wtedy

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(1)}^{\text{dól}} dz\, f(z) &= i\int_{2\pi}^{\pi} d\varphi\, \varepsilon^{-1} e^{-i\varphi}\left[2\pi i + \ln\left(1+\varepsilon\, e^{i\varphi}\right)\right]^3 \\
&= i\int_{2\pi}^{\pi} d\varphi\, \varepsilon^{-1} e^{-i\varphi}\left[2\pi i + \varepsilon\, e^{i\varphi} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon\, e^{i\varphi}\right)^2 + \dots\right]^3 \\
&= \frac{i}{\varepsilon}(2\pi i)^3 \int_{2\pi}^{\pi} d\varphi\, e^{-i\varphi} + 3i(2\pi i)^2 \int_{2\pi}^{\pi} d\varphi + \mathcal{O}(\varepsilon)\,,
\end{aligned}
$$

gdzie $\mathcal{O}(\varepsilon)$ oznacza wyrazy znikające w granicy $\varepsilon \to 0$. Obliczając widniejące tu całki oraz pozostałe dwie elementarne całki w pierwszej linii poprzedniej równości, otrzymujemy związek:

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{\varepsilon}(2\pi i)^3 i\left(e^{-\pi i} - e^{-2\pi i}\right) - 3i(2\pi i)^2\pi + (2\pi i)^3\left(\left.\frac{1}{x-1}\right|_{1+\varepsilon}^{\infty} + \left.\frac{1}{x-1}\right|_{0}^{1-\varepsilon}\right) \\
&\qquad -3(2\pi i)^2 P\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{(x-1)^2} - 3(2\pi i)\int_0^\infty dx\, \frac{\ln^2 x}{(x-1)^2} = 0\,,
\end{aligned}
$$

którego pierwsza linia, po wzięciu granic, jest równa

$$
\frac{2}{\varepsilon}(2\pi i)^3 - 3i(2\pi i)^2\pi + (2\pi i)^3\left(1 - \frac{2}{\varepsilon}\right) = 4i\pi^3\,.
$$

Jak widać wszystkie wyrazy osobliwe, gdy $\varepsilon \to 0$, skróciły się! Ponieważ całka z pierwszą potęgą logarytmu daje człon czysto rzeczywisty, a reszta wyrazów jest czysto urojona, wnosimy stąd, że

$$
P\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{(x-1)^2} = 0\,,
$$

oraz, że

$$
\int_0^\infty dx\, \frac{\ln^2 x}{(x-1)^2} = \frac{2}{3}\,\pi^2\,.
$$

Oba wyniki potwierdza program *Mathematica*.[11] Ostatecznie więc

$$
\int_0^\infty dx\, \frac{x^2}{\mathrm{sh}^2 x} = \frac{\pi^2}{6}\,,
$$

(co również potwierdza *Mathematica*).

[11] Oczywiście pierwszą całkę można też obliczyć przez części w granicach od δ do $1-\varepsilon$ i od $1+\varepsilon$ do ∞ i sprawdzić jej znikanie wykonując przejście graniczne $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$.

Zadanie
Obliczyć metodą residuów całkę

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\ln(1+x^2)}{1+a^2x^2}\,.$$

Rozwiązanie: Ponieważ funkcja mnożąca logarytm jest parzysta spróbujemy wykorzystać jakiś kontur biegnący po całej osi rzeczywistej. Jednakże funkcja $\ln(1+z^2)$ miałaby dwa punkty osobliwe (punkty rozgałęzienia) w $z=\pm i$, które wymagałyby rozcięcia płaszczyzny zespolonej zmiennej z. Można byłoby rozciąć ją dwiema liniami biegnącymi niezależnie od każdego z tych punktów do nieskończoności. To jednak uniemożliwiłoby domknięcie konturu biegnącego po osi rzeczywistej jakimkolwiek półokręgiem o promieniu R dążącym do nieskończoności. Z drugiej strony rozcięcie łączące punkt $z=i$ z punktem $z=-i$ uniemożliwiłoby poprowadzenie konturu po osi rzeczywistej. Trzeba więc uciec się do jakiegoś wybiegu. Spróbujemy zatem całkować po konturze z rysunku 2 funkcję

$$g(z)=\frac{\ln(z+i)}{1+a^2z^2}\,,$$

która ma tylko jeden punkt rozgałęzienia w $z=-i$, co umożliwia poprowadzenie rozcięcia od tego punktu do nieskończoności np. wzdłuż dolnej części osi urojonej (tj. poza konturem całkowania). Logarytm można wtedy zdefiniować tak, by dla $z=x>0$ był po prostu zwykłym logarytmem.

W sposób standardowy pokazujemy następnie, że całka po półokręgu znika w granicy $R\to\infty$. Z twierdzenia o residuach mamy więc równość

$$\int_{-\infty}^0 dx\, \frac{\ln\left(|x|\,e^{i\pi}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{1+a^2x^2}+\int_0^\infty dx\, \frac{\ln\left(x+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{1+a^2x^2}=2\pi i\,\mathrm{res}\,g(z)\big|_{z=i}\,.$$

Pierwszą całkę możemy przepisać jak następuje:

$$\int_{-\infty}^0 dx\, \frac{\ln\left(|x|\,e^{i\pi}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{1+a^2x^2}=\int_{-\infty}^0 dx\, \frac{i\pi+\ln\left(|x|+e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)}{1+a^2x^2}=\int_0^\infty dx\, \frac{i\pi+\ln\left(x-i\right)}{1+a^2x^2}\,.$$

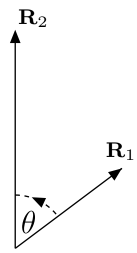
W drugim kroku dokonaliśmy zamiany zmiennych $x\to -x$ i obróciliśmy granice całkowania. Połączenie teraz obu całek da akurat pożądaną funkcję $\ln(1+x^2)$.

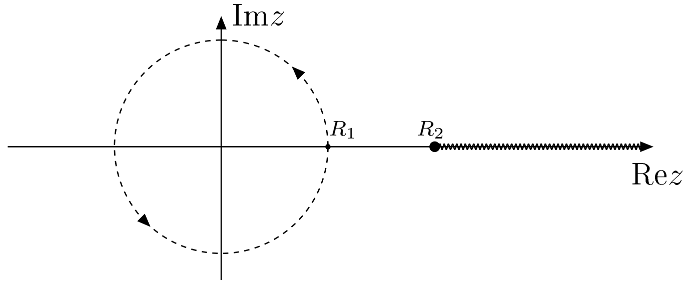
Residuum funkcji $g(z)$ znaleźć łatwo:

$$\mathrm{res}\,g(z)\big|_{z=i/|a|}=\left.\frac{\ln(z+i)}{a^2(z+i/|a|)}\right|_{z=i/|a|}=\frac{-i}{2|a|}\,\ln\left(\left(1+\frac{1}{|a|}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{-i}{2|a|}\,\ln\left(1+\frac{1}{|a|}\right)+\frac{\pi}{4|a|}\,.$$

Mamy więc związek

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\ln\left(1+a^2x^2\right)}{1+x^2}+i\pi\int_0^\infty \frac{dx}{1+a^2x^2}=2\pi i\left(\frac{-i}{2|a|}\,\ln\left(1+\frac{1}{|a|}\right)+\frac{\pi}{4|a|}\right),$$





Rysunek 12: Definicja kąta pomiędzy wektorami $\mathbf{R}_1$ i $\mathbf{R}_2$ oraz kontur całkowania funkcji $f(\theta) = \ln|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|$.

który daje dwie całki rzeczywiste (potwierdzane przez program *Mathematica*):

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{|a|} \ln\left(1 + \frac{1}{|a|}\right), \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{\pi}{2|a|} \,.$$

Zauważmy na koniec, że gdyby zamiast $g(z)$ całkować funkcję $h(z) = (1+a^2z^2)^{-1}\ln(1-iz)$, to dostalibyśmy tylko pierwszą całkę i obliczenia byłyby troszkę prostsze.

Zadanie
Obliczyć całkę

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \, \ln|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \;,$$

w której θ jest kątem pomiędzy wektorami $\mathbf{R}_1$ i $\mathbf{R}_2$ (rysunek 12).
Rozwiązanie: Całkowaną funkcję trzeba zapisać w taki sposób, by po przejściu do zmiennej zespolonej stała się ona funkcją holomorficzną (w pewnym obszarze płaszczyźny zespolonej zmiennej z). Jak łatwo sprawdzić, logarytmowany czynnik można zapisać w postaci

$$|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \equiv \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\theta} = \left|R_1\, e^{i\theta} - R_2\right|^2 .$$

Pozwala to zapisać całkę następująco:

$$I = 2\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} d\theta \ln\left(R_1\, e^{i\theta} - R_2\right) .$$

Naturalnym krokiem jest wprowadzenie następnie zmiennej $z = R_1\, e^{i\theta}$ i całkowanie po zamkniętym konturze będącym okręgiem o promieniu R_1 obiegającym punkt $z = 0$. Trzeba jednak zdefiniować logarytm pod całką (tj. rozcięcie płaszczyzny zespolonej zmiennej z) tak, by był on jednoznaczną funkcją z w całym dysku $|z| \leq R_1$ (i na jego brzegu). Jest to możliwe, jeśli $R_2 > R_1$: rozcięcie można wtedy poprowadzić tak, jak na rysunku 12. Mamy wtedy całkę

$$I = 2\mathrm{Re}\oint_{|z|=R_1} \frac{dz}{iz}\,\ln(z-R_2).$$

Funkcja ta ma biegun prosty w $z=0$. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem o residuach,

$$I = 2\mathrm{Re}\left(2\pi i \,\mathrm{res}\,\frac{\ln(z-R_2)}{iz}\bigg|_{z=0}\right).$$

Biorąc pod uwagę przyjęta tu definicję logarytmu

$$\mathrm{res}\,\frac{\ln(z-R_2)}{iz}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{i}\lim_{z\to 0}\ln(z-R_2) = \frac{1}{i}\,\ln\left(R_2\,e^{i\pi}\right) = \frac{1}{i}\left(\ln R_2 + i\pi\right).$$

Jeśli $R_2 < R_1$, to wektory zamieniają się rolami. W rezultacie

$$\int_0^{2\pi} d\theta\,\ln|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = \begin{cases} 4\pi\ln R_2 & \text{gdy} \quad R_2 > R_1 \\ 4\pi\ln R_1 & \text{gdy} \quad R_2 < R_1 \end{cases}.$$

Przypomnienie

Funkcje postaci

$$f(z) = (z-a)^{\alpha}\,, \qquad g(z) = (b-z)^{\beta}$$

o wykładnikach $\alpha, \beta \notin \mathbb{Z}$ nie mogą być określone na całej płaszczyźnie zespolonej zmiennej z. Punkty $z=a$ i $z=b$ są *punktami rozgałęzienia* tych funkcji. Po pierwsze, jakkolwiek same liczby zespolone $z-a$ i $b-z$ można przedstawić w postaciach

$$z-a = r_a\,e^{i(\varphi_a + 2\pi n_a)}\,, \qquad b-z = r_b\,e^{i(\varphi_b + 2\pi n_b)}\,,$$

z dowolnymi $n_a \in \mathbb{Z}$ i $n_b \in \mathbb{Z}$ (są to te same liczby zespolone dla dowolnych n_a i n_b), to wartości $f(z)$ i $g(z)$ zależą od przyjętych wartości n_a i n_b. Po drugie, nawet jeśli przyjąć jakąś konkretną umowę dotyczącą wyboru wartości n_a i n_b, to i tak po obejściu przez argument z funkcji $f(z)$ i $g(z)$ dookoła punktu odpowiednio $z=a$ i $z=b$ (czyli po powróceniu argumentu funkcji $f(z)$ do wyjściowej wartości), fazy φ_a i φ_b zmienią się o 2π i wartości funkcji $f(z)$ i $g(z)$ będą się różniły od pierwotnych odpowiednio o czynniki $e^{i2\pi\alpha}$ i $e^{i2\pi\beta}$. Tak więc funkcje $f(z)$ i $g(z)$ (podobnie jak funkcja $\ln(z)$) nie mogą być holomorficzne (czyli m. in. ciągłe) na całej płaszczyźnie zespolonej zmiennej z.

Jeśli α (β) jest liczbą wymierną postaci k/m, to po m-krotnym obejściu przez z punktu $z=a$ ($z=b$) funkcja $f(z)$ ($g(z)$) wraca do swojej wyjściowej wartości; funkcję taką można zdefiniować jako jednoznaczną na m-krotnie nawijającej się wokół punktu $z=a$ ($z=b$) powierzchni Riemanna o m płatach. Jeśli α (β) nie jest liczbą wymierną, to odpowiednia powierzchnia Riemanna ma nieskończenie wiele płatów nawijających się wokół punktu

$z = a$ ($z = b$). Zawsze, niezależnie od tego, czy liczba α (β) jest wymierna, czy nie, można funkcję $f(z)$ ($g(z)$) zdefiniować jako jednoznaczną (po przyjęciu jakiejś umowy co do n_a lub n_b) na płaszczyźnie zespolonej zmiennej z mającej rozcięcie biegnące (w dowolny sposób ciągły) od $z = a$ ($z = b$) do $z = \infty$.

Gdy a jest liczbą rzeczywistą zwykle przyjmuje się rozcięcie biegnące od $z = a$ po osi rzeczywistej w prawo do $z = \infty$, a fazę liczby zespolonej z określa się w ten sposób, by fazy liczb postaci $z = x + i0$, gdzie $x > a$ były równe zeru.

Zadanie
Obliczyć metodą residuów całkę

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)} \, .$$

Rozwiązanie: Całka jest oczywiście zbieżna (według standardowych kryteriów). Ponieważ w punkcie $z = 0$ zarówno logarytm jak i funkcja go mnożąca (pierwiastek) mają punkt rozgałęzienia, możemy jednoznacznie określić funkcję podcałkową na płaszczyźnie zespolonej zmiennej z mającej rozcięcie biegnące od $z = 0$ wzdłuż osi rzeczywistej do nieskończoności. Możemy wtedy spróbować wykorzystać kontur typu "dziurka od klucza" z rysunku 9 i całkować po nim funkcję[12]

$$f(z) = \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z+1)} \, .$$

W granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ całki po obu okręgach znikają. Wewnątrz konturu funkcja ma tylko jeden biegun prosty w $z = -1$. Z twierdzenia o residuach otrzymujemy zatem równość

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)} + \int_\infty^0 dx \, \frac{\ln\left(x\, e^{2i\pi}\right)}{\left(x\, e^{2i\pi}\right)^{1/2}(x+1)} = 2\pi i \, e^{-i\frac{\pi}{2}} \ln\left(e^{i\pi}\right) ,$$

czyli, po uporządkowaniu,

$$2\int_0^\infty dx \, \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)} + 2\pi i \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = 2i\,\pi^2 \, .$$

Ponieważ prawa strona jest czysto urojona, szukana całka wynosi zero. Niezerowa jest za to całka (oba wnioski potwierdza program *Mathematica*)[13]

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \pi \, .$$

[12] Zauważmy, że teraz dodatkowa faza czynnika $\sqrt{z}$ spowoduje, że całka z logarytmem po dolnej krawędzi rozcięcia nie skróci się z analogiczną całką po górnej krawędzi; dzięki temu nie musimy, tak jak w przypadku funkcji wymiernych mnożących logarytm, brać wyższej potęgi logarytmu.

[13] Znikanie szukanej całki można też prosto wykazać dokonując w niej podstawienia $x = 1/t$ (w zmiennej t wyjdzie ta sama całka, tylko z minusem). Otrzymaną zaś całkę można oczywiście obliczyć bezpośrednio, podstawiając $t = \sqrt{x}$.

Zadanie
Obliczyć metodą residuów całkę

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,.$$

Rozwiązanie: Tak jak w poprzednim przykładzie możemy wykorzystać kontur typu "dziurka od klucza" z rysunku 9. W granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ całki po obu okręgach znikają. Wewnątrz konturu funkcja ma tylko jeden biegun prosty w $z = -1$. Podobnie jak wyżej otrzymujemy zatem równość

$$2\int_0^\infty dx\, \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}\,(x+1)} - 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} + 4\pi i \int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)} = 2\pi \ln^2\left(e^{i\pi}\right).$$

Ponieważ teraz prawa strona jest czysto rzeczywista, ponownie dowiadujemy się, że trzecia całka po lewej stronie (ta mnożona przez $4\pi i$) znika. Przenosząc zaś drugą całkę na prawą stronę i wykorzystując poprzednie zadanie otrzymujemy (znów zgadza się to z odpowiedzią programu *Mathematica*):

$$2\int_0^\infty dx\, \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}\,(x+1)} = -2\pi^3 + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = -2\pi^3 + 4\pi^3 = 2\,\pi^3\,.$$

Zadanie
Obliczyć metodą residuów całkę

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x^2+a^2)^2}\,.$$

Rozwiązanie: Jak zwykle z całkami tego typu całkujemy po konturze "dziurka od klucza" z rysunku 9 funkcję

$$f(z) = \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z^2+a^2)^2}\,.$$

Całka po dużym okręgu znika w granicy $R \to \infty$, a w granicy $\varepsilon \to 0$ znika (bo $\varepsilon\varepsilon^{1/2}\ln\varepsilon \to 0$) całka po małym okręgu obiegającym punkt $z = 0$. W tej podwójnej granicy z twierdzenia o residuach mamy zatem równość:

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x^2+a^2)^2} + \int_\infty^0 dx\, \frac{\ln\left(x\, e^{2\pi i}\right)}{e^{i\pi}\sqrt{x}\,(x^2+a^2)^2} = 2\pi i \sum_i \operatorname{res} f(z)\big|_{z=z_i}\,,$$

a po uporządkowaniu

$$2\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x^2+a^2)^2} + 2\pi i \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^2+a^2)^2} = 2\pi i \sum_i \operatorname{res} f(z)\big|_{z=z_i}\,.$$

Funkcja $f(z)$ ma wewnątrz konturu z rysunku 9 dwa bieguny drugiego rzędu w $z = \pm i|a|$. Aby znaleźć ich residua różniczkujemy:

$$\frac{d}{dz}\,f(z) = -\frac{1}{2}\,\frac{\ln z}{z^{3/2}(z \pm i|a|)^2} + \frac{1}{z^{3/2}(z \pm i|a|)^2} - \frac{2\ln z}{z^{1/2}(z \pm i|a|)^3}\,.$$

i liczymy

$$\begin{aligned}
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=i|a|} &= \left(|a|e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-1/2} \left\{-\frac{\ln\left(|a|e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{2|a|i\,(2i|a|)^2} + \frac{1}{i|a|\,(2i|a|)^2} - \frac{2\ln\left(|a|e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{(2i|a|)^3}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|a|}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{\ln|a|}{8i\,|a|^3} + \frac{\pi}{16|a|^3} - \frac{1}{4i|a|^3} + \frac{\ln|a|}{4i|a|^3} + \frac{\pi}{8|a|^3}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|a|}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{3\ln|a|}{8i\,|a|^3} + \frac{3\pi}{16|a|^3} - \frac{1}{4i|a|^3}\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=-i|a|} &= \left(|a|e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)^{-1/2} \left\{-\frac{\ln\left(|a|e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)}{-2|a|i\,(-2i|a|)^2} + \frac{1}{-i|a|\,(-2i|a|)^2} - \frac{2\ln\left(|a|e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)}{(-2i|a|)^3}\right\} \\
&= \frac{-i}{\sqrt{|a|}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \left\{-\frac{\ln|a|}{8i\,|a|^3} - \frac{3\pi}{16|a|^3} + \frac{1}{4i|a|^3} - \frac{\ln|a|}{4i|a|^3} - \frac{3\pi}{8|a|^3}\right\} \\
&= \frac{-i}{\sqrt{|a|}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \left\{-\frac{3\ln|a|}{8i\,|a|^3} - \frac{9\pi}{16|a|^3} + \frac{1}{4i|a|^3}\right\}.
\end{aligned}$$

Zbierając te wyniki mamy

$$\sum_i \operatorname{res} f(z)\big|_{z=z_i} = \frac{1-i}{\sqrt{2|a|}} \left\{\frac{3\ln|a|}{8i\,|a|^3} + \frac{3\pi}{16|a|^3} - \frac{1}{4i|a|^3} - i\left[-\frac{3\ln|a|}{8i\,|a|^3} - \frac{9\pi}{16|a|^3} + \frac{1}{4i|a|^3}\right]\right\}.$$

Całka z logarytmem jest więc równa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x^2+a^2)^2} &= \frac{\pi}{\sqrt{2|a|}} \left\{\frac{3\ln|a|}{8\,|a|^3} - \frac{1}{4|a|^3} - \frac{9\pi}{16|a|^3} + \frac{3\pi}{16|a|^3} + \frac{3\ln|a|}{8\,|a|^3} - \frac{1}{4|a|^3}\right\} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,|a|^{7/2}} \left\{-1 - \frac{3}{4}\,\pi + \frac{3}{2}\,\ln|a|\right\}.
\end{aligned}$$

Dodatkowo otrzymujemy też drugą całkę

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^2+a^2)^2} &= \frac{1}{\sqrt{2|a|}} \left\{\frac{3\pi}{16\,|a|^3} + \frac{3\ln|a|}{8\,|a|^3} - \frac{1}{4|a|^3} - \frac{3\ln|a|}{8\,|a|^3} + \frac{1}{4|a|^3} + \frac{9\pi}{16\,|a|^3}\right\} \\
&= \frac{3\pi}{4\sqrt{2}\,|a|^{7/2}}\,.
\end{aligned}$$

Oba wyniki można sprawdzić programem *Mathematica*.

Zadanie
Podać warunki zbieżności całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^{\beta-1}}{ax+b}\,,$$

i obliczyć ją metodą residuów wykorzystując kontur “dziurka od klucza” (rysunek 9). Rozparzyć zarówno przypadek $ab > 0$ jak i $ab < 0$.
Rozwiązanie: W przypadku, gdy $ab > 0$, tj. gdy funkcja podcałkowa nie ma osobliwości w przedziale $[0, \infty)$, całka zachowuje się dla $x \to 0$ oraz $x \to \infty$ odpowiednio jak

$$\sim \int_0 dx\, x^{\beta-1}\,, \qquad \text{oraz} \qquad \sim \int^\infty dx\, x^{\beta-2}\,.$$

Całka jest zatem zbieżna, jeśli, co dalej zakładamy, $0 < \beta < 1$. Ponieważ funkcja $z^{\beta-1}$ ma w $z = 0$ punkt rozgałęzienia, funkcję podcałkową definiujemy na płaszczyźnie zespolonej zmiennej z mającej rozcięcie biegnące wzdłuż osi rzeczywistej od $z = 0$ do ∞ tak, by $(|x| + i0)^{\beta-1} = |x|^{\beta-1}$. Aby uprościć sobie sprawę dokonujemy przeskalowania zmiennej całkowania ($y = ax/b$):

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^{\beta-1}}{ax+b} = \frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{\beta-1}\int_0^\infty dy\, \frac{y^{\beta-1}}{1+y}\,.$$

i całkujemy po konturze z rysunku 9 obiegającym rozcięcie funkcję $f(z) = z^{\beta-1}/(z+1)$.
Szacujemy następnie w standardowy sposób całki po okręgach

$$\left|\int_{K_\varepsilon^-} dz\, f(z)\right| \le \int_0^{2\pi} d\varphi\, \varepsilon\, \frac{\varepsilon^{\beta-1}}{1-\varepsilon} \to 0\,,$$

bo $\beta > 0$;

$$\left|\int_{K_R} dz\, f(z)\right| \le \int_0^{2\pi} d\varphi\, R\, \frac{R^{\beta-1}}{R-1} = 2\pi\, \frac{R^\beta}{R-1} \to 0\,,$$

jako, że $\beta < 1$. W podwójnej granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ mamy zatem równość:

$$\int_0^\infty dy\, \frac{y^{\beta-1}}{1+y} + \int_\infty^0 dy\, \frac{y^{\beta-1}\, e^{2\pi i(\beta-1)}}{1+y} = 2\pi i\, \mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=-1}\,.$$

Zgodnie z rozcięciem płaszczyzny i przyjętą definicją fazy, $z = -1 \equiv e^{i\pi}$. Residuum w $z = 1$ jest więc równe $e^{i\pi(\beta-1)}$ i po obróceniu granic drugiej całki otrzymujemy

$$\left(1 - e^{2\pi i(\beta-1)}\right)\int_0^\infty dy\, \frac{y^{\beta-1}}{1+y} = 2\pi i\, e^{i\pi(\beta-1)}\,.$$

Zatem

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^{\beta-1}}{1+x} = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i(\beta-1)}}\, e^{i\pi(\beta-1)} = \frac{\pi}{\sin[\pi(1-\beta)]} = \frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}\,,$$

czyli

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^{\beta-1}}{ax+b} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\beta-1}\frac{\pi}{a\sin(\pi\beta)}\,,\qquad \text{gdy}\quad ab>0\,.$$

Gdy $ab<0$, całka nie istnieje w sensie ścisłym, ale można jej nadać sens przez przejście graniczne:

$$P\int_0^\infty dx\,\frac{y^{\beta-1}}{y-1} \equiv \left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^\infty\right) dx\,\frac{y^{\beta-1}}{y-1}$$

(po odpowiednim przeskalowaniu zmiennej całkowania). Jest to całka w sensie wartości głównej (oczywiście warunek zbieżności całki na krańcach przedziału $[0,\infty)$, tj. $0<\beta<1$, pozostaje w mocy). Aby ją obliczyć, całkujemy funkcję $g(z)=z^{\beta-1}/(z-1)$ po konturze z rysunku 11 omijającym punkt osobliwy położony na rozcięciu. Jako, że teraz w obszarze otoczonym konturem Γ' funkcja $g(z)$ jest holomorficzna,

$$\oint_{\Gamma'} dz\,g(z) = 0\,.$$

W rozbiciu całki po lewej stronie trzeba teraz jednak uwzględnić całki po półokręgach (o promieniach ε) obiegających punkt $z=1$ (całka po okręgu obiegającym punkt $z=0$ oraz całka po dużym okręgu znikają tak jak poprzednio). Na górnym półokręgu $z=1+\varepsilon\,e^{i\varphi}$ i

$$\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(a)}^{\text{góra}} dz\,g(z) = \int_\pi^0 d\varphi\,i\varepsilon\,e^{i\varphi}\,\frac{\left(1+\varepsilon\,e^{i\varphi}\right)^{\beta-1}}{\varepsilon\,e^{i\varphi}} \to -i\pi\,.$$

Na dolnym zaś $z=e^{2\pi i}\,(1+\varepsilon\,e^{i\varphi})$ i

$$\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(a)}^{\text{dól}} dz\,g(z) = \int_{2\pi}^\pi d\varphi\,i\varepsilon\,e^{i\varphi}\,\frac{e^{2\pi(\beta-1)i}\left(1+\varepsilon\,e^{i\varphi}\right)^{\beta-1}}{\varepsilon\,e^{i\varphi}} \to -i\pi\,e^{2\pi(\beta-1)i}\,.$$

Z twierdzenia o residuach otrzymujemy zatem związek

$$\left(1-e^{2\pi i(\beta-1)}\right) P\int_0^\infty dy\,\frac{y^{\beta-1}}{1+y} = -i\pi\left(1+e^{2\pi i(\beta-1)}\right),$$

tj. (wyniki dla obu znaków iloczynu ab potwierdza program *Mathematica*)

$$P\int_0^\infty dx\,\frac{x^{\beta-1}}{ax+b} = -\frac{\pi}{a}\left|\frac{b}{a}\right|^{\beta-1}\text{ctg}(\pi\beta)\,,\qquad \text{gdy}\quad ab<0\,.$$

Zadanie
Podać warunki zbieżności całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^{\beta-1}\ln x}{ax+b}\,,$$

gdy $ab > 0$ i obliczyć ją metodą residuów wykorzystując kontur "dziurka od klucza" (rysunek 9).

Rozwiązanie: Warunki zbieżności całki są takie same jak w poprzednim zadaniu, tj. $0 < \beta < 1$, gdyż logarytm zachowuje się jak zerowa potęga x.

Całkujemy po konturze "dziurka od klucza" z rysunku 9 funkcję

$$f(z) = \frac{z^{\beta-1} \ln z}{az + b} .$$

Jak zwykle całka po małym okręgu obiegającym $z = 0$ i całka po dużym okręgu znikają w granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$. Przedłużając standardowo $f(z)$ na dolny brzeg rozcięcia otrzymujemy w tej granicy związek

$$\oint_{\Gamma'} dz\, f(z) = \int_0^\infty dx\, \frac{x^{\beta-1} \ln x}{ax + b} + \int_\infty^0 dx\, \frac{e^{2\pi(\beta-1)i} x^{\beta-1} (2\pi i + \ln x)}{ax + b} = 2\pi i \operatorname{res} f(z)\big|_{z=-b/a} .$$

Residuum funkcji $f(z)$ w jedynym punkcie osobliwym znajdującym się wewnątrz konturu Γ' jest równe

$$\operatorname{res} f(z)\big|_{z=-b/a} = \frac{1}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^{\beta-1} e^{i\pi(\beta-1)} \left(i\pi + \ln \frac{b}{a}\right) .$$

Po uporządkowaniu granic całek i przeniesieniu całki bez logarytmu na drugą stronę dostajemy zatem związek

$$\left(1 - e^{2\pi(\beta-1)i}\right) \int_0^\infty dx\, \frac{x^{\beta-1} \ln x}{b + ax} = \frac{2\pi i}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^{\beta-1} e^{i\pi(\beta-1)} \left(i\pi + \ln \frac{b}{a}\right)$$
$$+ 2\pi i\, e^{2\pi(\beta-1)i} \int_0^\infty dx\, \frac{x^{\beta-1}}{b + ax} .$$

Całka wystepująca w drugiej linii została obliczona w poprzednim zadaniu. Mamy więc

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^{\beta-1} \ln x}{b + ax} = \frac{\pi}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^{\beta-1} \frac{i\pi + \ln(b/a)}{\sin(\pi\beta)} + \frac{2\pi i\, e^{2\pi(\beta-1)i}}{1 - e^{2\pi(\beta-1)i}} \frac{\pi}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^{\beta-1} \frac{1}{\sin(\pi\beta)} ,$$

i po uporządkowaniu

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^{\beta-1} \ln x}{b + ax} = \frac{\pi}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^{\beta-1} \frac{\ln(b/a)}{\sin(\pi\beta)} - \frac{\pi^2}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^{\beta-1} \frac{\cos(\pi\beta)}{\sin^2(\pi\beta)} .$$

Zauważmy na koniec, że skoro i tak trzeba było wykorzystać wynik całki obliczonej w poprzednim zadaniu, to można to było zrobić też inaczej, zauważając po prostu, że

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^{\beta-1} \ln x}{b + ax} = \frac{d}{d\beta} \int_0^\infty dx\, \frac{x^{\beta-1}}{b + ax} = \frac{d}{d\beta} \left(\frac{b}{a}\right)^{\beta-1} \frac{\pi}{a \sin(\pi\beta)} ,$$

co prowadzi natychmiast do powyższego wyniku.

Zadanie
Podać warunki zbieżności całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^a}{1+x^3}\,,$$

i obliczyć ją metodą residuów wykorzystując kontur "dziurka od klucza" (rysunek 9).
Rozwiązanie: Dla $x \to 0$ oraz $x \to \infty$ całka zachowuje się odpowiednio jak

$$\sim \int_0 dx\,x^a\,, \qquad \text{oraz} \qquad \sim \int^\infty dx\,x^{a-3}\,.$$

Całka jest zatem zbieżna, jeśli, co też i dalej zakładamy, $-1 < a < 2$.

Korzystając z konturu Γ "dziurka od klucza" przyjmujemy omówioną wyżej definicję funkcji z^a na płaszczyźnie z rozcięciem biegnącym od $z = 0$ wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej do $z = \infty$, przy czym fazę wybieramy tak, by $(x + i0)^a = x^a$, gdy $x > 0$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma dz\,f(z) \equiv \int_{K_\varepsilon^-} dz\,f(z) + \int_\varepsilon^R dx\,\frac{x^a}{1+x^3} \\ + \int_{K_R} dz\,f(z) + \int_R^\varepsilon dx\,\frac{(x\,e^{2\pi i})^a}{1+x^3} = \sum_{i=0,+,-} \operatorname{res} f(z)\big|_{z=z_i}\,,\end{aligned}$$

gdzie z_0, z_+ i z_- są trzema pierwiastkami równanania $z^3 + 1 = 0$:

$$z_0 = -1 = e^{i\pi}\,, \qquad z_+ = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = e^{i\frac{\pi}{3}}\,, \qquad z_+ = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) = e^{i\frac{5\pi}{3}}\,.$$

Druga postać każdego z tych pierwiastków jest zgodna z przyjętą definicją funkcji $f(z)$ na płaszczyźnie z rozcięciem (i to ona musi być użyta wszędzie, gdzie z_i jest podnoszony do niecałkowitej potęgi.

Szacujemy następnie w standardowy sposób całki po okręgach

$$\left|\int_{K_\varepsilon^-} dz\,f(z)\right| \le \int_0^{2\pi} d\varphi\,\varepsilon\,\frac{\varepsilon^a}{1-\varepsilon^3} \to 0\,,$$

bo $a > -1$;

$$\left|\int_{K_R} dz\,f(z)\right| \le \int_0^{2\pi} d\varphi\,R\,\frac{R^a}{R^3-1} = 2\pi\,\frac{R^{a+1}}{R^3-1} \to 0\,,$$

jako, że $a < 2$. W podwójnej granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ mamy zatem równość:

$$\left(1 - e^{2\pi i a}\right) \int_0^\infty dx\,\frac{x^a}{1+x^3} = \sum_{i=0,+,-} \operatorname{res} f(z)\big|_{z=z_i}\,.$$

Residua znajdujemy wykorzystując rozkład $z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)$, oraz to, że $z_+ - z_- = i\sqrt{3}$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=-1} &= \frac{1}{3}\, e^{i\pi a}\,, \\
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=z_+} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{3}a}}{i\sqrt{3}\,(z_+ + 1)} = -\frac{1}{3}\,\frac{e^{i\frac{\pi}{3}a}}{z_-} = -\frac{1}{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}a}\, e^{i\frac{\pi}{3}}\,, \\
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=z_-} &= \frac{e^{i\frac{5\pi}{3}a}}{-i\sqrt{3}\,(z_- + 1)} = -\frac{1}{3}\,\frac{e^{i\frac{5\pi}{3}a}}{z_+} = -\frac{1}{3}\, e^{i\frac{5\pi}{3}a}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}\,.
\end{aligned}
$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty dx\, \frac{x^a}{1+x^3} &= \frac{2\pi i}{3(1-e^{2\pi i a})}\left(e^{i\pi a} - e^{i\frac{\pi}{3}a}\, e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{5\pi}{3}a}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{3(e^{-i\pi a} - e^{i\pi a})}\left(1 - e^{-i\frac{2\pi}{3}a}\, e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}a}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right),
\end{aligned}
$$

czyli, po zapisaniu wyniku przez funkcje trygonometryczne,

$$
\int_0^\infty dx\, \frac{x^a}{1+x^3} = \frac{\pi}{3\sin(\pi a)}\left\{2\cos\left[\frac{\pi}{3}(2a-1)\right] - 1\right\}.
$$

Aby z tej postaci znaleźć wartość całki dla $a=0$, trzeba obliczać granicę $a \to 0$ (wynik: $2\pi/3\sqrt{3}$). Trochę sztuczek trygonometrycznych pozwala wynik przepisać w postaci (takiej, w jakiej daje go program *Mathematica*)

$$
\int_0^\infty dx\, \frac{x^a}{1+x^3} = \frac{\pi}{3\sin\left[\frac{1}{3}\pi(1+a)\right]}\,,
$$

która od razu daje skończony wynik dla $-1 < a < 2$.

Zadanie
Podać warunki zbieżności całki niewłaściwej

$$
\int_0^\infty dx\, \frac{x^a}{(1+x^2)^2}\,,
$$

i obliczyć ją metodą residuów wykorzystując kontur "dziurka od klucza" (rysunek 9).
Rozwiązanie: Całka jest zbieżna, jeśli $-1 < a < 3$. Całkując po konturze dziurka od klucza mamy

$$
\begin{aligned}
\oint dz\, f(z) = \int_0^\infty dx\, \frac{x^a}{(1+x^2)^2} &+ e^{2\pi a i}\int_\infty^0 dx\, \frac{x^a}{(1+x^2)^2} \\
&+ \int_{K_\varepsilon} dz\, f(z) = 2\pi i\left(\operatorname{res} f(z)\big|_{z=i} + \operatorname{res} f(z)\big|_{z=-i}\right),
\end{aligned}
$$

przy czym i oraz $-i$ należy, zgodnie z definicją funkcji z^a na płaszczyźnie z rozcięciem zapisać odpowiednio w postaci $e^{i\frac{\pi}{2}}$ oraz $e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Znajdujemy residua (bieguny są drugiego rzędu). Pochodna:

$$\frac{d}{dz}\,\frac{z^a}{(z\pm i)^2} = \frac{a\,z^a}{z\,(z\pm i)^2} - \frac{2z^a}{(z\pm i)^3}\,.$$

i residua:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=i} &= \left(\frac{a}{i(2i)^2} - \frac{2}{(2i)^3}\right) e^{i\frac{\pi}{2}a} = \frac{i}{4}\,(a-1)\,e^{i\frac{\pi}{2}a}\,,\\
\operatorname{res} f(z)\big|_{z=-i} &= \left(\frac{a}{-i(-2i)^2} - \frac{2}{(-2i)^3}\right) e^{i\frac{3\pi}{2}a} = \frac{-i}{4}\,(a-1)\,e^{i\frac{3\pi}{2}a}\,,
\end{aligned}$$

Pokazujemy następnie standardowo, że w granicy $R\to\infty$ całka po dużym okręgu zachowuje się jak $R^{a+1}/R^4 = R^{a-3}$, a w granicy $\varepsilon\to 0$ całka po małym - jak ε^{a+1}; obie całki znikają zatem dla takich a, dla których wyjściowa całka jest zbieżna.

W podwójnej granicy $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, po uporządkowaniu granic drugiej całki, otrzymujemy zatem związek

$$\left(1-e^{2\pi a i}\right)\int_0^\infty dx\,\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}\,(a-1)\left(e^{i\frac{3\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{2}}\right),$$

który daje:

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^a}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}\,(a-1)\,\frac{e^{i\pi a}\left(e^{i\frac{\pi}{2}a} - e^{-i\frac{\pi}{2}a}\right)}{-e^{i\pi a}\left(e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}\right)} = \frac{\pi}{2}\,(a-1)\,\frac{\sin(\pi a/2)}{-\sin(\pi a)} = \frac{\pi(1-a)}{4\cos(\pi a/2)}\,.$$

I etot riezultat, kak prawiło, potwierdżdajet programma *Mathematica*.

Zadanie
Podać warunki zbieżności całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty dz\,\frac{x^p}{x^2-2x\cos\lambda+1}\,,$$

i obliczyć ją metodą residuów wykorzystując kontur "dziurka od klucza" (rysunek 9).
Rozwiązanie: Całka jest zbieżna dla $-1<p<1$. Całkujemy po "dziurce od klucza" funkcję

$$f(z) = \frac{z^p}{z^2-2z\cos\lambda+1} = \frac{z^p}{\left(z-e^{i\lambda}\right)\left(z-e^{i(2\pi-\lambda)}\right)}\,.$$

Ponieważ zgodnie z definicją funkcji z^p na płaszczyźnie z rozcięciem, takim jak na rysunku 9, argument każdej liczby zespolonej musi należeć do przedziału $(0,2\pi)$, przeto drugi pierwiastek równania kwadratowego $z^2-2z\cos\lambda+1=0$ musi zostać zapisany w postaci $e^{i(2\pi-\lambda)}$.

W granicy $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ znikają jak zwykle całki po okręgach. Wewnątrz konturu funkcja ma dwa bieguny proste; suma residuów funkcji w tych punktach wynosi

$$\begin{aligned}\sum \operatorname{res} f(z) &= \frac{e^{i\lambda p}}{e^{i\lambda} - e^{i(2\pi-\lambda)}} + \frac{e^{i(2\pi-\lambda)p}}{e^{i(2\pi-\lambda)} - e^{i\lambda}} \\ &= \frac{1}{e^{i\lambda} - e^{i(2\pi-\lambda)}} \left(e^{ip\lambda} - e^{i(2\pi-\lambda)}\right).\end{aligned}$$

Z twierdzenia o residuach, w granicy $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ otrzymujemy zatem związek

$$\left(1 - e^{2\pi pi}\right) \int_0^\infty dx \, \frac{x^p}{x^2 - 2x\cos\lambda + 1} = \frac{2\pi i}{e^{i\lambda} - e^{i(2\pi-\lambda)}} \left(e^{ip\lambda} - e^{i(2\pi-\lambda)p}\right),$$

czyli

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^p}{x^2 - 2x\cos\lambda + 1} = \frac{2\pi i}{e^{i\lambda} - e^{i(2\pi-\lambda)}} \, \frac{e^{ip\pi}\left(e^{ip(\lambda-\pi)} - e^{-ip(\lambda-\pi)}\right)}{e^{ip\pi}\left(e^{-ip\pi} - e^{ip\pi}\right)} = \frac{\pi}{\sin\lambda} \, \frac{\sin[p(\pi-\lambda)]}{\sin(p\pi)},$$

co można zapisać w postaci

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^p}{x^2 - 2x\cos\lambda + 1} = \frac{\pi}{\sin\lambda} \left[\cos(p\lambda) - \operatorname{ctg}(p\pi)\sin(p\lambda)\right].$$

Przypomnienie

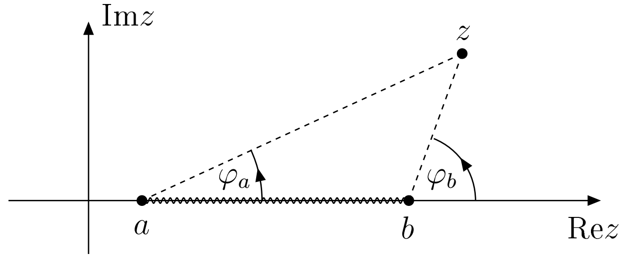
Funkcja[14]

$$h(z) = \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^\alpha,$$

ma dla $\alpha \notin \mathbb{Z}$ dwa punkty rozgałęzienia w $z = a$ oraz $z = b$. Teraz jednak można $h(z)$ (niezależnie od tego, czy wykładnik α jest liczbą wymierną, czy nie) zdefiniować jako funkcję jednoznaczną na płaszczyźnie zespolonej zmiennej z mającej *jedno rozcięcie łączące punkty* $z = a$ *i* $z = b$. (Oczywiście można by też zrobić dwa cięcia jedno od $z = a$ do $z = \infty$ i drugie od $z = b$ do $z = \infty$; było by to jednak niewykorzystanie wszystkich możliwości i nie byłoby użyteczne w przykładzie rozpatrywanym poniżej). Istotnie, jeśli $h(z)$ zdefiniujemy wzorem

$$h(z) = \left|\frac{z-a}{b-z}\right|^\alpha e^{i\alpha(\varphi_a - \varphi_b)} \, e^{i\pi\beta},$$

w którym fazy φ_a i φ_b są zdefiniowane na rysunku 13 (faza β jest na razie dowolna; ustalimy ją za chwilę), to po obiegnięciu przez zmienną z naokoło całego rozcięcia zarówno faza φ_a, jak i faza φ_b zmienią się o 2π, ale ich różnica nie ulegnie zmianie i wartość funkcji $h(z)$ zdefinowana powyższym wzorem będzie taka, jak przed obiegiem. (Nie było by tak,



Rysunek 13: Sposób zdefiniowania funkcji $h(z) = [(z-a)/(b-z)]^\alpha$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z mającej cięcie od $z = a$ do $z = b$.

gdyby zmienna z obiegła np. punkt $z = a$ przechodząc przez rozcięcie: faza φ_a zmieniłaby się wtedy o 2π, ale faza φ_b - nie).

Fazę β można wybrać dowolnie. Ponieważ dobrze by było, by wartości funkcji $h(z)$ pokrywały się z wartościami rzeczywistej funkcji $H : (a, b) \to \mathbb{R}_+$

$$H(x) = \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^\alpha ,$$

dla rzeczywistych zmiennych z należących do przedziału (a, b), przeto definiujemy:[15]

$$h(z) = \left|\frac{z-a}{b-z}\right|^\alpha e^{i\alpha(\varphi_a - \varphi_b)}\, e^{i\pi\alpha} .$$

Jak łatwo sprawdzić, dla $z = x + i0$ (jak już było powiedziane, zapis ten należy rozumieć jako $z = x + i\delta$, gdzie $\delta \to 0^+$) takich, że $a < x < b$, wartości tak zdefiniowanej funkcji $h(z)$ są rzeczywiste i dodatnie. Istotnie: mamy wtedy $\varphi_a = 0$ oraz $\varphi_b = \pi$ i całkowita faza jest równa zeru.

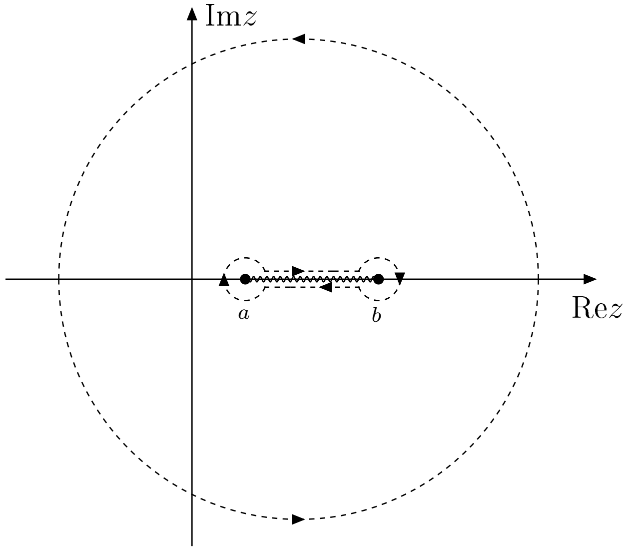
Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)[x^2(1-x)]^{1/3}} .$$

Rozwiązanie: Całka jest zbieżna: wprawdzie punkty graniczne są punktami osobliwymi funkcji podcałkowej, niemniej osobliwości te są całkowalne (zgodnie ze zwykłymi kryteriami skończoności całek niewłaściwych). W celu obliczenia powyższej całki całkujemy

[14] W zasadzie wszystko, co mówimy poniżej pozostaje słuszne dla $a, b \in \mathbb{C}$. Ponieważ jednak interesować nas będą całki z funkcji rzeczywistych, więc ograniczymy się do przypadku rzeczywistych a i b. Przyjmiemy także dalej, że $a < b$.

[15] W istocie zdefiniowana na rysunku 13 faza φ_b jest fazą liczby $z - b$, a nie $b - z$; faza tej drugiej różni się od φ_b o $\pm\pi$ i to jest powodem, dla którego przy narzuconym na funkcję $h(z)$ warunku, konieczne jest uwzględnienie w jej definicji dodatkowego czynnika $e^{i\pi\alpha}$.



Rysunek 14: Kontur całkowania Γ zwany "kością na talerzu".

po konturze Γ typu "kość na talerzu" (o $a = 0$ i $b = 1$) pokazanym na rysunku 14 funkcję

$$f(z) = \frac{1}{z\,(z+1)}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{1/3},$$

przy czym niebędący funkcją jednoznaczną na całej płaszczyźnie drugi czynnik definiujemy w sposób omówiony powyżej na płaszczyźnie z rozcięciem biegnącym po osi rzeczywistej od $z = 0$ do $z = 1$. Dla $z = x + i0$, gdzie $0 < x < 1$ (tj. na górnym poziomy fragmencie "kości") mamy wtedy zgodnie z przyjętym przepisem

$$f(x+i0) \equiv \lim_{\delta\to 0^+} f(x+i\delta) = \frac{1}{x\,(x+1)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3},$$

a dla $z = x - i0$, gdzie $0 < x < 1$ (tj. na dolnym poziomy fragmencie "kości")

$$f(x-i0) \equiv \lim_{\delta\to 0^+} f(x-i\delta) = \frac{1}{x\,(x+1)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3} e^{\frac{2}{3}\pi i},$$

jako że aby się tam dostać od $z = x + i0$ musimy okrążyć np. punkt $z = 0$ od lewej strony, a wtedy faza φ_a (patrz rys. 13) wzrasta od 0 do 2π (faza φ_b pozostaje przy tym równa π). Moglibyśmy też zamiast tego okrążyć punkt $z = 1$ od prawej strony: wtedy faza φ_a nie zmieniłaby się, za to faza φ_b zmalałaby o 2π i wynik byłby taki sam.

Możemy zatem napisać

$$\oint_\Gamma dz\, f(z) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} dx\, f(x) + e^{\frac{2}{3}\pi i}\int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\, f(x)$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{K_\varepsilon^-(0)} dz\, f(z) + \int_{K_\varepsilon^-(1)} dz\, f(z) + \int_{K_R} dz\, f(z) \\
&= 2\pi i \ \mathrm{res} f(z)\big|_{z=-1} \,.
\end{aligned}
$$

Uwzględniliśmy tu to, że w obszarze zawartym wewnątrz konturu, tj. pomiędzy "kością" właściwą[16] a brzegiem "talerza" (dużym okręgiem), funkcja $f(z)$ ma tylko jeden biegun w $z=-1$. Interesuje nas oczywiście granica $\varepsilon \to 0$ ($K_\varepsilon^-(0)$ oraz $K_\varepsilon^-(1)$ oznaczają okręgi o promieniu ε i środkach odpowiednio w $z=0$ oraz $z=1$; minus u góry oznacza, że są one obiegane zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara), w której całki po prostych fragmentach kości stają się całką, którą chcemy obliczyć.

Oszacujmy zatem całkę po epsilonowym okręgu wokół $z=0$. Na tym okręgu $z=\varepsilon\, e^{i\varphi}$. Mamy

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{K_\varepsilon^-(0)} dz\, f(z)\right| &\le \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi\, \varepsilon}{|(1+\varepsilon\, e^{i\varphi})[\varepsilon^2\, e^{2i\varphi}(1-\varepsilon\, e^{i\varphi})]^{1/3}|} \\
&\le \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi\, \varepsilon}{(1-\varepsilon)[\varepsilon^2(1-\varepsilon)]^{1/3}} = 2\pi\, \frac{\varepsilon^{1/3}}{(1-\varepsilon)^{4/3}} \,.
\end{aligned}
$$

Podobnie szacuje się całkę po $K_\varepsilon^-(1)$. Zatem w granicy $\varepsilon \to 0$ całki te znikają.

Pozostaje zatem rozpatrzyć całkę po brzegu "talerza", tj. okręgu o promieniu R. Tu sprawa jest prosta bo na okręgu o promieniu R, na którym $z = R\, e^{i\varphi}$ całka ta zachowuje się jak

$$
\left|\int_{K_R} dz\, f(z)\right| \sim \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi\, R}{R^2} \sim \frac{1}{R} \,,
$$

i znika w granicy $R \to \infty$. W następnych przykładach podobne całki nie będą już znikać i do ich efektywnego obliczania przydatny będzie koncept *residuum w nieskończoności*.

W granicy $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ i po odwróceniu granic drugiej z całek otrzymujemy więc związek:

$$
\left(1 - e^{\frac{2}{3}\pi i}\right) \int_0^1 dx\, f(x) = 2\pi i \ \mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=-1} \,.
$$

W $z=-1$ funkcja $f(z)$ ma biegun prosty i residuum jest dane przez

$$
\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=-1} = \lim_{z\to -1} \frac{1}{z} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{1/3} = \frac{1}{-1} \left|\frac{-1}{2}\right|^{1/3} e^{\frac{i}{3}(\pi-\pi)} e^{\frac{i}{3}\pi} = -\frac{e^{\frac{i}{3}\pi}}{2^{1/3}}
$$

(w punkcie $z=-1$ leżącym na rysunku 13 na osi rzeczywistej na lewo od punktu $a=0$ obie fazy φ_a oraz φ_b są równe π).

[16] Jak w dowcipie: "Z czego się składa pies ogólnowojskowy? Z żołnierza prowadzącego, smyczy przewodzącej i psa właściwego".

Stąd ostatecznie (wynik sprawdzony programem *Mathematica*)

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)[x^2(1-x)]^{1/3}} = -\frac{2\pi i}{2^{1/3}}\,\frac{e^{\frac{i}{3}\pi}}{1-e^{\frac{2}{3}\pi i}} = \frac{-2\pi i}{2^{1/3}(e^{-\frac{i}{3}\pi}-e^{\frac{i}{3}\pi})}$$

$$= \frac{\pi}{2^{1/3}\sin(\pi/3)} = \frac{2^{2/3}\,\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Zadanie

Wykorzystując kontur "kość (na talerzu)" obliczyć całkę

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(ax+b)\left[(1-x)(1-x^2)\right]^{1/3}}\,.$$

Rozpatrzyć przypadki $|b/a| > 1$ oraz $|b/a| < 1$.

Rozwiązanie: Jeśli $|b/a| > 1$, całka jest zbieżna zgodnie ze zwykłymi kryteriami zbieżności całek niewłaściwych. Aby ją obliczyć całkujemy funkcję

$$f(z) = \frac{1}{(az+b)(1-z)}\left(\frac{z+1}{1-z}\right)^{-1/3} \equiv \frac{1}{(az+b)(1-z)}\left|\frac{z+1}{1-z}\right|^{-1/3} e^{-\frac{i}{3}(\varphi_a-\varphi_b+\pi)}\,,$$

po konturze "kość na talerzu" pokazanym na rysunku 14. Wewnątrz konturu (tj. pomiędzy kością właściwą, a brzegiem talerza) funkcja $f(z)$ ma jeden biegun prosty w punkcie $z = -b/a$. Jej residuum w tym punkcie jest równe

$$\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=-b/a} = \frac{1}{a+b}\left|\frac{a-b}{a+b}\right|^{-1/3} e^{-i\frac{\pi}{3}}\,,$$

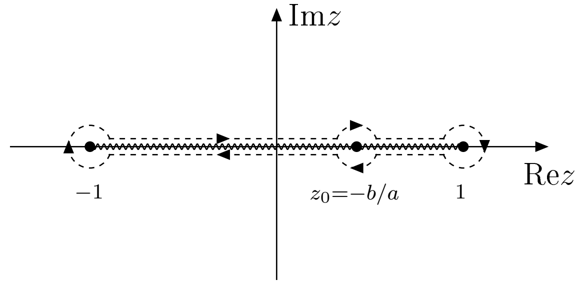
gdyż albo $\varphi_a = \varphi_b = 0$ (gdy $-b/a > 0$), albo $\varphi_a = \varphi_b = \pi$ (gdy $-b/a < 0$).

Nietrudno sprawdzić, tak jak w poprzednim zadaniu, że w granicy $\varepsilon \to 0$ znikają obie całki po okręgach (o promieniach ε okrążające punkty $z = \mp 1$, a w granicy $R \to \infty$ znika całka po dużym okręgu (o promieniu R - "brzegu talerza"). W tej podwójnej granicy mamy zatem związek

$$\oint_\Gamma dz\, f(z) = \int_{-1}^{1} dx\, f(x) + \int_{1}^{-1} dx\, f(x-i0) = \frac{2\pi i}{a+b}\left|\frac{a-b}{a+b}\right|^{-1/3} e^{-i\frac{\pi}{3}}\,,$$

lub, po uwzględnieniu, że zgodnie z regułą przedłużania funkcji na dolny brzeg "kości" $f(x-i0) = e^{-i\frac{2\pi}{3}} f(x)$ (na dolnym brzegu $\varphi_a = 2\pi$, $\varphi_b = \pi$) i odwróceniu granic drugiej całki

$$\left(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)\int_{-1}^{1} dx\, f(x) = \frac{2\pi i}{a+b}\left|\frac{a-b}{a+b}\right|^{-1/3} e^{-i\frac{\pi}{3}}\,.$$



Rysunek 15: Kontur całkowania Γ omijający biegun położony na rozcięciu.

Zatem gdy $|b/a| > 1$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(ax+b)\left[(1-x)(1-x^2)\right]^{1/3}} = \frac{\pi}{(a+b)\sin(\pi/3)} \left|\frac{a+b}{a-b}\right|^{1/3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\,(a+b)} \left|\frac{a+b}{a-b}\right|^{1/3} .$$

Gdy $|b/a| < 1$ całka istnieje w sensie wartości głównej (punkt osobliwy leży w przedziale całkowania). Aby ją obliczyć w tym sensie, całkujemy funkcję $f(z)$ po konturze Γ' "kość z gulką na talerzu", tj. po konturze podobnym do tego z rysunku 14, ale z "kością właściwą" zastąpioną konturem z rysunku 15. Wewnątrz konturu, tj. w obszarze pomiędzy "kością z gulką", a "brzegiem talerza" funkcja jest holomorficzna. Zatem

$$\oint_{\Gamma'} dz\, f(z) = 0\,.$$

Całki po okręgach okrążające punkty $z = \mp 1$ oraz całka po "brzegu talerza" znikają, tak jak poprzednio, w granicy $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$. Trzeba teraz jednak uwzględnić także całki po "gulce" tj. po małych półokręgach (o promieniu ε) okrążające punkt $z_0 = -b/a$. Na górnym półokręgu $z = -b/a + \varepsilon\, e^{i\varphi}$ i

$$\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(z_0)}^{\text{góra}} dz\, f(z) \to \int_{\pi}^{0} d\varphi\, \frac{i}{a+b} \left|\frac{a-b}{a+b}\right|^{-1/3} = \frac{-i\pi}{a+b} \left|\frac{a+b}{a-b}\right|^{1/3}$$

(jako że dla z na górnym brzegu kości $\varphi_a = 0$, $\varphi_b = \pi$). Na dolnym zaś

$$\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(z_0)}^{\text{dół}} dz\, f(z) \to \int_{2\pi}^{\pi} d\varphi\, \frac{i}{a+b} \left|\frac{a-b}{a+b}\right|^{-1/3} e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-i\pi}{a+b} \left|\frac{a+b}{a-b}\right|^{1/3} e^{-i\frac{2\pi}{3}} ,$$

gdyż tam $\varphi_a = 2\pi$, $\varphi_b = \pi$. Gdy $|b/a| < 1$ całka (teraz w sensie wartości głównej) daje zatem

$$P\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(ax+b)\left[(1-x)(1-x^2)\right]^{1/3}} = \frac{\pi\,\mathrm{ctg}(\pi/3)}{(a+b)} \left|\frac{a+b}{a-b}\right|^{1/3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}\,(a+b)} \left|\frac{a+b}{a-b}\right|^{1/3} .$$

Przypomnienie:
Niech funkcja $f(z)$ będzie holomorficzna w pierścieniu $r < |z| < \infty$. Obszar ten nazywamy otoczeniem pierścieniowym punktu $z = \infty$. W otoczeniu tym traktowanym jako otoczenie pierścieniowe punktu $z = 0$ funkcja może być przedstawiona w postaci szeregu Wawrzusia

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}\,,$$

stanowiącym jednocześnie (z definicji) rozwinięcie funkcji $f(z)$ w otoczeniu punktu $z = \infty$. Jeśli w powyższym szeregu znikają wszystkie współczynniki a_n o $n > 0$ (czyli znika cała pierwsza suma), to mówimy, że funkcja $f(z)$ jest regularna w $z = \infty$. Gdy niezerowa jest tylko skończona liczba wyrazów z dodatnimi potęgami z, to funkcja $f(z)$ ma w $z = \infty$ biegun skończonego rzędu: biegun jest rzędu k, gdy

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k\,.$$

Jeśli zaś część szeregu z dodatnimi potęgami z nie urywa się, to mówimy że $f(z)$ ma w $z = \infty$ osobliwość istotną.

Wygodne kryterium badania charakteru funkcji $f(z)$ w punkcie $z = \infty$ daje następująca obserwacja: jeśli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w otoczeniu pierścieniowym $r < |z| < \infty$, to funkcja

$$g(z) \equiv f(1/z)\,,$$

jest holomorficzna w otoczeniu pierścieniowym $0 < |z| < 1/r$ punktu $z = 0$. Zatem jeśli funkcja $g(z) \equiv f(1/z)$ jest w punkcie $z = 0$ regularna (tj. $g(z)$ nie jest w tym punkcie osobliwa), to w punkcie $z = \infty$ jest też regularna funkcja $f(z)$. Jeśli $g(z)$ ma w $z = 0$ biegun rzędu k, to funkcja $f(z)$ ma w $z = \infty$ również biegun rzędu k, jeśli zaś $g(z)$ ma w $z = 0$ punkt istotnie osobliwy, to funkcja $f(z)$ ma takowy w $z = \infty$.

Residuum funkcji $f(z)$ *w punkcie* $z = \infty$ nazywa się wzięty z minusem (!) współczynnik a_{-1} rozwinięcia $f(z)$ w szereg Wawrzusia wokół $z = \infty$. Zauważmy od razu, że funkcja $f(z)$ może być w $z = \infty$ regularna w sensie podanej wyżej definicji, a mimo to mieć w $z = \infty$ niezerowe residuum; w przypadku punktów $z \neq \infty$ regularnośc funkcji w takim punkcie pociągała za sobą znikanie residuum. Współczynnik a_{-1} rozwinięcia $f(z)$ w otoczeniu $z = \infty$ jest zarazem proporcjonalny do wartość całki z $f(z)$ po obiegającym jednokrotnie punkt $z = 0$ zamkniętym konturze leżącym całkowicie w otoczeniu pierścieniowym punktu $z = \infty$, tj. po konturze, na którym $|z| > r$ (w granicy kontur może być uważany za nieskończenie duży i obiegający jednokrotnie punkt $z = \infty$; branie tej granicy nie jest jednak konieczne):

$$\mathrm{res} f(z)\big|_{z=\infty} \equiv -a_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz\, f(z)\,.$$

Związek ten wynika jak zwykle z bezpośredniego scałkowania $f(z)$ po okręgu o dowolnym promieniu $R > r$ i środku w $z = 0$. Istotnie:

$$\int_{K_R(0)} dz\, f(z) = \int_0^{2\pi} d\varphi\, iR\, e^{i\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R^n\, e^{in\varphi} = 2\pi i\, a_{-1}\, .$$

Zauważmy od razu, że skoro tę samą całkę po można także obliczyć jako $2\pi i$ razy suma residuów funkcji $f(z)$ znajdujących się *wewnątrz* okręgu o b. dużym promieniu R (tak dużym, że obejmuje wszystkie punkty płaszczyzny zespolonej, w których $f(z)$ jest osobliwa), musi zachodzić związek

$$-\, \mathrm{res} f(z)\big|_{z=\infty} = \sum_i \mathrm{res} f(z)\big|_{z=z(i)}\, ,$$

w którym suma jest brana po wszystkich izolowanych *skończonych* punktach osobliwych funkcji $f(z)$ na płaszczyźnie zespolonej.

Głównym zastosowaniem pojęcia residuum $f(z)$ w $z = \infty$ jest właśnie obliczanie całek po zamkniętych konturach oddalonych odpowiednio daleko od $z = 0$. Powodem, dla którego residuum w nieskończoności jest zdefiniowane ze znakiem minus jest (jak zobaczymy) nieredukowalne (i w zasadzie chwalebne!) dążenie matematyków do elegancji.

Jeśli funkcja $f(z)$ ma w $z = \infty$ biegun rzędu k (co naogół najłatwiej ustalić badając funkcję $g(z) \equiv f(1/z)$ w punkcie $z = 0$), jej residuum jest dane łatwym do zrozumienia wzorem (uwzględnia on już ten “anomalny” minus w definicji residuum w $z = \infty$)

$$\mathrm{res} f(z)\big|_{z=\infty} = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z\to\infty} \left(z^{k+2}\, \frac{d^{k+1} f(z)}{dz^{k+1}} \right).$$

Zauważmy też, że jeśli np. $f(z) = 1/z$, to w powyższym wzorze $k = -1$ (pamiętamy, że $0! = 1$). Oczywiście jeśli funkcja $f(z)$ ma w $z = \infty$ osobliwość istotną, to powyższy wzór nie działa i jej residuum w tym punkcie należy szukać rozwijając ją w szereg W.

Przykłady

Jako pierwszy przykład sprawdźmy funkcję podobną do tej z poprzedniego zadania:

$$f(z) = \frac{1}{z\,(z+1)} \left(\frac{z}{1-z} \right)^{1/3} .$$

Bezpośrednio dla $|z| \to \infty$ możemy napisać:

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1+1/z)} \left(\frac{-1}{1-1/z} \right)^{1/3} .$$

Rozwijając czynniki $1 \pm 1/z$ w szeregi potęgowe widzimy od razu, że

$$f(z) = \frac{(-1)^{1/3}}{z^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3} \right),$$

czyli że $a_{-1} = 0$. Ten sam wniosek można uzyskać konstruując funkcję

$$g(z) \equiv f(1/z) = \frac{z^2}{1+z} \left(\frac{1}{z-1} \right)^{1/3} .$$

Punkt $z = 0$ jest jej punktem regularnym, a zatem $z = \infty$ jest punktem regularnym funkcji $f(z)$. Samo to jeszcze nie oznacza, że znika residuum $f(z)$ w $z = \infty$, ale widać też od razu, że rozwinięcie $g(z)$ wokół $z = 0$ zaczyna się od wyrazu z^2, co oznacza właśnie, że $\mathrm{res} f(z)|_{z=\infty} = 0$.

Drugim przykładem jest funkcja

$$f(z) = \frac{\cos(1/z)}{z^2+1} .$$

Ponieważ funkcja

$$g(z) \equiv f(1/z) = \frac{z^2 \cos z}{z^2+1} ,$$

może być rozwinięta w zwykły szereg Taylora wokół $z = 0$

$$g(z) = z^2(1 - z^2 + z^4 + \dots) \left(1 - \frac{1}{2} z^2 + \dots \right) ,$$

więc sama funkcja $f(z)$ jest regularna w punkcie $z = \infty$ i ma zerowe residuum w tym punkcie (bo współczynnik przy z rozwinięcia $g(z)$ wokół $z = 0$ jest równy zeru).

Zadanie

Obliczyć całkę

$$I = \oint_\Gamma dz \, \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} \sin^2\left(\frac{1}{z} \right) ,$$

po zamkniętym konturze Γ obejmującym punkty $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ oraz $z_2 = 2$.

Rozwiązanie: Całka oczywiście jest równa $2\pi i$ razy suma residuów funkcji podcałkowej

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} \sin^2\left(\frac{1}{z} \right) .$$

w jej punktach osobliwych obejmowanych przez kontur Γ. Są to: punkty $z = 1$ i $z = 2$, w których $f(z)$ ma bieguny proste oraz $z = z_0$ będący punktem istotnie osobliwym funkcji $f(z)$. Residua $f(z)$ w $z = 1$ i $z = 2$ znaleźć łatwo; trudniej zato jest wyznaczć residuum $f(z)$ w $z = 0$, bo nie działa w tym przypadku standardowy wzór z pochodnymi. Tymczasem całkę tę można znacznie prościej obliczyć wykorzystując residuum $f(z)$ w $z = \infty$. Rzeczywiście: z rozwinięcia $f(z)$ w otoczeniu pierścieniowym $z = \infty$

$$f(z) = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \dots \right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \dots \right)^2 ,$$

od razu widać, że $a_{-1} = 0$ (bo wyraz $1/z$ nie wystąpi) i, jako że na zewnątrz konturu Γ niema innych punktów osobliwych funkcji $f(z)$, całka I jest równa zeru.

Aby się przekonać, że rzeczywiście jest to dobry wynik, obliczmy jednak całkę standardowo. Suma residuów w $z = 1$ i $z = 2$ daje

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=1} + \operatorname{res} f(z)|_{z=2} = -\sin^2 1 + 4\sin^2 \frac{1}{2}\,.$$

Aby zaś wyznaczyć residuum w punkcie $z = 0$ zapisujemy $f(z)$ w postaci

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{z-2} - \frac{1}{z-1}\right)\left(1 - \cos\frac{2}{z}\right),$$

z której od razu widać, że residuum $f(z)$ w $z = 0$ jest sumą residuów w $z = 0$ funkcji

$$h(z) = \frac{2}{z-2}\left(1 - \cos\frac{2}{z}\right),$$

oraz funkcji

$$g(z) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-1}\left(1 - \cos\frac{2}{z}\right),$$

jako, że kosinus jest funkcja parzystą i jedynka z pierwszego nawiasu funkcji $f(z)$ nie da wyrazu $1/z$. Aby znaleźć residuum $h(z)$ piszemy jej rozwinięcie

$$h(z) = -\frac{1}{1 - z/2}\left(1 - \cos\frac{2}{z}\right) = \left\{1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots\right\}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2}{z}\right)^{2n}.$$

Widać z niego, że przy mnożeniu przez siebie tych dwu szeregów powstanie następujący wyraz proporcjonalny do $1/z$:

$$\frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!} = \frac{2(-1 + \cos 1)}{z} = \frac{-4\sin^2\frac{1}{2}}{z}\,,$$

który daje przyczynek do residuum $f(z)$ w $z = 0$ dokładnie redukujący residuum $f(z)$ w $z = 2$. Podobnie w rozwinięciu funkcji $g(z)$

$$g(z) = -\frac{1}{2}\left(1 + z + z^2 + \dots\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2}{z}\right)^{2n},$$

otrzymamy przy wymnażaniu szeregów wyraz

$$-\frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n}}{(2n)!} = \frac{1 - \cos 2}{2z} = \frac{\sin^2 1}{z}\,,$$

dający do residuum $f(z)$ w $z = 0$ przyczynek redukujący residuum $f(z)$ w $z = 1$. Tak więc rzeczywiście suma residuów funkcji $f(z)$ w jej punktach osobliwych zawartych wewnątrz konturu Γ wynosi zero i standardowy sposób obliczenia całki I daje ten sam wynik, co jej obliczenie z wykorzystaniem residuum $f(z)$ w nieskończoności.

Zadanie
Obliczyć całkę

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,.$$

Rozwiązanie: Zgodnie ze zwykłymi kryteriami zbieżności całek niewłaściwych całka ta jest zbieżna. Aby ją obliczyć całkujemy funkcję

$$f(z) = \frac{1}{z-a}\sqrt{\frac{z-a}{b-z}} \equiv \frac{1}{z-a}\left|\frac{z-a}{b-z}\right|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_a-\varphi_b+\pi)}\,,$$

po konturze "kość na talerzu" pokazanym na rysunku 14. Wewnątrz konturu (tj. pomiędzy kością właściwą, a brzegiem talerza) funkcja $f(z)$ jest holomorficzna.

W punkcie $z=\infty$ funkcja $f(z)$ jest regularna, bo funkcja

$$g(z) \equiv f(1/z) = \frac{z}{\sqrt{(1-az)(bz-1)}}\,,$$

ma w $z=0$ zero pierwszego rzędu, ale $f(z)$ ma w $z=\infty$ nieznikające residuum $-a_{-1}$ (w "mechanicznym" wzorze na residuum $k=-1$):

$$\begin{aligned} -a_{-1} \equiv \operatorname{res} f(z)\big|_{z=\infty} &= -\lim_{z\to\infty}(zf(z)) \\ &= -\lim_{z\to\infty}\frac{z}{z-a}\left|\frac{z-a}{b-z}\right|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_a-\varphi_b+\pi)} = -e^{i\frac{\pi}{2}} = -i\,, \end{aligned}$$

gdyż w granicy $z\to\infty$ (obojętne, w którym kierunku) obie fazy φ_a i φ_b zdefiniowane na rysunku 13 stają się równe.

Tak jak w poprzednich przykładach można łatwo pokazać, że całki po małych okręgach (o promieniach ε) obiegających punkty $z=a$ i $z=b$ znikają w granicy $\varepsilon\to 0$.

W granicy $\varepsilon\to 0$ mamy zatem z twierdzenia o residuach równość

$$\oint_\Gamma dz\, f(z) = \int_a^b dx\, f(x) + \int_b^a dx\, f(x-i0) + \int_{K_R} dz\, f(z) = 0\,,$$

lub, po uwzględnieniu, że zgodnie z regułą przedłużania funkcji na dolny brzeg "kości" $f(x-i0) = -f(x)$ oraz wykorzystując koncept residuum w nieskończoności

$$2\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\pi i\, a_{-1} = 2\pi\,.$$

Zadanie
Obliczyć całkę

$$\int_0^3 dx\,\frac{[x^3(3-x)]^{1/4}}{5-x}\,.$$

Rozwiązanie: Rozszerzoną na zbiór liczb zespolonych funkcję podcałkową zapisujemy w postaci

$$f(z) = \frac{3-z}{5-z}\left(\frac{z}{3-z}\right)^{3/4} \equiv \frac{z-3}{z-5}\left|\frac{z}{3-z}\right|^{3/4} e^{i\frac{3}{4}(\varphi_a-\varphi_b+\pi)}$$

i całkujemy po konturze "kość na talerzu" (rysunek 14). Dla $z = x + i0$ mamy wtedy zgodnie z przepisem $f(z = x + i0) = f(x)$, na dolnym zaś prostym odcinku kości

$$f(x - i0) = e^{\frac{3}{2}\pi i} f(x)\,,$$

gdyż tam $\varphi_a = 2\pi$, a $\varphi_b = \pi$. Mamy więc (całki po małych okręgach wokół punktów $a = 0$ i $b = 3$ znikają, tak jak w poprzednim przykładzie):

$$\oint_\Gamma dz\, f(z) = \int_0^3 dx\, f(x) + e^{\frac{3}{2}\pi i}\int_3^0 dx\, f(x) + \int_{K_R} dz\, f(z) = 2\pi i\ \mathrm{res}\, f(z)|_{z=5}\,.$$

Residuum w punkcie $z = 5$ łatwo znaleźć (funkcja ma tam biegun prosty):

$$\mathrm{res}\, f(z)|_{z=5} = \lim_{z\to 5}\left[(z-3)\left|\frac{z}{3-z}\right|^{3/4} e^{i\frac{3}{4}(0-0+\pi)}\right] = 2\left(\frac{5}{2}\right)^{3/4} e^{i\frac{3}{4}\pi}\,.$$

gdyż w tym punkcie $\varphi_a = \varphi_b = 0$.

Następnie musimy obliczyć całkę po dużym okręgu o promieniu $R > 5$ (nie musimy brać $R \to \infty$; wystarczy taki promień R, by funkcja $f(z)$ była holomorficzna w pierścieniu $R < |z| < \infty$). Całkę tę obliczamy wykorzystując residuum $f(z)$ w $z = \infty$. Zapisując $f(z)$ w postaci

$$f(z) = \frac{1-3/z}{1-5/z}\left(\frac{-1}{1-3/z}\right)^{3/4}\,,$$

widzimy, iż jej rozwinięcie w szereg Wawrzusia dla $R < |z| < \infty$ będzie miało postać

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0\,,$$

tj. w $z = \infty$ funkcja $f(z)$ ma biegun rzędu 0. Możemy więc skorzystać z podanego wyżej wzoru

$$\mathrm{res}\, f(z)|_{z=\infty} = \frac{(-1)^0}{1!}\lim_{z\to\infty} z^2\frac{df}{dz}\,.$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(\frac{z}{3-z}\right)^{3/4}\left[\frac{1}{z-5} - \frac{z-3}{(z-5)^2}\right] + \frac{3}{4}\left(\frac{z}{3-z}\right)^{-1/4}\left[\frac{1}{3-z} + \frac{z}{(3-z)^2}\right]\frac{z-3}{z-5} \\ &= \left(\frac{z}{3-z}\right)^{3/4}\left\{\frac{-2}{(z-5)^2} + \frac{3}{4}\,\frac{3}{z(3-z)}\,\frac{z-3}{z-5}\right\}. \end{aligned}$$

Znajdujemy więc, że

$$\operatorname{res} f(z)\big|_{z=\infty} = \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z) = e^{i\frac{3}{4}\pi}\left(-2-\frac{9}{4}\right) = -\frac{17}{4}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}\,.$$

Czynnik fazowy wynosi $e^{i\frac{3}{4}\pi}$, gdyż dla $z\to\infty$, obojętne, w którym kierunku, $\varphi_a-\varphi_b\to 0$ (obie linie łączące punkty $z=a$ i $z=b$ z punktem $z\to\infty$ stają się w granicy nawzajem do siebie równoległe).

Mamy więc

$$\begin{aligned}\left(1-e^{\frac{3}{2}\pi i}\right)\int_0^3 dx\, f(x) &= -\int_{K_R} dz\, f(z) + 2\pi i\ \operatorname{res} f(z)\big|_{z=5}\\ &= 2\pi i\left(\operatorname{res} f(z)\big|_{z=\infty} + \operatorname{res} f(z)\big|_{z=5}\right).\end{aligned}$$

A zatem (co potwierdza program *Mathematica*)

$$\begin{aligned}\int_0^3 dx\, f(x) &= \frac{2\pi i}{1-e^{\frac{3}{2}\pi i}}\left(2\left(\frac{5}{2}\right)^{3/4}-\frac{17}{4}\right)e^{i\frac{3}{4}\pi}\\ &= \frac{\pi}{\sin(3\pi/4)}\left(\frac{17}{4}-2\left(\frac{5}{2}\right)^{3/4}\right) = \sqrt{2}\,\pi\left(\frac{17}{4}-2\left(\frac{5}{2}\right)^{3/4}\right).\end{aligned}$$

Uwaga.
Przykłady ten i poprzedni wyjaśniają dlaczego residuum w $z=\infty$ jest zdefiniowane z minusem: chodzi o to, by po przeniesieniu całki po okręgu o promieniu R na drugą stronę równości wzór wyglądał jednolicie, tj. by obliczana całka była dana przez sumę wszystkich residuów (razy $2\pi i$) włączając w to residuum w $z=\infty$. Pozwala to zapomnieć o okręgu o promieniu R i przyjąć bardziej wyrafinowaną interpretację, według której kontur "kość właściwa" jest brzegiem obszaru zwartego znajdującego się (z punktu widzenia rysunku 14) na zewnątrz niego i będącego uzwarconą przez dołączenie punktu $z=\infty$ częścią powierzchni Riemanna[17] właściwej dla funkcji $f(z)$.

Zadanie
Metodą residuów obliczyć całkę

$$\int_{-a}^{a} dx\,\sqrt{a^2-x^2}\,.$$

Rozwiązanie: Całkujemy po konturze "kość" ("na talerzu", rysunek 14) funkcję

$$f(z) = -(z-a)\left|\frac{z+a}{a-z}\right|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_1-\varphi_2+\pi)}\,.$$

[17] Bardzo elementarne, ale interesujące i uzupełnione rysunkami omówienie powierzchni Riemanna można znaleźć w "cegle" R. Penrosa *Droga do rzeczywistości*, Prószyński i S-ka, Warszawa 2007.

Na górnym prostym fragmencie kości (gdzie $\varphi_1 = 0$, a $\varphi_2 = \pi$) redukuje się ona do $f(x)$, a na dolnym fragmencie kości (gdzie $\varphi_2 = 2\pi$, a $\varphi_2 = \pi$) $f(x - i0) = e^{i\pi}\, f(x)$. Całki po małych okręgach znikają jak zwykle, a poza tym funkcja $f(z)$ jest wewnątrz obszaru obejmowanego przez kontur holomorficzna. Mamy zatem, po "wyprostowaniu" granic całki po dolnym fragmencie kości, związek

$$\left(1 - e^{i\pi}\right) \int_{-a}^{a} dx\, f(x) = 2 \int_{-a}^{a} dx\, \sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi i \,\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=\infty} .$$

Z postaci funkcji jest jasne, że ma ona w $z = \infty$ biegun pierwszego rzędu (rośnie z z liniowo), więc

$$\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=\infty} = -\frac{1}{2} \lim_{z\to\infty} z^3 \frac{d^2}{dz^2} f(z) .$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} f(z) &= -\left(\frac{z+a}{a-z}\right)^{1/2} - (z-a)\left(\frac{z+a}{a-z}\right)^{-1/2} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a-z} + \frac{z+a}{(a-z)^2}\right] \\
&= -\left(\frac{z+a}{a-z}\right)^{1/2}\left[1 + (z-a)\,\frac{a-z}{z+a}\,\frac{a}{(a-z)^2}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dz^2} f(z) &= \frac{d}{dz}\left\{-\left(1 - \frac{a}{z+a}\right)\left(\frac{z+a}{a-z}\right)^{1/2}\right\} \\
&= -\left(\frac{z+a}{a-z}\right)^{1/2} \frac{a}{(z+a)^2} - \frac{z}{z+a}\left(\frac{z+a}{a-z}\right)^{-1/2} \frac{a}{(a-z)^2} \\
&= \left(\frac{z+a}{a-z}\right)^{1/2} \frac{a^2}{(z+a)^2(z-a)} .
\end{aligned}$$

(Zauważmy w tym miejscu, że wynik różniczkowań przedstawiamy zawsze w postaci z wydzielonym czynnikiem $[(z-a)/(b-z)]^{\alpha}$, co ułatwia kontrolowanie fazy.) Po pomnożeniu przez z^3 i wzięciu granicy $z \to \infty$ z uwzględnieniem tego, że wtedy $\varphi_1 \to \varphi_2$ (tj. że czynnik w dużym nawiasie dąży do $e^{i\frac{\pi}{2}}$) znajdujemy

$$\mathrm{res}\, f(z)\big|_{z=\infty} = \frac{(-1)^1}{2!}\, e^{i\frac{\pi}{2}}\, a^2 = -\frac{i}{2}\, a^2 .$$

Residuum to można w zasadzie znaleźć przez "inspekcję":

$$\begin{aligned}
f(z) = \sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{-z^2}\left[1 - \left(\frac{a}{z}\right)^2\right]^{1/2} &= -iz\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2} + \dots\right) \\
&= -i\left(z - \frac{a^2}{2z} + \dots\right).
\end{aligned}$$

Czynnik fazowy $-i = -e^{i\frac{\pi}{2}}$ pochodzi z czynnika $e^{i\pi\alpha}$ będącego dla $\varphi_1 \to \varphi_2$ fazą niewymiernego kawałka funkcji $f(z)$, oraz z minusa występującego w przy wiodącym wyrazie (dla $z \to \infty$) w funkcji wymiernej mnożącej czynnik niewymierny; w razie wątpliwości całkowity czynnik fazowy residuum musi być taki, by wynik całki był dodatni!). Stąd od razu widać rezultat uzyskany wyżej przez żmudne różniczkowanie (pamiętamy, że residuum jest równe $-a_{-1}$!).

Łącząc wyniki, znajdujemy, że

$$\int_{-a}^{a} dx\,\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\pi}{2}\,a^2\,.$$

Wynik ten łatwo uogólnić na całkę od a do b z funkcji $[(x-a)(b-x)]^{1/2}$. Stosując metodę "inspekcji" mamy

$$\begin{aligned}
\sqrt{(z-a)(b-z)} &= -iz\left[1 - \frac{(a+b) + \frac{ab}{z^2}}{z}\right]^{1/2} \\
&= -iz\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{z^2} - \frac{(a+b)}{z}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{ab}{z^2} - \frac{(a+b)}{z}\right)^2 + \dots\right] \\
&= -i\left(z - \frac{1}{2}(a+b) - \frac{(b-a)^2}{8z} + \dots\right),
\end{aligned}$$

skąd już widać, że $a_{-1} = (i/8)(b-a)^2$, czyli $\mathrm{res} f(z)|_{z=\infty} = -(i/8)(b-a)^2$ i

$$\int_{a}^{b} dx\,\sqrt{(x-a)(b-x)} = \frac{\pi}{8}\,(b-a)^2\,.$$

Zadanie
Metodą residuów obliczyć całkę

$$\int_{-a}^{a} dx\,\frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,.$$

Rozwiązanie: Znów, ponieważ po standardowych krokach mamy

$$2\int_{-a}^{a} dx\,\frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\pi i\,\mathrm{res}\,f(z)|_{z=\infty}\,,$$

zadanie sprowadza się do znalezienia residuum w $z = \infty$ funkcji

$$f(z) = \frac{z^4}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \frac{z^4}{z+a}\left(\frac{z+a}{a-z}\right)^{1/2},$$

z tym, że teraz jest to mniej przyjemne, bo punkt w nieskończoności jest biegunem trzeciego rzędu (trzeba by było liczyć czwartą pochodną). Możemy jednak posłużyć się metodą “inspekcji”

$$f(z) = \frac{z^4}{\sqrt{-z^2}}\left[1-\left(\frac{a}{z}\right)^2\right]^{-1/2} = i\,\frac{z^4}{z}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{a^2}{z^2}+\frac{3}{8}\,\frac{a^4}{z^4}\dots\right)$$
$$= i\left(z^3+\frac{a^2}{2}\,z+\frac{3}{8}\,\frac{a^4}{z}+\dots\right),$$

skąd od razu widać, że

$$\mathrm{res}\,f(z)|_{z=\infty} = -i\,\frac{3}{8}\,a^4\,,$$

a więc (co potwierdza program *Mathematica*)

$$\int_{-a}^{a}dx\,\frac{x^4}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{3}{8}\,\pi a^4\,.$$

Zadanie.
Metodą residuów obliczyć całkę

$$\int_0^1 dx\,\sqrt{x^3-x^4}\,.$$

Rozwiązanie: Całkujemy po konturze z rysunku 14 funkcję

$$f(z) = z^2\left(\frac{z}{1-z}\right)^{-1/2}\,.$$

Z jej postaci od razu widać, że poza rozcięciem jest ona holomorficzna aż do punktu w nieskończoności, w którym to punkcie ma ona biegun drugiego rzędu. Ponieważ wykładnik $\alpha = -\frac{1}{2}$, mamy

$$\left(1-e^{-i\pi}\right)\int_0^1 dx\,\sqrt{x^3-x^4} \equiv 2\int_0^1 dx\,\sqrt{x^3-x^4} = 2\pi i\;\mathrm{res}\,f(z)|_{z=\infty}\,.$$

Residuum w $z=\infty$ najprościej znaleźć przez “inspekcję” (obliczanie trzeciej pochodnej nie jest zachęcające...). Rozwijamy więc dla dużych z pierwiastek:

$$f(z) = \sqrt{-z^4}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{1/2} = -iz^2\left[1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{z}\right)^2+\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{z}\right)^3+\dots\right]$$

(pamiętamy, że czynnik fazowy w residuum pochodzi z czynnika $e^{i\alpha\pi}$, więc tu jest równy $-i$ bo $\alpha = -\frac{1}{2}$ oraz że residuum jest równe współczynnikowi przy $1/z$ wziętemu z minusem!). Stąd juz widać, że

$$\mathrm{res}\,f(z)|_{z=\infty} = \frac{-i}{16}\,,$$

a zatem

$$\int_0^1 dx\,\sqrt{x^3-x^4} = \frac{\pi}{16}\,.$$

Zadanie
Metodą residuów obliczyć całkę

$$\int_0^2 dx\,\left[x^2(2-x)^3\right]^{1/5}\,.$$

Rozwiązanie: Całkujemy po konturze z rysunku 14 funkcję

$$f(z) = (2-z)\left(\frac{z}{2-z}\right)^{2/5}\,,$$

mającą, poza rozcięciem, tylko biegun pierwszego rzędu w $z=\infty$. Zgodnie z regułą przedłużania funkcji na dolną część "kości", mamy

$$\left(1-e^{i\frac{4}{5}\pi}\right)\int_0^2 dx\,\left[x^2(2-x)^3\right]^{1/5} = 2\pi i\,\mathrm{res}\,f(z)|_{z=\infty}\,.$$

Znów residuum w $z=\infty$ najłatwiej znaleźć dokonując rozwinięcia $f(z)$ dla dużych z:

$$f(z) = \left(-z^5\right)^{1/5}\left(1-\frac{2}{z}\right)^{3/5} = -e^{i\frac{2}{5}\pi}\,z\left[1+\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{z}\right)-\frac{3}{25}\left(-\frac{2}{z}\right)^2+\dots\right],$$

z którego od razu widać, że

$$\mathrm{res}\,f(z)|_{z=\infty} = \frac{-12}{25}\,e^{i\frac{2}{5}\pi}\,.$$

Czynnik fazowy $e^{i\frac{2}{5}\pi}$ jest pojawiającym się zawsze w tego typu rachunku czynnikiem $e^{i\frac{2}{5}(\varphi_1-\varphi_2+\pi)}$, w którym $\varphi_1\to\varphi_2$ (gdy $z\to\infty$). Dodatkowy minus (kompensujący minus w definicji residuum pochodzi z tego, że w "kanonicznej" postaci funkcja ma czynnik $(2-z)$ dający minus przy $z\to\infty$). Oczywiście poprawność wyznaczenia ressiduum inspekcji można zawsze sprawdzić stosując uczciwie wzór z pochodnymi.

Tak więc

$$\int_0^2 dx\,\left[x^2(2-x)^3\right]^{1/5} = \frac{2\pi i}{1-e^{i\frac{4}{5}\pi}}\,e^{i\frac{2}{5}\pi}\left(\frac{-12}{25}\right) = \frac{12}{25}\,\frac{\pi}{\sin(2\pi/5)}\,.$$

Zadanie.
Podać warunek zbieżności całki

$$\int_0^1 dx\,x^\alpha(1-x)^{1-\alpha}$$

i obliczyć ją metodą residuów.
Rozwiązanie: Całka jest zbieżna dla $x \to 0$, gdy $\alpha > -1$ i zbieżna dla dla $x \to 1$, gdy $1-\alpha > -1$. Stąd warunkiem jej zbieżności jest $-1 < \alpha < 2$. Aby ją obliczyć całkujemy po konturze z rysunku 14 funkcję

$$f(z) = (1-z)\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}.$$

Funkcja ta ma tylko biegun pierwszego rzędu w $z = \infty$. Aby znaleźć jej residuum różniczkujemy dwakroć ($k = 1$ bo funkcja $g(z) \equiv f(1/z)$ ma w $z = 0$ biegun prosty):

$$\frac{d}{dz}f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}\left[-1+\frac{\alpha}{z}\right].$$

$$\frac{d^2}{dz^2}f(z) = \alpha\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}\left[-\frac{1}{z^2}+\frac{\alpha-z}{z^2\,(1-z)}\right] = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}\frac{\alpha\,(\alpha-1)}{z^2\,(1-z)}.$$

Podstawiając do wzoru na residuum i biorąc granicę $z \to \infty$ otrzymujemy

$$\mathrm{res}\, f(z)|_{z=\infty} = \frac{(-1)}{2}\lim_{z\to\infty}\frac{\alpha\,(\alpha-1)z^3}{z^2\,(1-z)}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} = \frac{1}{2}\,\alpha\,(\alpha-1)\,e^{i\alpha\pi}.$$

Ten sam wynik można też dostać przez inspekcję:

$$f(z) = [z\,(1-z)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}]^{\alpha} = \left[z(-z)^{-1+\frac{1}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]^{\alpha} = \left[-(-z)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{1-\alpha}$$
$$= -e^{i\alpha\pi}z\left[1-\frac{1-\alpha}{z}+\frac{1}{2}\frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{z^2}+\dots\right].$$

Przy przejściu do drugiej linii fazę pierwszego czynnika ustaliliśmy na podstawie ogólnej reguły ustalania fazy wyrażenia $[(z-a)/(b-z)]^{\alpha}$ biorąc pod uwagę dodatkowy minus w "kanonicznej postaci funkcji podcałkowej. Stąd $a_{-1} = \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)e^{i\alpha\pi}$. Zatem (jak można sprawdzić programem *Mathematica*)

$$\int_0^1 dx\, x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha} = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\,\frac{1}{2}\,\alpha(\alpha-1)\,e^{i\alpha\pi} = -\frac{\alpha\,(\alpha-1)\pi}{2\sin(\alpha\pi)}.$$

Zadanie.
Metodą residuów obliczyć całkę

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}},$$

dla $|a| > 1$ oraz dla $|a| < 1$.

Rozwiązanie: Gdy $|a| > 1$, całka jest standardowa. Całkujemy po konturze z rysunku 14 funkcję

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z+1)} \left(\frac{z+1}{1-z}\right)^{1/2},$$

która ma tylko biegun prosty w $z = a$; rozwinięcie

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-1/2} \left(-1 + \frac{1}{z}\right)^{-1/2},$$

w szereg dla dużych wartości z pokazuje, że punkt $z = \infty$ jest jej punktem regularnym.

Całki po małych okręgach o promieniach ε jak zwykle znikają w granicy $\varepsilon \to 0$, podobnie jak całka po dużym okręgu o promieniu $R > a$ (ta druga właśnie dlatego, że $z = \infty$ jest punktem regularnym). Zatem

$$2 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = 2\pi i \operatorname{res} f(z)|_{z=a}.$$

Z kolei

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=a} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(z+1)} \left(\frac{z+1}{1-z}\right)^{1/2} = \frac{1}{(a+1)} \left|\frac{a+1}{1-a}\right|^{1/2} e^{i\frac{\pi}{2}},$$

bo dla $a > 1$ mamy $\varphi_2 = \varphi_1 = 0$, a dla $a < -1$ mamy $\varphi_2 = \varphi_1 = \pi$, czyli w obu przypadkach $i\alpha(\varphi_2 - \varphi_1 + \pi) = i\pi/2$ (oczywiście dla $a \in \mathbb{C}$ faza wyszłaby inna; całka nie byłaby wtedy rzeczywista). Zatem dla $|a| > 1$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{(a+1)} \left|\frac{a+1}{1-a}\right|^{1/2} = -\frac{a}{|a|} \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

(dla $a > 1$ całka jest ujemna, a dla $a < -1$ - dodatnia).

Gdy $|a| < 1$, całka nie jest zbieżna bezwzględnie, ale istnieje w sensie wartości głównej i wynosi wtedy zero. Aby się o tym przekonać, zmieniamy nieco kontur całkowania: mamy bowiem teraz biegun położony na rozcięciu i w celu ominięcia go, zastępujemy "kość właściwą" z rysunku 14 konturem Γ' "kość z gulką" pokazanym na rysunku 15. Jak zwykle całki po okręgach o promieniach ε wokół punktów $z = \pm 1$ znikają w granicy $\varepsilon \to 0$ i pozostaje przeanalizować wpływ całek po dwu małych półokręgach o promieniu ε wokół punktu $z = a$. Zgodnie z regułą przedłużania funkcji mamy więc

$$\oint_{\Gamma'} dz\, f(z) = \int_{-1}^{a-\varepsilon} dx\, f(x) + \int_{\frac{1}{2}K^-(a)}^{\text{góra}} dz\, f_+(z) + \int_{a+\varepsilon}^{1} dx\, f(x)$$
$$+ \int_{1}^{a+\varepsilon} dx\, e^{i\pi} f(x) + \int_{\frac{1}{2}K^-(a)}^{\text{dól}} dz\, f_-(z) + \int_{a-\varepsilon}^{-1} dx\, e^{i\pi} f(x) = 0\,.$$

$f_\pm(z)$ oznaczają tu odpowiednio przedłużone wartości funkcji. Cała ta całka jest równa zeru, gdyż na zewnątrz konturu z rysunku 15 niema żadnych punktów osobliwych: residuum w $z = \infty$ znika (dzięki czemu znika całka po okręgu o promieniu R), a biegun w $z = a$ teraz leży na rozcięciu, które z punktu widzenia konturu składającego się z dużego okręgu o promieniu R i "kości" ("z gulką"), leży na zewnątrz obejmowanego przezeń obszaru.

W granicy $\varepsilon \to 0$ cztery skrajne całki z sumy sześciu całek wypisanych powyżej dają podwojoną szukaną całkę. Z osobna każda z dwu całek po górnym i dolnym fragmencie okręgu otaczającego biegun na rozcięciu (na których to obu fragmentach $z = a + \varepsilon\, e^{i\varphi}$), daje w granicy $\varepsilon \to 0$ wynik skończony:

$$\int_{\frac{1}{2}K^-(a)}^{\text{góra}} dz\, f_+(z) = \int_{\pi}^{0} d\varphi\, i\varepsilon\, e^{i\varphi}\, \frac{1}{\varepsilon\, e^{i\varphi}\,(1 + \varepsilon\, e^{i\varphi})} \left(\frac{z+1}{1-z}\right)_+^{1/2} = -i\pi \left(\frac{a+1}{1-a}\right)_+^{1/2},$$
$$\int_{\frac{1}{2}K^-(a)}^{\text{dól}} dz\, f_-(z) = \int_{2\pi}^{\pi} d\varphi\, i\varepsilon\, e^{i\varphi}\, \frac{1}{\varepsilon\, e^{i\varphi}\,(1 + \varepsilon\, e^{i\varphi})} \left(\frac{z+1}{1-z}\right)_-^{1/2} = -i\pi \left(\frac{a+1}{1-a}\right)_-^{1/2}.$$

Jednaże, jak wynika z reguły przedłużania czynnika w nawiasie (wartość bezwzględna razy czynnik fazowy równy $\frac{i}{2}(\varphi_1 - \varphi_2 + \pi)$), wartości czynników w nawiasach są dokładnie przeciwne (jest to ta sama różnica w znakach, która powoduje, że całki po górnym i dolnym brzegu kości dodają się do siebie!) i obie te całki wzajem się znoszą. W rezultacie

$$P\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad \text{gdy} \quad |a| < 1\,.$$

Zauważmy jeszcze, że dla $a = 0$ wynik ten (w sensie wartości głównej) jest oczywisty, jako że jest to wtedy całka z funkcji nieparzystej w symetrycznych granicach.

Zadanie
Obliczyć całkę

$$J = \int_a^b \frac{dr}{r}\, \sqrt{(r-a)(b-r)}\,.$$

Całka taka pojawia się np. przy narzucaniu warunków kwantyzacji Bohra-Sommerfelda na ruch elektronu w polu jądra atomu (potencjał Coulomba). Przy takim zastosowaniu r jest odległością od centrum, a parametry a i b są dodatnie - są one odległościami najmniejszą i największą punktów toru od centrum przyciągającego (punktami zwrotnymi ruchu radialnego). Tu jednak możemy rozpatrzyć wszystkie trzy przypadki: $0 < a < b$, $a < b < 0$ oraz $a < 0 < b$.

Rozwiązanie: Zacznijmy od dwu pierwszych przypadków, w których osobliwość funkcji podcałkowej w $x = 0$ znajduje się poza zakresem całkowania. Jak poprzednio całkujemy wtedy po konturze "kość na talerzu" (rysunek 14) funkcję

$$f(z) = \frac{b-z}{z}\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{1/2} \equiv \frac{b-z}{z}\left|\frac{z-a}{b-z}\right|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_a - \varphi_b + \pi)}\,.$$

Zgodnie z przepisem, $f(r+i0) = f(r)$, a $f(r-i0) = e^{i\pi}\, f(r) = -f(r)$. Ponieważ całki po małych okręgach znikają więc

$$2\int_a^b \frac{dr}{r}\,\sqrt{(r-a)(b-r)} = 2\pi i\left(\operatorname{res} f(z)|_{z=0} + \operatorname{res} f(z)|_{z=\infty}\right).$$

W $z=0$ funkcja ma biegun prosty.

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=0} = b\left(\frac{-a}{b}\right)^{1/2} = \sqrt{ab}\; e^{\frac{i}{2}\pi}\,,$$

zgodnie z przepisem, jako że dla $0<a<b$ punkt $z=0$ leży na osi rzeczywistej albo na lewo od obu punktów rozgałęzienia (i wobec tego $\varphi_a = \varphi_b = \pi$ w $z=0$), albo na prawo (i wtedy $\varphi_a = \varphi_b = 0$ w $z=0$). Z kolei w $z=\infty$ funkcja $f(z)$ ma biegun zerowego rzędu ($k=0$), gdyż rozwinięcie

$$f(z) = -\left(1-\frac{b}{z}\right)\left(-\frac{1-a/z}{1-b/z}\right)^{1/2},$$

daje $a_0 z^0$ jako wyraz z najwyższą potęgą z. Zatem

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=\infty} = z^2 f'(z)\big|_{z=\infty}\,,$$

gdzie

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left[-\frac{1}{z} - \frac{b-z}{z^2}\right]\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{-1/2}\left[\frac{1}{b-z} + \frac{z-a}{(b-z)^2}\right]\frac{b-z}{z} \\ &= \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{1/2}\left[-\frac{b}{z^2} + \frac{b-z}{2z}\,\frac{b-a}{(z-a)(b-z)}\right]. \end{aligned}$$

Mnożąc przez z^2 i biorąc granicę $z\to\infty$ znajdujemy

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=\infty} = -\frac{1}{2}(a+b)\, e^{\frac{i}{2}\pi}\,.$$

Ostatecznie więc

$$J = \int_a^b \frac{dr}{r}\,\sqrt{(r-a)(b-r)} = \frac{1}{2}\; 2\pi i\; e^{\frac{i}{2}\pi}\left[\sqrt{ab} - \frac{1}{2}(a+b)\right] = \frac{\pi}{2}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right).$$

W przypadku $a<0<b$ punkt osobliwy $z=0$ funkcji podcałkowej leży na rozcięciu. Trzeba wówczas zastąpić kość właściwą z rysunku 14 konturem “kośćią z gulką” pokazaną na rysunku 15, aby wyizolować tę osobliwość. Mamy wtedy z twierdzenia o residuach, po wzięciu granicy $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$ (tu ε jest jeszcze - bo za chwilę użyjemy tego samego

symbolu do “obróbki” całek po “gulce” - promieniem małych okręgów obiegających punkty $z = a$ i $z = b$) związek

$$\oint_{\Gamma'} dz\, f(z) = 2\left(\int_a^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^b\right) \frac{dr}{r}\sqrt{(r-a)(b-r)}$$
$$+ \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(0)}^{g\acute{o}ra} dz\, f(z) + \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(0)}^{d\acute{o}l} dz\, f(z) = \pi(a+b)\,.$$

Po prawej stronie uwzględniony został teraz tylko przyczynek od residuum w $z = \infty$. Na górnym półokręgu obiegającym $z = 0$ piszemy $z = \varepsilon\, e^{i\varphi}$ i

$$\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(0)}^{g\acute{o}ra} dz\, f(z) = \int_\pi^0 d\varphi\, i\left(b - \varepsilon\, e^{i\varphi}\right)\left|\frac{\varepsilon\, e^{i\varphi} - a}{b - \varepsilon\, e^{i\varphi}}\right|^{1/2} \to -i\pi\sqrt{ab}\,,$$

gdyż w granicy $\varepsilon \to 0$ faza $\varphi_a - \varphi_b + \pi = 0 - \pi + \pi = 0$. Z kolei całka po dolnym półokręgu obiegającym $z = 0$ daje

$$\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-(0)}^{d\acute{o}l} dz\, f(z) = \int_{2\pi}^\pi d\varphi\, i\left(b - \varepsilon\, e^{i\varphi}\right)\left|\frac{\varepsilon\, e^{i\varphi} - a}{b - \varepsilon\, e^{i\varphi}}\right|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_a - \varphi_b + \pi)} \to -i\pi\sqrt{ab}\, e^{\frac{i}{2}\,2\pi} = i\pi\sqrt{ab}\,,$$

gdyż w granicy $\varepsilon \to 0$ faza $\varphi_a - \varphi_b + \pi = 2\pi - \pi + \pi = 2\pi$. Obie całki po półokręgach znoszą się wzajemnie i wobec tego znajdujemy, że gdy $a < 0 < b$

$$J = P\int_a^b \frac{dr}{r}\sqrt{(r-a)(b-r)} = \frac{\pi}{2}\,(a+b)\,.$$

(Dopisujemy znak wartości głównej, gdyż tak właśnie należy interpretować otrzymany wynik tej całki niewłaściwej.) Oczywiście dla $a = -b$ wynik jest oczywisty, gdyż jest to wtedy całka z funkcji nieparzystej w symetrycznych granicach.

W pierwszych dwu przypadkach, $0 < a < b$ i $a < b < 0$ całkę tę można także obliczyć konwencjonalnie za pomocą następującego chwytu. Definiujemy parametry $t \equiv ab$ oraz $p \equiv a + b$ i piszemy

$$J(t,p) = \int_a^b \frac{dr}{r}\sqrt{(r-a)(b-r)} = \int_a^b \frac{dr}{r}\sqrt{-r^2 + pr - t}\,.$$

Mamy wtedy

$$\frac{\partial J(t,p)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int_a^b \frac{dr}{r\sqrt{(r-a)(b-r)}}\,.$$

Podstawiamy teraz $r = 1/\xi$, $dr/r = -d\xi/\xi$, tak iż

$$\frac{\partial J(t,p)}{\partial t} = -\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{a'}^{b'} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - a')(b' - \xi)}}\,,$$

gdzie $a' = 1/b$ i $b' = 1/a$. Następnie dokonujemy kolejnego podstawienia

$$\xi = \frac{1}{2}(a' + b') + \frac{1}{2}(b' - a')\eta \,,$$

które prowadzi do wyniku

$$\frac{\partial J(t,p)}{\partial t} = -\frac{1}{2\sqrt{ab}} \int_{-1}^{+1} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{ab}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{t}}$$

Całkując mamy

$$J(t,p) = -\pi\sqrt{t} + h(p) = -\pi\sqrt{t} + \frac{\pi}{2}\, p = \frac{\pi}{2}\left(a + b - 2\sqrt{ab}\right),$$

gdyż będąca "stałą" całkowania funkcja $h(p)$ musi być taka, że $J(t, p = 2\sqrt{t}) = 0$ (tj. $J = 0$ dla $a = b$).

Zadanie
Posługując się twierdzeniem o residuach zsumować szereg

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\,.$$

Wykorzystać wynik, by podać sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Rozwiązanie: Zgodnie z twierdzeniem o residuach, szereg o wyrazach dodatnich $g(n)$, takich, że funkcja $g(z)$ nie ma punktów osobliwych na osi rzeczywistej, można przedstawić w postaci całki z funkcji

$$f(z) = \pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)\,g(z)\,,$$

po konturze Γ pokazanym w lewej części rysunku 16. Rzeczywiście: funkcja $f(z)$ wewnątrz tego konturu, tj. na osi rzeczywistej, ma tylko bieguny proste w $z = n \in \mathbb{Z}$ pochodzące (zgodnie z założeniem) tylko od funkcji $\pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)$. Z uwagi na periodyczność cotangensa, residua tych biegunów funkcji $\pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)$ są wszystkie takie same jak residuum w $z = 0$:

$$\mathrm{res}\,\pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)|_{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \cos(\pi z) = 1\,.$$

Zatem

$$\mathrm{res}\,f(z)|_{z=n} = g(n)\,,$$

a stąd, w granicy $R \to \infty$,

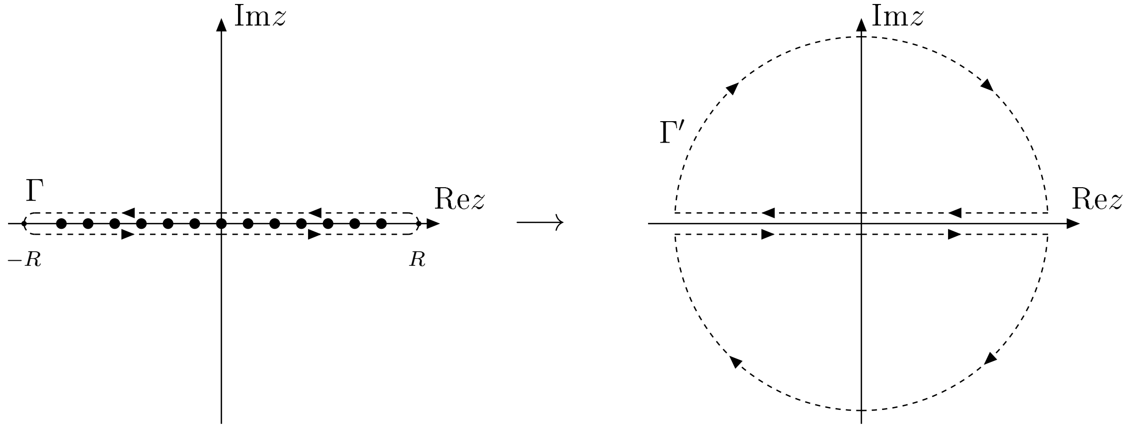
$$\oint_\Gamma dz\,f(z) = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\,.$$

Całki po małych półokręgach domykających proste fragmenty konturu Γ znikają w granicy, w której ich promienie dążą do zera.[18]

Aby znaleźć sumę szeregu deformujemy teraz (przed wzięciem granicy $R \to \infty$) kontur Γ do konturu Γ' pokazanego w prawej części rysunku 16 składającego się z dwu zamkniętych konturów położonych jeden w górnej, a drugi w dolnej półpłaszczyźnie zespolonej zmiennej z i obieganych w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (a więc mających niestandardową orientację). Dzięki temu możemy napisać

$$2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = \oint_\Gamma dz\,f(z) = \oint_{\Gamma'} dz\,f(z) = -2\pi i \sum_i \mathrm{res}\,f(z)|_{z=z_i}\,,$$

[18] Trzeba przy tym dopowiedzieć, że bierzemy $R \neq k \in \mathbb{N}_+$, aby środki domykających półokręgów nie wypadały w biegunach funkcji cotangens.



Rysunek 16: Deformacja konturu całkowania Γ do Γ' umożliwiająca sumowanie szeregów.

przy czym suma rozciąga się na wszystkie punkty osobliwe funkcji $f(z)$ znajdujące się wewnątrz obu części konturu Γ' (punkty osobliwe na osi rzeczywistej są teraz *na zewnątrz* obszarów obejmowanych przez Γ'!). Minus po prawej stronie jest skutkiem niestandardowego kierunku obiegania konturu Γ'. Tak więc

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = -\sum_i \mathrm{res}\, f(z)|_{z=z_i} \ .$$

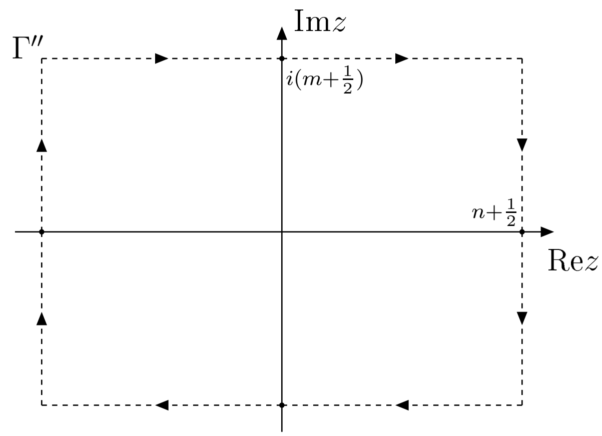
W przypadku $g(n) = 1/(n^2 + a^2)$ funkcja $f(z)$ ma wewnątrz konturu Γ' dwa bieguny proste w $z = \pm i|a|$, których residua oblicza się prosto:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} &= -\left(\frac{\pi\,\mathrm{ctg}(i\pi|a|)}{2i|a|} + \frac{\pi\,\mathrm{ctg}(-i\pi|a|)}{-2i|a|}\right) = -\frac{\pi\,\mathrm{ctg}(i\pi a)}{ia} \\ &= -\frac{\pi}{ia}\,\frac{i\left(e^{-\pi a}+e^{\pi a}\right)}{e^{-\pi a}-e^{\pi a}} = \frac{\pi}{a}\,\frac{\mathrm{ch}(\pi a)}{\mathrm{sh}(\pi a)}\,.\end{aligned}$$

Aby zsumować szereg $1/n^2$ zapisujemy go w postaci[19]

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} - \frac{1}{a^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{a}\,\frac{1+\frac{1}{2}\pi^2a^2+\dots}{\pi a(1+\frac{1}{6}\pi^2a^2+\dots)} - \frac{1}{a^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\left\{\frac{1}{a^2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\pi^2a^2+\dots\right)\left(1-\frac{1}{6}\pi^2a^2+\dots\right)-1\right]\right\} = \frac{\pi^2}{6}\,.\end{aligned}$$

[19] Rozwinięcia w szeregi Taylora funkcji hiperbolicznych są takie same jak zwykłych funkcji trygonometrycznych z tym, że wszystkie minusy trzeba zamienić na plusy.



Rysunek 17: Prostokat, do którego deformujemy półokregi konturu Γ'.

Aby wszystko było zalegalizowane, trzeba jeszcze wykazać, że w granicy $R \to \infty$ znikają całki po dwu dużych półokręgach. Zamiast wykazywać to dla tych półokręgów zdeformujemy je do prostokątnego konturu Γ'' pokazanego na rysunku 17 i wykażemy znikanie całek po tym prostokącie w granicy, w której jego rozmiary rosną do nieskończoności. Taka deformacja konturu jest dopuszczalna, gdyż nie przecinamy przy tym żadnych biegunów (należy pamiętać, że prostokąt reprezentuje dwa prostokąty, jeden w górnej, drugi w dolnej półpłaszczyźnie domknięte prostymi równoległymi do osi rzeczywistej, tak jak w konturze Γ'). Aby przy rozszerzaniu boków prostokąta kontur nie przechodził przez leżące na osi rzeczywistej bieguny funkcji cotangens zakładamy, że jego pionowe boki przechodzą przez punkty $z = \pm n + \frac{1}{2}$; poziome boki można analogicznie przeprowadzić przez punkty $z = i(\pm m + \frac{1}{2})$ (przy czym, $m, n \in \mathbb{N}$ i $m, n \to \infty$). Szacujemy całki po bokach konturu:

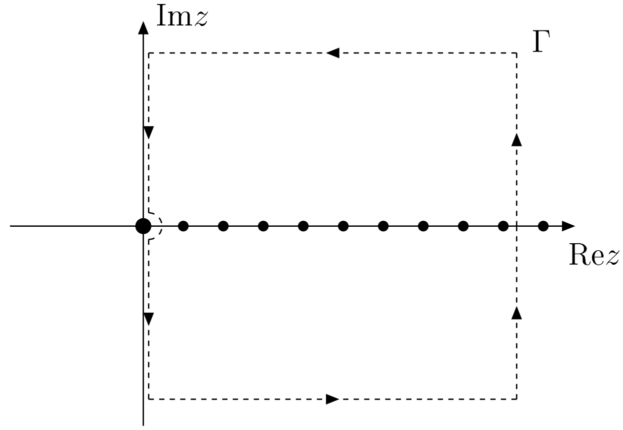
$$\left| \oint_{\Gamma''} dz \, \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2 + a^2} \right| \leq \pi \oint_{\Gamma''} |dz| \, \frac{|\operatorname{ctg}(\pi z)|}{|z|^2 - a^2} \, .$$

(Symbol $|dz|$ oznacza, że kierunek całkowania wybieramy tak, by całka była dodatnia). Podstawiamy $z = x + iy$ (dla całek po bokach pionowych $x = \pm n + \frac{1}{2}$ i $-\infty < y < \infty$, a dla całek po bokach poziomych $y = \pm m + \frac{1}{2}$ i $-\infty < x < \infty$):

$$\begin{aligned} |\operatorname{ctg}(\pi(x + iy))| &= \left| \frac{\cos(\pi x + i\pi y)}{\sin(\pi x + i\pi y)} \right| = \left| \frac{\cos(\pi x) \operatorname{ch}(\pi y) - i \operatorname{sh}(\pi y) \, \sin(\pi x)}{\sin(\pi x) \operatorname{ch}(\pi y) + i \operatorname{sh}(\pi y) \, \cos(\pi x)} \right| \\ &= \left[\frac{(\cos(\pi x) \operatorname{ch}(\pi y))^2 + (\operatorname{sh}(\pi y) \, \sin(\pi x))^2}{(\sin(\pi x) \operatorname{ch}(\pi y))^2 + (\operatorname{sh}(\pi y) \, \cos(\pi x))^2} \right]^{1/2} . \end{aligned}$$

Jeśli teraz podstawimy $x = \pm n + \frac{1}{2}$ szacując całki po bokach pionowych, to wyzerują się cosinusy πx, a kwadraty sinusów πx staną się jedynkami; zatem na bokach, na których $z = \pm n + \frac{1}{2} + iy$

$$|\operatorname{ctg}(\pi(x + iy))| = \left| \frac{\operatorname{sh}(\pi y)}{\operatorname{ch}(\pi y)} \right| = |\operatorname{th}(\pi y)| < 1 \, ,$$



Rysunek 18: Kontur całkowania z fragmentem biegnącym po osi urojonej omijający biegun trzeciego rzedu w $z=0$, pozwalający zsumować szereg $1/n$ bezpośrednio.

wobec czego ($N \equiv \pm n + \frac{1}{2}$)

$$\left|\int_{\text{bok pion}} dz\, \frac{\pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)}{z^2+a^2}\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi\, dy}{y^2+N^2-a^2} = \frac{\pi}{\sqrt{N^2-a^2}}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{N^2-a^2}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} \to 0\,,$$

gdy $N^2 \to \infty$. Przy szacowaniu całek po bokach poziomych będziemy zaś mieli

$$|\mathrm{ctg}(\pi(x+iy))| = \left[\frac{\cos^2(\pi x)+\sin^2(\pi x)\,\mathrm{th}^2(\pi y)}{\sin^2(\pi x)+\cos^2(\pi x)\,\mathrm{th}^2(\pi y)}\right]^{1/2} \to 1\,,$$

gdy $y \to \infty$ ($m \to \infty$) i dalej szacowanie przebiega tak, jak dla boków pionowych. Zatem całki bo bokach znikają, co oznacza, że znikają też całki po dużych półokręgach konturu Γ' i wyniki uzyskane powyżej zostają tym samym zalegalizowane.
Uwaga końcowa: W zasadzie można było od początku rozpatrywać całkę z $f(z) = g(z)\,\pi\mathrm{ctg}\pi z$ po prostokątnym konturze pokazanym na rysunku 17 bez odwoływania się do konturu z lewego rysunku 16.

Zadanie
Zsumować szereg

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

bezpośrednio, wykorzystując kontur pokazany na rysunku 18.
Rozwiązanie: Po pokazanym konturze całkujemy funkcję

$$f(z) = \frac{\pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)}{z^2}\,.$$

Wewnątrz tego konturu ma ona tylko bieguny proste w punktach $z = n$ (gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$) o residuach równych $1/n^2$. Zatem

$$\oint_\Gamma dz\, f(z) = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

W taki sam sposób jak poprzednio wykazuje się, że w granicy, w której rozmiary konturu dążą do nieskończoności, znikają całki po obu jego poziomych fragmentach oraz po prawym pionowym (oddalającym się do nieskończoności) fragmencie. Całka zaś po osi urojonej daje

$$\int_{\text{po osi } y} dz\, f(z) = \int_{\infty}^{\varepsilon} dy\, \frac{i\pi \mathrm{ctg}\pi y}{-y^2} + \int_{-\varepsilon}^{-\infty} dy\, \frac{i\pi \mathrm{ctg}\pi y}{-y^2} + \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-} dz\, f(z)\,.$$

Dwie pierwsze całki skracają się wzajemnie (bo funkcja podcałkowa jest nieparzysta i wystarczy w drugiej z nich podstawić $y = -y'$), całkę zaś po półokręgu o promieniu $\varepsilon \to 0$ można zapisać wykorzystując szereg Wawrzusia funkcji $f(z)$ w otoczeniu punktu $z = 0$ i podstawiając $z = \varepsilon\, e^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-} dz\, f(z) &= \int_{\frac{1}{2}K_\varepsilon^-} dz\, \left(\frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-1}}{z} + a_1 z + \ldots\right) \\ &= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} d\varphi\, i\varepsilon\, e^{i\varphi} \left(\frac{a_{-3}}{\varepsilon^3}\, e^{-3i\varphi} + \frac{a_{-1}}{\varepsilon}\, e^{-i\varphi} + a_1 \varepsilon\, e^{i\varphi} + \ldots\right) = -i\pi\, a_{-1}.\end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy tu to, że funkcja podcałkowa jest nieparzysta (więc $a_{\pm 2k} = 0$) i to, że ma ona w $z = 0$ biegun trzeciego rzędu.[20] Residuum funkcji $f(z)$ w $z = 0$ znajdujemy standardowo:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dz^2}\, \pi z\, \mathrm{ctg}(\pi z)\right]_{z=0} &= \frac{\pi^2}{2} \lim_{\xi\to 0} \left[\frac{d^2}{d\xi^2}\, \xi\, \mathrm{ctg}\, \xi\right]_{\xi=0} = \pi^2 \lim_{\xi\to 0} \frac{\xi \cos\xi - \sin\xi}{\sin^2\xi} \\ &= \pi^2 \lim_{\xi\to 0} \frac{\xi(1 - \frac{1}{2}\xi^2 + \ldots) - \xi + \frac{1}{6}\xi^3 - \ldots}{(\xi - \ldots)^3} = -\frac{\pi^2}{3}\,.\end{aligned}$$

Ostatecznie więc z całki po konturze z rysunku 18 otrzymujemy

$$-i\pi \left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

co daje znany już wynik.

---

[20]Wynik całki po półokręgu jest taki, jaki przewiduje regułka sformułowana na stronie 15. Jednakże trzeba pamiętać, że bez żadnych dodatkowych warunków stosuje się ona tylko do łuków obiegających bieguny *proste*. Tu działa ona dlatego, że łukiem jest półokrąg, a funkcja podcałkowa jest nieparzysta.

Zadanie
Szereg

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}\,,$$

można zsumować "na piechotę", wypisując bezpośrednio ciąg jego sum cząstkowych. Sprawdzić, że metoda wykorzystująca twierdzenie o residuach daje ten sam wynik.
Rozwiązanie: Aby zsumować szereg S wystarczy przedstawić ciąg jego sum cząstkowych w postaci

$$S_N \equiv \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\,(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n'=2}^{N+1} \frac{1}{n'} = 1 - \frac{1}{N+1}\,,$$

(w drugiej sumie przeszliśmy od sumowania po n do sumowania po $n' = n+1$, co spowodowało zmianę zakresu sumowania). Wynika z niej natychmiast, że $S = 1$.

Bezpośrednio zastosować do badanego szeregu metody residuów nie można, bo bieguny funkcji $\pi\mathrm{ctg}(\pi z)/z(z+1)$ leżałyby wtedy na osi rzeczywistej. W związku z tym zsumujemy tą metodą szereg

$$\tilde{S}(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n(n+1)}{[n^2+a^2][(n+1)^2+a^2]}\,.$$

Mamy bowiem wtedy

$$S = \frac{1}{2} \lim_{a\to 0} \tilde{S}(a)\,.$$

(Nie musimy tu nic od $\tilde{S}(a)$ odejmować gdyż wyrazy z $n=0$ i $n=-1$ są i tak zerowe).

Zgodnie z metodą przedstawioną w poprzednim zadaniu, suma $\tilde{S}(a)$ jest dana przez residua funkcji

$$f(z) = \pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)\, \frac{z\,(z+1)}{[z^2+a^2][(z+1)^2+a^2]}\,,$$

w punktach osobliwych (są one biegunami prostymi) położonych poza osia rzeczywistą. Residua te są równe:

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}\, f(z)|_{z=i|a|} &= -\frac{\pi\,\mathrm{cth}(\pi a)}{2a}\,\frac{i|a|(1+i|a|)}{1+2i|a|}\,,\\
\mathrm{res}\, f(z)|_{z=-i|a|} &= -\frac{\pi\,\mathrm{cth}(\pi a)}{2a}\,\frac{-i|a|(1-i|a|)}{1-2i|a|}\,,\\
\mathrm{res}\, f(z)|_{z=-1+i|a|} &= -\frac{\pi\,\mathrm{cth}(\pi a)}{2a}\,\frac{i|a|(-1+i|a|)}{1-2i|a|}\,,\\
\mathrm{res}\, f(z)|_{z=-1-i|a|} &= -\frac{\pi\,\mathrm{cth}(\pi a)}{2a}\,\frac{-i|a|(-1-i|a|)}{1+2i|a|}\,.
\end{aligned}$$

Wykorzystana tu została periodyczność funkcji cotangens oraz wzorek $\mathrm{ctg}(i\pi a) = -i\mathrm{cth}(\pi a)$. Ich suma daje

$$\sum \operatorname{res} f(z)|_{z=z_i} = -\frac{2\pi\, i|a|\,\mathrm{ctg}(\pi a)}{2a}\left\{\frac{1+i|a|}{1+2i|a|} - \frac{1-i|a|}{1-2i|a|}\right\}.$$

Po uporzadkowaniu znajdujemy, że

$$\tilde{S}(a) = \frac{2\pi a}{1+4a^2}\,\mathrm{cth}(\pi a)\,.$$

Zatem

$$S = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\tilde{S}(a) = 1\,,$$

tak jak powinno było wyjść.

Jeszcze prościej można obliczyć S sumują szereg

$$\tilde{S}'(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n-ia)(n+1+ia)}\,,$$

o wyrazach zespolonych.[21] Rzeczywiście: odpowiednia funkcja ma teraz poza osią rzeczywistą dwa bieguny proste; jej residua w tych punktach są takie same, wobec czego

$$\tilde{S}'(a) = -\frac{2\pi\,\mathrm{ctg}(i\pi a)}{1+2ia} = \frac{2\pi i\,\mathrm{cth}(\pi a)}{1+2ia}\,.$$

Stąd już łatwo znaleźć S:

$$S = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\left\{\frac{2\pi i\,\mathrm{cth}(\pi a)}{1+2ia} - \frac{2i}{a(1+ia)}\right\}\,.$$

(teraz trzeba odjąć wyrazy z $n=0$ i $n=1$). Zatem

$$S = i\lim_{a\to 0}\left\{(1-2ia+\dots)\,\frac{\pi\left(1+\frac{1}{2}\pi^2a^2+\dots\right)}{\pi a\left(1+\frac{1}{6}\pi^2a^2+\dots\right)} - \frac{1}{a}\,(1-ia+\dots)\right\} = 1\,.$$

Zadanie

Zsumować szereg

$$S = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n-a)^2}\,,$$

[21] Dlaczego nie uda się tego zrobić za pomocą szeregu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1/[(n-ia)(n+1-ia)]$?

gdzie $a \notin \mathbb{Z}$. Wykorzystując wynik podać sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$.
Rozwiązanie: Tak jak w poprzednim zadaniu, można zastosować metodę wykorzystującą całkowanie po konturach z rysunku 16 zakładając, że a ma niezerową część urojoną, tak by punkt osobliwy funkcji

$$f(z) = \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \, \frac{1}{(z-a)^2} \, ,$$

w $z = a$ nie leżał na osi rzeczywistej. Na koniec można będzie przejść z częścią urojoną a do zera.

W $z = a$ funkcja $f(z)$ ma biegun drugiego rzędu. Jej residuum w tym punkcie jest równe

$$\operatorname{res} f(z)\big|_{z=a} = \pi \, \left[\frac{d \operatorname{ctg}(\pi z)}{dz}\right]_{z=a} = -\,\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)} \, .$$

Zatem z twierdzenia o residuach otrzymujemy natychmiast

$$S(a) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)} \, ,$$

przy czym wynik ten jest słuszny dla wszystkich $a \notin \mathbb{Z}$.

Sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ można dostać ze wzoru

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{a \to 0} \left[S(a) - \frac{1}{a^2}\right] &= \frac{1}{2} \lim_{a \to 0} \left[\frac{\pi^2}{\pi^2 a^2 \left(1 - \frac{1}{6}\pi^2 a^2 + \ldots\right)^2} - \frac{1}{a^2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \to 0} \left[\frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{1}{6}\pi^2 a^2 + \ldots\right)^2 - \frac{1}{a^2}\right] = \frac{\pi^2}{6} \, . \end{aligned}$$

Zadanie
Posługując się twierdzeniem o residuach zsumować szereg

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \, .$$

Wykorzystać wynik, by podać sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \, .$$

Rozwiązanie: W przypadku szeregu naprzemiennego o wyrazach $a_n = (-1)^n g(n)$ tworzymy funkcję

$$h(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \, g(z) \, ,$$

która na osi rzeczywistej ma bieguny proste w punktach $z = n$. Residua funkcji $h(z)$ w tych punktach są równe $g(n)$ razy odpowiednie residuum funkcji $\pi/\sin(\pi z)$:

$$\mathrm{res}\,\frac{\pi}{\sin\pi z}\Big|_{z=n} = \lim_{z\to n}\frac{\pi(z-n)}{\sin[\pi(z-n)+n\pi]} = \lim_{z\to n}\frac{\pi(z-n)}{\sin[\pi(z-n)]\cos(n\pi)} = (-1)^n\,.$$

W granicy $R \to \infty$ otrzymujemy zatem związek

$$2\pi i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n g(n) = \oint_\Gamma dz\,h(z)\,,$$

gdzie Γ jest zamkniętym konturem pokazanym w lewej części rysunku 16, a po zdeformowaniu Γ do konturu Γ'

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n g(n) = -\sum_i \mathrm{res}\,h(z)|_{z=z_i\neq n}\,.$$

Suma obejmuje tu punkty osobliwe funkcji $h(z)$ nieleżące na osi rzeczywistej. W przypadku szeregu tu rozpatrywanego residua, które należy uwzględnić znajdują się w punktach $z_1 = i|a|$ oraz $z_2 = -i|a|$:

$$\sum \mathrm{res}\,h(z)|_{z=\pm i|a|} = \frac{\pi}{2i|a|\sin(i\pi|a|)} + \frac{\pi}{-2i|a|\sin(-i\pi|a|)} = -\frac{\pi}{a\,\mathrm{sh}(\pi a)}\,,$$

a zatem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a\,\mathrm{sh}(\pi a)}\,.$$

Konieczne do uzasadnienia wzorów szacowanie całek po bokach prostokąta z rysunku 17 postępuje analogicznie do szacowania przedstawionego przy sumowaniu szeregu $1/n^2$. Dla $z = x + iy$ mamy teraz

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sin\pi z}\right| &= \frac{1}{|\sin(\pi x)\,\mathrm{ch}(\pi y) + i\cos(\pi x)\,\mathrm{sh}(\pi y)|}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\pi x)\,\mathrm{ch}^2(\pi y) + \cos^2(\pi x)\,\mathrm{sh}^2(\pi y)}}\,.\end{aligned}$$

Na bokach pionowych, na których $x = \pm n + \frac{1}{2}$ redukuje się to do

$$\left|\frac{1}{\sin\pi z}\right| = \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi y)} < 1\,,$$

a na bokach poziomych czynnik

$$\left|\frac{1}{\sin\pi z}\right| = \frac{1/\mathrm{ch}^2(\pi y)}{\sqrt{\sin^2(\pi x)\ + i\cos^2(\pi x)\,\mathrm{th}^2(\pi y)}}$$

jest (gdy $|y| \to \infty$, tj. $m \to \infty$) ograniczony. Reszta szacowania przebiega bez zmian.

Szereg $(-1)^n/n^2$ można zsumować tak jak szereg $1/n^2$, tj. biorąc granicę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{a\to 0} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{a\to 0} \left(\frac{\pi}{a\,\mathrm{sh}(\pi a)} - \frac{1}{a^2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{a\to 0} \left(\frac{1}{a^2(1+\frac{1}{6}\pi^2 a^2 + \ldots)} - \frac{1}{a^2} \right) = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

Ten sam wynik można także uzyskać z sumy szeregu $1/n^2$:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

Zatem sumy odwrotnych kwadratów liczb nieparzystych i parzystych wynoszą odpowiednio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24}\,.$$

Stąd zaś

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

Zadanie
Zsumować szereg

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^3}\,.$$

Rozwiązanie: Na pozór jest tu problem, gdyż wszystkie bieguny funkcji

$$f(z) = \pi \,\mathrm{ctg}(\pi z)\, \frac{z}{(2z-1)^3}\,,$$

(również te, które są w punktach innych niż $z = n$) leżą na osi rzeczywistej, czyli poza konturem Γ' z rysunku 16. Problem ten można jednak bez kłopotu obejść sumując szereg

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{(2n-1-ia)^3}\,,$$

i biorąc granicę $a \to 0$. Ponieważ granica ta jest nieosobliwa, można po prostu od razu położyć $a = 0$.

Wykorzystując zatem wzory z poprzednich zadań (tak jak i tam można sprawdzić, że w granicy znikają całki po dużych półokręgach) mamy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^3} = - \operatorname{res} \frac{\pi z \operatorname{ctg}(\pi z)}{(2z-1)^3}\bigg|_{z=\frac{1}{2}} .$$

Biegun w $z = \frac{1}{2}$ jest trzeciego rzędu, więc

$$\begin{aligned} \operatorname{res}\left(\frac{\pi z \operatorname{ctg}(\pi z)}{(2z-1)^3}\right)\bigg|_{z=\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{8}\,\pi z \operatorname{ctg}(\pi z)\right)\right]_{z=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{16}\left[\frac{d^2}{d\eta^2}\,\eta \operatorname{ctg}\eta\right]_{\eta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16}\left[\frac{d}{d\eta}\left(\operatorname{ctg}\eta - \frac{\eta}{\sin^2\eta}\right)\right]_{\eta=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{16}\left[\frac{-2}{\sin^2\eta} + \frac{2\eta\cos\eta}{\sin^3\eta}\right]_{\eta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi^2}{8} . \end{aligned}$$

Zatem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^2}{8} .$$

Zadanie
Zsumować szereg

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{4n^2+4n+5} .$$

Rozwiązanie: Szereg ten jest zbieżny tylko warunkowo, ale metoda wciąż działa. Tworzymy funkcję

$$h(z) = \frac{1}{4}\,\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\,\frac{1}{z^2+z+5/4} ,$$

i mamy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^2+4n+5} = -\sum_{z_i \neq n} \operatorname{res} h(z)|_{z=z_i} .$$

Funkcja $h(z)$ ma poza osią rzeczywistą bieguny proste w $z_1 = -\frac{1}{2}+i$ oraz w $z_2 = -\frac{1}{2}-i$; residua w tych punktach obliczamy standardowo:

$$\operatorname{res} h(z)|_{z=z_1} = \frac{1}{4}\,\frac{\pi z_1}{\sin(\pi z_1)}\,\frac{1}{z_1-z_2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{-\frac{1}{2}+i}{2i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+i\pi\right)} = -\frac{\pi}{16}\,\frac{2+i}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-i\pi\right)}$$

$$= -\frac{\pi}{16}\,\frac{2+i}{\cos(i\pi)} = -\frac{\pi}{16}\,\frac{2+i}{\mathrm{ch}(\pi)}\,,$$

$$\operatorname{res} h(z)\big|_{z=z_2} = \frac{1}{4}\,\frac{\pi z_2}{\sin(\pi z_2)}\,\frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{\pi}{4}\,\frac{-\frac{1}{2} - i}{-2i\sin\left(-\frac{\pi}{2} - i\pi\right)} = -\frac{\pi}{16}\,\frac{2-i}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right)}$$

$$= -\frac{\pi}{16}\,\frac{2-i}{\cos(i\pi)} = -\frac{\pi}{16}\,\frac{2-i}{\mathrm{ch}(\pi)}\,.$$

Zatem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{4n^2 + 4n + 5} = \frac{\pi}{4\,\mathrm{ch}\,\pi}\,.$$

Zadanie
Posługując się twierdzeniem o residuach zsumować szereg

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4 + a^4}\,.$$

Wykorzystać wynik, by podać sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\,.$$

Rozwiązanie: Szereg jest bezwzględnie zbieżny. Postępujemy standardowo: tworzymy funkcję

$$f(z) = \pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)\, g(z)\,,$$

w której $g(z) = 1/(z^4 + a^4)$, mającą poza osią rzeczywistą bieguny proste w punktach, w których bieguny proste ma funkcja $g(z)$, tj. w punktach

$$z_1 = -z_4 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\,|a|\,, \qquad z_2 = -z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,|a|\,.$$

Residua funkcji $g(z)$ znajdujemy wykorzystując związki $z_1^2 = z_4^2 = -ia^2$, $z_2^2 = z_3^2 = ia^2$, oraz

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - i\sqrt{2}\,|a|z - a^2\,,$$
$$(z - z_3)(z - z_4) = z^2 + i\sqrt{2}\,|a|z - a^2\,.$$

Są one równe

$$\operatorname{res} g(z)\big|_{z=z_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,|a|^3(1+i)}\,, \qquad \operatorname{res} g(z)\big|_{z=z_2} = \frac{1}{-2\sqrt{2}\,|a|^3(1-i)}\,,$$
$$\operatorname{res} g(z)\big|_{z=z_3} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,|a|^3(1-i)}\,, \qquad \operatorname{res} g(z)\big|_{z=z_4} = \frac{1}{-2\sqrt{2}\,|a|^3(1+i)}\,.$$

Ponadto, wprowadzając oznaczenia $c \equiv \cos\alpha$, $s \equiv \sin\alpha$ oraz $c_h \equiv \operatorname{ch}\alpha$, $s_h \equiv \operatorname{sh}\alpha$, gdzie $\alpha \equiv \pi|a|/\sqrt{2}$, mamy

$$\operatorname{ctg} z_1 = -\operatorname{ctg} z_4 = \frac{c\, c_h + i\, s\, s_h}{-s\, c_h + i\, c\, s_h}\,, \qquad \operatorname{ctg} z_2 = -\operatorname{ctg} z_3 = \frac{c\, c_h - i\, s\, s_h}{s\, c_h + i\, c\, s_h}\,.$$

Zgodnie ze wzorem podstawowym na sumowanie szeregów mamy

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4 + a^4} &= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}\,|a|^3}\, 2 \left\{ \frac{c\, c_h + i\, s\, s_h}{(1+i)(-s\, c_h + i\, c\, s_h)} - \frac{c\, c_h - i\, s\, s_h}{(1-i)(s\, c_h + i\, c\, s_h)} \right\} \\ &= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}\,|a|^3}\, \frac{1}{s^2\, c_h^2 + c^2\, s_h^2} \{(1-i)(-s\, c_h - ic\, s_h)(c\, c_h + is\, s_h) \\ &\qquad -(1+i)(s\, c_h - ic\, s_h)(c\, c_h - is\, s_h)\}\,.\end{aligned}$$

Po wymnożeniu wszystkie wyrazy urojone redukują się i otrzymujemy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4 + a^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\,|a|^3}\, \frac{s\, c + s_h\, c_h}{s^2\, c_h^2 + c^2\, s_h^2}\,.$$

Sumę szeregu $1/n^4$ otrzymujemy biorąc granicę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4 + a^4} - \frac{1}{a^4} \right) = \lim_{a\to 0} \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,|a|^3} \left(\frac{s\, c + s_h\, c_h}{s^2\, c_h^2 + c^2\, s_h^2} - \frac{1}{\alpha} \right).$$

Pracowicie rozwijamy zatem wykorzystując najpierw w mianowniku "jedynkę hiperboliczną" i "jedynką trygonometryczną"

$$\begin{aligned}\frac{s\, c + s_h\, c_h}{s^2\, c_h^2 + c^2\, s_h^2} - \frac{1}{\alpha} &= \frac{s\, c + s_h\, c_h}{1 - c^2 + s_h^2} - \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha\left(1 + \frac{2}{15}\alpha^4 + \ldots\right)}{2\alpha^2\left(1 + \frac{2}{45}\alpha^4 + \ldots\right)} - \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{2}{15}\alpha^4 + \ldots\right)\left(1 - \frac{2}{45}\alpha^4 + \ldots\right) - \frac{1}{\alpha} = \frac{4}{45}\,\alpha^3 + \mathcal{O}(\alpha^5)\,.\end{aligned}$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{2} \lim_{a\to 0} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^4 \frac{1}{\alpha^3} \left\{ \frac{4}{45}\,\alpha^3 + \mathcal{O}(\alpha^5) \right\} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

Wykorzystując uzyskany wzór możemy napisać

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{16}\,\frac{\pi^4}{90} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}\,,$$

co pozwala napisać wzory na szeregi odwrotnych czwartych potęg nieparzystych i parzystych liczb naturalnych:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{90}-\frac{1}{16}\frac{\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{96}\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{90}-\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{1440}\,.$$

A stąd już bez skomplikowanego całkowania przez residua mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=-\frac{\pi^4}{90}+\frac{1}{16}\frac{\pi^4}{90}+\frac{\pi^4}{90}-\frac{\pi^4}{96}=-\frac{7\pi^4}{720}\,.$$

Zadanie
Udowodnić wzorek Langevine'a

$$\sin\theta=\theta\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\theta^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Rozwiązanie: Wzorek ten, jeśli prawdziwy, jest przedłużeniem analitycznym ($\theta\to ix$) wzoru

$$\frac{\mathrm{sh}x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Logarytmują powyższy związek stronami mamy

$$\ln\left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right)=\sum_{n=1}\ln\left(\frac{x^2+n^2\pi^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Obliczając następnie pochodne po x obu stron otrzymujemy związek

$$\mathrm{cth}x-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}=\frac{2x}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+(x/\pi)^2}\,.$$

Wykorzystując znaleziony już wzór na sumę szeregu $1/(n^2+a^2)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\,\mathrm{cth}(\pi a)-\frac{1}{a^2}\right),$$

widzimy, że ($a=x/\pi$) prawa strona tego związku jest równa

$$\frac{2x}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+(x/\pi)^2}=\frac{2x}{\pi^2}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{x}\,\mathrm{cth}x-\frac{\pi^2}{x^2}\right)=\mathrm{cth}x-\frac{1}{x}\,.$$

c.b.d.o.

Fizycznie ciekawe zastosowanie sumowania szeregów
Energia skwantowanego pola elektromagnetycznego zamkniętego między odległymi od siebie o d dwiema metalowymi płytkami o powierzchni $L \times L$ każda (równoległymi do płaszczyzny xy) jest dana wzorem[22]

$$E_{\rm bc} = \frac{\hbar c}{2}\frac{L^2}{(2\pi)^2}\int d^2\mathbf{k}_\parallel \left\{|\mathbf{k}_\parallel| + 2\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 + l^2\frac{\pi^2}{d^2}}\right\}.$$

Jak zwykle, w kierunkach x i y na pole zostały nałożone periodyczne warunki brzegowe, a w kierunku osi z narzucony został warunek znikania na metalowych płytkach składowej pola elektrycznego równoległej do płytek. Ponadto w powyższym wzorze, zakładając, że $L \gg d$ zastąpiliśmy sumowanie po dyskretnym zbiorze całkowaniem zgodnie ze znaną regułą

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \to \frac{L^2}{(2\pi)^2}\int d^2\mathbf{k}_\parallel\,.$$

Energię tę należy porównać z zawartą także w objętości L^2d energią pola elektromagnetycznego skwantowanego z periodycznymi warunkami we wszystkich kierunkach w pudełku o wymiarach $L \times L \times L$. Wynosi ona

$$E_{\rm per} = \frac{L^2 d}{L^3}\cdot\frac{\hbar c}{2}\frac{L^3}{(2\pi)^3}\cdot 2\int d^2\mathbf{k}_\parallel dk_\perp\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 + k_\perp^2}\,.$$

Mierzalna jest tylko różnica tych dwu energii. Jej zależność od odległości d płytek prowadzi do powstania przyciągającej płytki do siebie siły Casimira.

Zwykle w podręcznikach różnicę tych energii oblicza się następująco. Pisze się formalnie $k_\perp$ jako $l(\pi/d)$ i całkuje[23] po dl zamiast po $dk_\perp$, co daje

$$\Delta E = \frac{\hbar c L^2}{(2\pi)^2}\int d^2\mathbf{k}_\parallel\left\{\frac{1}{2}|\mathbf{k}_\parallel| + \sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 + l^2\frac{\pi^2}{d^2}} - \int_0^\infty dl\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 + l^2\frac{\pi^2}{d^2}}\right\}.$$

Następnie wprowadza się obcięcia ultrafioletowe regularyzujące oba wyrażenia (przy czym nie zawsze nawet jest jasno powiedziane, że z powodów fizycznych różnica musi być skończona i że rzeczywiście jest skończona) wprowadzając funkcję $f(\omega)$ taką, że $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = 0$ i $f(\omega) \to 0$ dla $\omega \to \infty$. Zamieniając odpowiednio zmienną całkowania ($\mathbf{k}_\parallel^2 = (\pi/d)^2 u$) różnicę energii zapisuje się w postaci

$$\frac{\Delta E}{L^2} = \frac{\pi^2\hbar c}{4d^3}\left\{\frac{1}{2}F(0) + F(1) + F(2) + \ldots - \int_0^\infty dl\, F(l)\right\}\ ,$$

[22] Wzór może nie jest od razu oczywisty, ale nie chodzi tu o jego wyprowadzenie, które można zapewne znaleźć w różnych książkach (a na pewno w tajnej części mojego zbioru problemów z kwantowej teorii pola).

[23] Korzystając z $\int_{-\infty}^{\infty} dl = 2\int_0^\infty dl$.

w której

$$F(l) \equiv \int_0^\infty du\, \sqrt{u+l^2}\, f\Big(\frac{\pi}{d}\sqrt{u+l^2}\Big) = -2\int_{+\infty}^{l} d\xi\, \xi^2\, f\Big(\frac{\pi}{d}\xi\Big)\,.$$

Końcowy wynik otrzymuje się stosując formułę sumacyjną Eulera-McLaurina

$$\frac{1}{2}F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty dn\, F(n) = -\frac{1}{2!}\, B_2 F'(0) - \frac{1}{4!}\, B_4 F'''(0) + \dots$$

w której B_i są lilczbami Bernoulliego: $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$. Wykorzystując to, że $F'''(0) = -4$ i że wszystkie dalsze pochodne $F^{(n)}(0)$ o $n \geq 3$ znikają, otrzymuje się standardowy wynik:

$$\frac{\Delta E}{L^2} = \frac{\pi^2\hbar c}{4d^3}\frac{1}{3!}B_4\,,$$

dający jako siłę Casimira na jednostkę powierzchni

$$\frac{F}{L^2} = -\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{\Delta E}{L^2}\right) = B_4\frac{\pi^2\hbar c}{8d^4} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240 d^4}\,.$$

Podejście to nie jest satysfakcjonujące, gdyż regularyzująca funkcja f o wymaganych właściwościach musi być nieanalityczna, a formuła Eulera-McLaurina stosuje się chyba tylko do funkcji analitycznych.

Na szczęście istnieje lepsza metoda uzyskania tego samego wyniku,[24] która nie opiera się na wzorze Eulera-McLaurina i jasno pokazuje, że różnica energii jest skończona. W metodzie tej nieskończone sumowania wykonuje się jawnie korzystając z techniki Matsubary (która jest po prostu sposobem przerobienia sumy na całkę) W tym celu zapisujemy najpierw wzór na $E_{\rm bc}$ w postaci

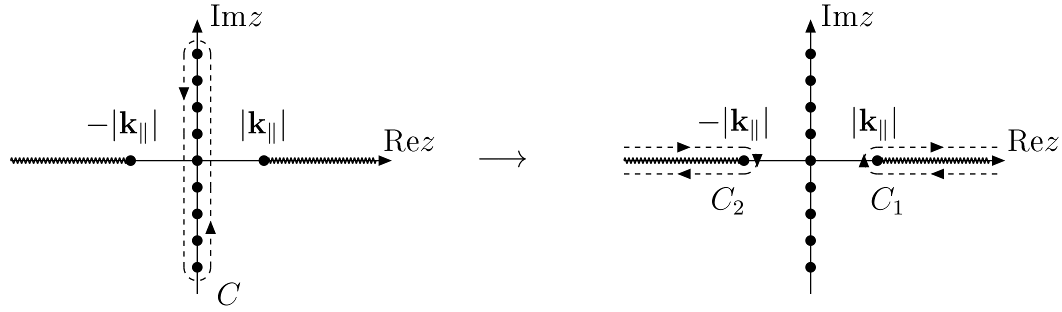
$$E_{\rm bc} = \frac{\hbar c}{2}\frac{L^2}{(2\pi)^2}\int d^2\mathbf{k}_\parallel \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 + \Big(\frac{\pi}{d}\,l\Big)^2}\,.$$

Podobnie energię $E_{\rm per}$ zapisujemy jako sumę (nie przechodząc do całkowania po z-owych składowych wektora falowego)

$$E_{\rm per} = \frac{\hbar c}{2}\frac{L^2}{(2\pi)^2}\,\frac{d}{L}\cdot 2\int d^2\mathbf{k}_\parallel \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 + \left(\frac{2\pi}{L}\,l\right)^2}\,,$$

(ponieważ pole jest tu skwantowane w pudełku o wymiarach $L\times L\times L$, uwzględniliśmy tu tak jak poprzednio czynnik d/L, aby wziąć pod uwagę tylko energię pola zawartą w objętości $L^2 d$).

[24] L. Pálová, P. Chandra & P. Coleman, *Am. J. Phys.* **77** (2009), 1055.



Rysunek 19: Deformacja konturu całkowania. Kropki pokazują położenia biegunów, a linie faliste pokazują cięcia.

Aby wykonać sumowania korzystamy teraz ze wzoru (słusznego dla funkcji $f(z)$ nie mającej osobliwości na osi urojonej)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C dz\,\frac{\beta}{e^{\beta z}-1}\,f(z)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(z_l)\,,$$

w którym $z_l = i\,(2\pi/\beta)\,l$. Kontur całkowania C jest pokazany linią przerywaną w lewej części wysunku 19. W naszym przypadku

$$f(z)=\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 - z^2}\,,$$

tak iż funkcja podcałkowa ma bieguny proste na osi urojonej oraz dwa cięcia, które wybieramy tak, by biegły od punktów $z=|\mathbf{k}_\parallel|$ oraz $z=-|\mathbf{k}_\parallel|$ odpowiednio do $+\infty$ i $-\infty$ wzdłuż osi rzeczywistej.

Różnica energii może zatem być zapisana w postaci

$$\frac{\Delta E}{L^2}=\frac{\hbar c}{(2\pi)^2}\,d\int d^2\mathbf{k}_\parallel\int_C\frac{dz}{2\pi i}\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2-z^2}\left(\frac{1}{e^{\beta_d z}-1}-\frac{1}{e^{\beta_L z}-1}\right),$$

gdzie $\beta_d \equiv 2d$, a $\beta_L \equiv L$. Kontur całkowania C można zdeformować do konturu składającego się z dwu segmentów C_1 i C_2 pokazanych w prawej części rysunku 19 oraz czterech (nienarysowanych) ćwiartek dużego okręgu o promieniu R. Dzięki temu, że obliczamy *różnicę* energii, całki po dz po ćwiartkach tego okręgu znikają, gdy $R\to\infty$. Otrzymujemy wtedy

$$\int_C\frac{dz}{2\pi i}\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2-z^2}\left(\frac{1}{e^{\beta_d z}-1}-\frac{1}{e^{\beta_L z}-1}\right)$$
$$=\left(\int_{-\infty}^{-|\mathbf{k}_\parallel|}+\int_{|\mathbf{k}_\parallel|}^{\infty}\right)\frac{dx}{2\pi i}\left(-2i\sqrt{x^2-\mathbf{k}_\parallel^2}\,\mathrm{sgn}(x)\right)\left(\frac{1}{e^{\beta_d x}-1}-\frac{1}{e^{\beta_L x}-1}\right),$$

gdzie $-2i\sqrt{x^2-\mathbf{k}_\parallel^2}\,\mathrm{sgn}(x)$ jest nieciągłością funkcji $\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2-z^2}$ wzdłuż cięć.[25] Ponieważ nieciągłość ta jest funkcją nieparzystą x, a całka jest brana w symetrycznych granicach,

[25]Dla Re$z>0$ przedłużamy analitycznie funkcję $\sqrt{a^2-z^2}$ od $z=x_0<a$ ($a\equiv|\mathbf{k}_\parallel|$), gdzie funkcja

czynniki $1/(e^{\beta x}-1)$ można zastąpić ich częściami nieparzystymi

$$\frac{1}{e^{\beta x}-1} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\beta x}-1} - \frac{1}{e^{-\beta x}-1}\right) = \frac{1}{e^{\beta x}-1} + \frac{1}{2}\,.$$

Znoẃ dzięki temu, że obliczamy różnicę energii, czynniki $1/2$, które czyniłyby każdą z całek branych z osobna niezbieżną, redukują się. Tak więc

$$\int_C \frac{dz}{2\pi i}\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 - z^2}\left(\frac{1}{e^{\beta_d z}-1} - \frac{1}{e^{\beta_L z}-1}\right)$$
$$= -\frac{2}{\pi}\int_{|\mathbf{k}_\parallel|}^{\infty} dx\,\sqrt{x^2 - \mathbf{k}_\parallel^2}\left(\frac{1}{e^{\beta_d x}-1} - \frac{1}{e^{\beta_L x}-1}\right).$$

W granicy $L \to \infty$, tj. $\beta_L \to \infty$, ta część całki, w której występuje czynnik β_L dąży do zera i otrzymujemy

$$\frac{\Delta E}{L^2} = -\frac{2}{\pi}\frac{\hbar c}{(2\pi)^2}\,d\int d^2\mathbf{k}_\parallel \int_{|\mathbf{k}_\parallel|}^{\infty} dx\,\sqrt{x^2 - \mathbf{k}_\parallel^2}\,\frac{1}{e^{\beta_d x}-1}\,.$$
$$= -\frac{2}{\pi}\frac{\hbar c}{2\pi}\,d\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^{\beta_d x}-1}\int_0^x d\xi\,\xi\sqrt{x^2-\xi^2}\,.$$

W drugim kroku został tu zamieniony porządek wykonywania całek; poza tym wprowadzone zostało oznaczenie $\xi \equiv |\mathbf{k}_\parallel|$. Wewnętrzna całka jest elementarna i otrzymujemy

$$\frac{\Delta E}{L^2} = -\frac{2}{\pi}\frac{\hbar c}{2\pi}\frac{d}{3}\int_0^{\infty}\frac{dx\,x^3}{e^{\beta_d x}-1}\,.$$

Ponieważ $\beta = 2d$, po przeskalowaniu zmiennej całkowania daje to

$$\frac{\Delta E}{L^2} = -\frac{2}{\pi}\frac{\hbar c}{2\pi}\frac{1}{48d^3}\int_0^{\infty}\frac{dx\,x^3}{e^{x}-1}\,.$$

Pozostała całka ("całka statystyczka" - ci, co studiowali fizykę statystyczną wiedzą dlaczego taka jej nazwa) wynosi $\pi^4/15$ i otrzymujemy zatem ten sam wynik, co poprzednio.

---

ta przyjmuje wartości rzeczywiste dodatnie do $z = x + i0$, gdzie $x > a$ wzdłuż drogi leżącej w górnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej z, pisząc $z = a - re^{-i\theta}$ (z odpowiednim r, które może się zmieniać z θ) i zmieniając θ od 0 do π:

$$\sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{(z+a)r}\,e^{-\frac{i}{2}\theta} \to (\theta \to \pi) \to -i\sqrt{x^2 - a^2}\,.$$

Przedłużając zaś $\sqrt{a^2 - z^2}$ do $z = x - i0$, gdzie $x > a$ zmieniamy θ od 0 do $-\pi$, otrzymując $+i\sqrt{x^2 - a^2}$. Podobnie, gdy $\mathrm{Re}z < 0$ przedłużamy analitycznie funkcję od $z = x_0 > -a$ do $z = x + i0$ gdzie $x < -a$ pisząc $z = -a + re^{i\theta}$ i zmieniając θ od 0 do π:

$$\sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{(z-a)r}\,e^{-\frac{i}{2}\theta} \to (\theta \to \pi) \to +i\sqrt{x^2 - a^2}\,.$$

Analogicznie, aby przedłużyć do $z = x - i0$ gdzie $x < -a$, zmieniamy θ od 0 do $-\pi$; rezultatem jest $-i\sqrt{x^2 - a^2}$.