Szeregi

Przypomnienie: Gdy chodzi o szeregi nieskończone

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \qquad \text{lub} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,,$$

zasadniczym pytaniem, jakie sobie stawiamy (albo nam na kolokwium stawiają...) jest zwane z niemiecka die Entscheidungsfrage, czyli pytanie: czy szereg jest zbieżny?, na które odpowiedź może być tylko TAK lub NIE.

Niby pytanie jest oczywiste, ale żeby nie było żadnych niejasności, zostało przez sprytnych matematyków sprowadzone do pytania o zbieżność odpowiedniego ciągu (a zbieżność lub niezbieżność ciągu jest czymś, co do czego nie może już być wątpliwości - zbieżność ciągów jest ujęta ścisłą definicją). Mianowicie każdemu szeregowi odpowiada ciąg $s_n(a)$ jego sum cząstkowych tworzony według przepisu (tu dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że szereg jest sumowany od jedynki)

$$s_n(a) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

Ponieważ każdy z wyrazów tego ciągu jest dany *skończoną* sumą, są one zawsze dobrze zdefiniowane.[1] Mając nieskończony ciąg $s_n(a)$, można badać jego zbieżność metodami, o których zapewne było w pierwszym semestrze. *Z definicji* nieskończony szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny (co krótko będziemy pisać: ZB), gdy zbieżny jest ciąg $s_n(a)$ jego sum cząstkowych. Granicę $g(a)$ ciągu $s_n(a)$ sum cząstkowych nieskończonego szeregu $\sum_n a_n$ utożsamiamy z sumą tego szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = g(a)\,, \qquad \text{gdy} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n(a) = g(a)\,.$$

Jeśli zaś ciąg $s_n(a)$ sum cząstkowych nieskończonego szeregu $\sum_n a_n$ nie jest zbieżny (nie istnieje jego granica w sensie granicy ciągu), wtedy uznajemy, że *z definicji* szereg też nie jest zbieżny, co krótko zaznaczamy literkami NZB.

W przypadku szeregów, których wyrazy nie są wszystkie dodatnie (ściślej: których wyrazy dodatnie i ujemne tworzą przeliczalnie, ale nieskończone zbiory), odpowiedź TAK (czyli że szereg jest zbieżny) można trochę zniuansować i wyróżnić szeregi bezwzględnie zbieżne (oznaczamy je BZB)[2] i szeregi tylko warunkowo zbieżne (WZB). Mianowicie, szereg zbieżny $\sum_n a_n$ jest BZB, gdy zbieżny jest też szereg $\sum_n |a_n|$ (z modułami); gdy szereg z modułami nie jest zbieżny (ale szereg bez modułów jest ZB), mówimy, że $\sum_n a_n$

[1] Rozpatrując szeregi czyni się zawsze ukryte założenie, że żaden z wyrazów a_k szeregu nie jest sam z siebie nieskończony.

[2] Oczywiście jeśli wyrazy - wszystkie, lub prawie wszystkie - szeregu nieskończonego są nieujemne, $a_n \geq 0$, wtedy taki szereg, jeśli jest ZB, to jest i BZB - w tym przypadku podział na BZB i WZB nie jest potrzebny.

jest WZB. Rozróżnienie nie jest tylko kwestią dzielenia przez matematyków włosa na czworo: tylko szeregi BZB są grzeczne i nie robią żadnych hopsztosów. Z tymi drugimi trzeba uważać!

Z definicji zbieżności szeregu wynika natychmiast warunek konieczny (zwany przez mnie z łacińska SQN - sine qua non) zbieżności: aby szereg mógł być zbieżny (co nie znaczy jeszcze, że jest!) musi zachodzić

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,,$$

(czyli, słowami, wyraz ogólny a_n szeregu musi zbiegać do zera). Dowód konieczności tego warunku jest oczywisty;

$$a_n = s_n(a) - s_{n-1}(a)\,,$$

a żeby szereg był zbieżny, musi być zbieżny ciąg sum cząstkowych tego szeregu, co oznacza, że $s_n \to g$ oraz $s_{n-1} \to g$, więc $|s_n - s_{n-1}| \to 0$. Należy wyrobić sobie odruch sprawdzania w każdym przypadku, czy rozpatrywany szereg spełnia warunek SQN; może to nam oszczędzić bezsensownej szamotaniny.

Ważną obserwacją jest też to, że dla kwestii ZB/NZB ważne jest zachowanie tylko *prawie wszystkich* wyrazów szeregu. Przekładając to na ludzkie, chodzi o to, że jeśli z jakichś powodów przy analizie zbieżności danego szeregu bruździ nam skończona (choćby nie wiem jak wielka) liczba jego wyrazów, to można się tymi wyrazami nie zajmować. Niech bowiem wyrazy szeregu zachowują się jakoś "grzecznie" poczynając od pewnego n_0 (które może być równe liczbie ziaren piasku na Saharze). Możemy wtedy napisać

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \left(\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,,$$

gdzie $b_k \equiv a_{k+n_0-1}$. Suma w nawiasie jest skończona i jest jasne,[3] że nieskończony szereg po lewej jest zbieżny, jeśli zbieżny jest nieskończony szereg $\sum_n b_n$ po prawej stronie.

Jednym z podstawowych sposobów decydowania, czy rozpatrywany szereg *o wyrazach nieujemnych* jest ZB, czy NZB, jest **kryterium porównawcze**, mówiące, że jeśli mamy dwa nieskończone szeregi: $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ i dla każdego n zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$, to

- jeśli szereg $\sum_n b_n$ jest ZB, to szereg $\sum_n a_n$ też jest ZB,
- jeśli szereg $\sum_n a_n$ jest NZB, to szereg $\sum_n b_n$ też jest NZB.

W pierwszym przypadku (gdy oba szeregi są ZB) można jeszcze powiedzieć, że $g(a) \leq g(b)$. W kryterium tym warunek $a_n \leq b_n$ dla każdego n można osłabić i żądać tylko, by, nierówność ta zachodziła dla wszystkich n ale dopiero poczynając od pewnego n_0; podane

[3] Oczywiście zawodowy matematyk by ten argument jeszcze uściślił formułując go przez ciągi sum cząstkowych, ale my jesteśmy fizykami.

wyżej wnioski co do zbieżności pozostają przy tym niezmienione, ale w oczywisty sposób nie można wtedy kategorycznie twierdzić, że gdy oba szeregi są ZB, to $g(a) \leq g(b)$.

Kryterium to jest tym użyteczniejsze, im więcej mamy szeregów, o których na bank wiemy, że są ZB lub że są NZB. Dlatego pierwszym krokiem naszego zajmowania się szeregami jest rozstrzygnięcie die Entscheidungsfrage w przypadku kilku szeregów, które odtąd będą "etałonnymi", znaczy się wzorcowymi.

Szereg o $a_n = 1/n$, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

zwany gdzieniegdzie szeregiem harmonicznym,[4] jest niezbieżny.

Pokażemy to na dwa sposoby. Sposób pierwszy (wprawdzie szereg ten był na wykładzie - pamietam, że siedział w pierwszej ławce - ale nie wszyscy studenci byli...). Obliczamy różnicę wyrazów $2n$-tego i n-tego jego ciągu sum cząstkowych i szacujemy ją od dołu (różnica ta ma n składników):

$$s_{2n}(a) - s_n(a) = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Gdyby jednak ciąg sum cząstkowych był (jako ciąg) zbieżny, zachodziłoby $s_{2n}(a) \to g$ i $s_n(a) \to g$ i różnica po lewej stronie zbiegałaby do zera. Tu jednak tak nie może być, bo różnica ta jest zawsze większa od 1/2. Ergo, szereg harmoniczny jest NZB.

Inny dowód niezbieżności szeregu harmonicznego polega na zauważeniu, że[5]

$$e^x \geq 1 + x, \qquad \text{czyli} \qquad x \geq \ln(1+x).$$

Stosujemy drugą formę tej nierówności do każdego z n składników n-tego wyrazu $s_n(a)$ ciągu sum cząstkowych szeregu harmonicznego

$$s_n(a) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} > \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n}.$$

Widać, że po prawej stronie po zastąpieniu (skończonej) sumy logarytmów logarytmem iloczynu czynników podlogarytmowych dostanie się $\ln(n+1)$. Zatem $s_n(a) > \ln(n+1)$,

[4] Jakby się ktoś pytał czemu ("Emu, tak nazywa się pewien gatunek strusi. Czemu? Widocznie musi." - St, Barańczak), to nazywa się on tak dlatego, że wyraz a_n jest średnią harmoniczną wyrazów a_{n-1} i a_{n+1} (a nawet wyrazów $a_{n-k}, \ldots, a_{n-1}$ i $a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}$). Średnia harmoniczna $\bar{b}$ liczb $b_1, \ldots, b_n$ jest zdefiniowana wzorem

$$\frac{1}{\bar{b}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right).$$

[5] Nierówność ta jest w $x = 0$ równością, ale pochodna $1 + x$ jest stała i równa 1, a pochodna e^x jest równa e^x więc jest stale większa niż 1 i rośnie; z tego wynika, że lewa strona jako funkcja x rośnie zawsze szybciej niż prawa strona.

więc w oczywisty sposób ciąg $s_n(a)$ sum cząstskowych szeregu harmonicznego rozbiega do nieskończoności, bo

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty\,.$$

Tymi samymi sposobami można wykazać że niezbieżny jest szereg $\sum_n (a/n)$ z dowolną stałą $a \neq 0$.

Zbadajmy, czy zbieżny jest nieskończony szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right).$$

Widać, ze $a_n \to 0$, bo przy $n \gg 1$ pierwiastki się w dużej mierze kasują i ich różnica staje się maciuciuciupeńka, czyli warunek SQN jest spełniony. Ale to jest tylko warunek konieczny. Możemy przekształcić a_n uciekając się do starej sztuczki $\sqrt{a} - \sqrt{b} = (a-b)/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, by zobaczyć, że

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}\,.$$

Teraz już nic się nie kasuje. Na "czuja" mianownik przy $n \gg 1$ zachowuje się jak αn z jakimś[6] $\alpha > 0$, więc szereg jest podobny do niezbieżnego szeregu harmonicznego i sam zatem też jest NZB.

Inny przykład: nieskończony szereg o $a_n = (-1)^n$, czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots,$$

Jest niezbieżny. Po pierwsze - i to załatwia sprawę - nie spełnia on warunku SQN: wyraz ogólny $a_n = (-1)^n$ nie zbiega do zera. Jakby komuś tego było mało, to kolejnymi wyrazami ciągu $s_n(a)$ sum cząstkowych tego szeregu są

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 0, \quad \text{etc.}$$

Jest jasne, że ciąg $s_n(a)$ nie zbiega do żadnej granicy.

Jeszcze inny przykład: szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}\,,$$

jest ZB. Można to wykazać znajdując jawnie wzór na n-ty wyraz ciągu s_n sum cząstkowych tego szeregu.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\,.$$

[6] Z "grubej rury waląc" można położyć $\alpha = 3$, tzn. $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1} < 3n$ więc $a_n > 2/3n$. Jak ktoś chce być bardziej subtelny, to może sprawdzić, że szacowanie jest słuszne nawet z $\alpha = 2$.

Rozłożyliśmy tu wyraz a_k szeregu na ułamki proste (względem zmiennej k), a następnie rozdzieliliśmy sumę na dwie sumy; ta ostatnia operacja jest dozwolona, bo suma jest skończona (na tym właśnie polega chytra myśl matematyków z tym ciągiem sum cząstkowych - takich operacji, polegających na sumowaniu osobno parzystych i osobno nieparzystych wyrazów szeregu, nie wolno robić na nieskończonych sumach dopóki nie wiadomo, czy suma jest zbieżna). Idziemy dalej: z pierwszej sumy wydzielamy jawnie pierwszy wyraz (równy 1), a w jej pozostałych wyrazach podstawiamy $k = k' + 1$; suma po k' biegnie więc od 1 do $n - 1$. Z kolei z drugiej sumy wydzielamy jawnie ostatni wyraz (równy $1/(n+1)$). W ten sposób otrzymujemy

$$s_n = 1 + \sum_{k'=1}^{n-1} \frac{1}{k'+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} \, .$$

Zauważamy wreszcie, że dwie (skończone) sumy: ta po k' i ta po k są sobie równe (w końcu to nieważne jakiej literki używamy do zapisu, k', czy k !). Tak więc udało się jawnie obliczyć n-ty wyraz ciągu sum cząstkowych:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n} \, .$$

Jest jasne teraz że ciąg sum cząstkowych jest zbieżny

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1 \, ,$$

czyli, zgodnie z definicją, badany szereg jest ZB i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1 \, .$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \, ,$$

jest ZB. Aby to wykazać odwołujemy się do kryterium porównawczego podanego wyżej. Jest bowiem oczywiste, że

$$a_n \equiv \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\,n} \equiv b_n \, ,$$

a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} \, ,$$

Ponieważ wyżej już wykazaliśmy, iż szereg $\sum_n b_n$ jest ZB, więc na mocy kryterium porównawczego zbieżny jest też szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

a więc ZB jest też szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

różniący się od tego wyżej o jeden wyraz (równy 1).

Możemy teraz jeszcze raz odwołać się do kryterium porównawczego i korzystając z oczywistych nierówności

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}, &\qquad \text{gdy} \quad \alpha \geq 2, \\ \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}, &\qquad \text{gdy} \quad \alpha \leq 1, \end{aligned}$$

powiedzieć, że nieskończony szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

jest ZB, gdy $\alpha \geq 2$ i NZB, jeśli $\alpha \leq 1$. Na razie jednak na podstawie kryterium porównawczego nie umiemy jeszcze powiedzieć, jaki ma charakter taki szereg, gdy $1 < \alpha < 2$.

Innym ważnym "etałonnym" szeregiem, o którym wiemy wszystko jest znany ze szkoły szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\, q^n .$$

Wiemy o nim wszystko, bo umiemy (kiedyś to było w szkole) obliczyć n-ty wyraz ciągu s_n sum cząstkowych tego szeregu. Istotnie, dowodzi się,[7]

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a\, q^k = a\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) = a\, \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

[7] Oczywiście indukcyjnie: prawdziwość wzoru

$$(1 - q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = 1 - q^{n+1},$$

łatwo sprawdzić dla $n = 0$ (obie strony równe $1-q$), $n = 1$: $(1-q)(1+q) = 1-q^2$, $n = 2$: $(1-q)(1+q+q^2) = 1 - q^3$. Indukcja:

$$\begin{aligned} (1 - q)(1 + q + \ldots q^n + q^{n+1}) &= (1 - q)(1 + q + \ldots q^n) + (1 - q)q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1} = 1 - q^{n+2}. \end{aligned}$$

Wątpliwości co do potęgi q w prawej stronie wzoru najłatwiej rozwiać zauważając, że lewa strona jest w q wielomianem stopnia q^n więc taka powinna być najwyższa potęga q po prawej stronie.

Jest wiec jasne, że gdy $|q| < 1$, ciąg s_n jest zbieżny (bo $q^{n+1} \to 0$), i niezbieżny, gdy $|q| \geq 1$. Zatem, gdy $|q| < 1$ szereg geometryczny jest ZB (i to BZB, bo $|a\,q^n| = |a|\,|q|^n$) i

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\,q^n = a\,\frac{1}{1-q}\,,$$

i NZB, gdy $|q| \geq 1$.

Wykażemy jeszcze różnymi sposobami zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,q^n\,, \qquad |q| < 1\,.$$

Jeden polega na napisaniu

$$s_{n+1} - s_n = (n+2)\,q^{n+1}\,,$$

i zauważeniu, że

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + (n+2)q^{n+1} \\ &= 1 + q + \ldots + q^{n+1} + q\left(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + (n+1)q^n\right) \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} + q\,s_n\,. \end{aligned}$$

Razem mamy więc układ dwóch liniowych równań na s_{n+1} i s_n:

$$\begin{aligned} s_{n+1} - \quad s_n &= (n+2)\,q^{n+1}\,, \\ s_{n+1} - q\,s_n &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\,. \end{aligned}$$

Rozwiązując je ze względu na s_n, znajdujemy jawnie ogólną postać

$$s_n = \frac{1-q^{n+2}}{(1-q)^2} - \frac{(n+2)\,q^{n+1}}{1-q}\,.$$

ciągu sum cząstkowych badanego szeregu. Jeśli udowodnimy, co zaraz zrobimy, że drugi wyraz dąży do zera, gdy $|q| < 1$, wykażemy, że przy tym samym założeniu, $s_n \to 1/(1-q)^2$, czyli że rozpatrywany szereg jest ZB i

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,q^n = \frac{1}{(1-q)^2}\,.$$

Drugi sposób wykazania, że rozpatrywany szereg jest zbieżny opiera się na sztuczce:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)\,q^k = \frac{d}{dq}\left(q\sum_{k=0}^{n} q^k\right) = \frac{d}{dq}\left(\frac{q-q^{n+2}}{1-q}\right).$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy, że

$$s_n = \frac{1-(n+2)\,q^{n+1}}{1-q} + \frac{q\,(1-q^{n+1})}{(1-q)^2}\,,$$

co jest oczywiście tym samym wzorem, co uzyskany wyżej w wyniku rozwiązania układu równań.

Pozostaje tylko pokazać, że[8]

$$\lim_{n\to\infty}(c_n) = \lim_{n\to\infty}(n\,q^n) = 0\,, \qquad \text{gdy} \quad |q| < 1\,.$$

Sprawdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)|q|\,,$$

czyli, jeśli tylko $|q| < 1$, zawsze istnieje jakieś n_0, poczynając od którego $|c_{n+1}/c_n| < 1$, i od tego n_0 ciąg $|c_n|$ jest już ciągiem malejącym. Ciąg ten jest jednak ograniczony od dołu zerem i z tego powodu jest zbieżny. Gdyby jednak zbiegał do $g > 0$, to iloraz $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ musiałby był zbiegać do $g/g = 1$ a nie do $|q| < 1$ (tylko, gdy $g = 0$ iloraz g/g może dać coś różnego od 1). Ergo, ciąg $|c_n|$, więc i ciąg c_n, zbiega do zera.[9] W analogiczny sposób dowodzimy, że $k^\alpha q^n \to 0$, jeśli tylko $|q| < 1$, a α jest skończoną liczbą.

Oczywiście jeśli już wiemy, albośmy się skądeś dowiedzieli, że szereg jest zbieżny (albo w ogóle nie przejmujemy się gęganiami matematyków), to sumę szeregu znajdujemy pisząc po prostu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = \frac{d}{dq}\left(q\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right) = \frac{d}{dq}\,\frac{q}{1-q} = \frac{d}{dq}\left(-1+\frac{1}{1-q}\right) = \frac{1}{(1-q)^2}\,.$$

Zajmiemy się teraz zatkaniem dziury pomiędzy $\alpha > 1$, a $\alpha < 2$ w naszej wiedzy o szeregach $\sum_n(1/n^\alpha)$. Pokażemy, że w całej tej dziurze szereg jest zbieżny. Zaczynamy od oczywistej nierówności[10]

$$n+1 < 2^{n+1}\,,$$

[8] Jeśli to pokażemy, to oczywiście tym samym pokażemy, że i $(n+1)q^{n+2}$ i różne podobne kawałki dążą do zera.

[9] Bardziej fizyczny sposób pokazania tego polega na napisaniu

$$|c_n| = \exp(n\ln|q| + \ln n) = \exp\left\{-n\left(\ln\frac{1}{|q|} - \frac{1}{n}\ln n\right)\right\}.$$

Wyrażenie w wewnętrznym nawiasie jest dodatnie, jeśli $|q| < 1$ i dąży do $\ln(1/|q|)$. Wtedy czynnik $-n$ dusi eksponens do zera w granicy $n \to \infty$. Nie jest to dla matematyka ścisłe rozumowanie, ale fizykowi wystarcza.

[10] Jak zwykle indukcja. Nierówność $n < 2^n$ jest słuszna, gdy $n = 0$, $n = 1$ itd. Ponadto, $n+1 < 2^n+1$ (po oszacowaniu n z założenia indykcyjnego) $< 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Można też porównać rośnięcie funkcji 2^x i x.

którą napiszemy sobie w formie $n < 2^{n+1} - 1$. Ponieważ ciąg s_n sum cząstkowych szeregu $\sum_n (1/n^\alpha)$ jest na bank rosnący, zachodzi zgodnie z tym co wyżej, nierówność

$$s_n < s_{2^{n+1}-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \ldots + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}\right).$$

Kolejne nawiasy zawierają 2, 2^2, ... 2^n składników. Szacując z góry każdy składnik przez największy w danym nawiasie, czyli pierwszy, mamy

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}-1} &< 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2^{2\alpha}} + \ldots + \frac{1}{2^{2\alpha}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n\alpha}} + \ldots + \frac{1}{2^{n\alpha}}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{2}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{2^2}{2^{2\alpha}}\right) + \ldots + \left(\frac{2^n}{2^{n\alpha}}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{2(\alpha-1)}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n(\alpha-1)}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k. \end{aligned}$$

Staje się więc jasne, że (szereg geometryczny!)

$$s_{2^{n+1}-1} < \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad \text{gdzie} \quad q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}.$$

Jeśli $\alpha > 1$, czyli gdy $q < 1$, prawa strona dąży przy $n \to \infty$ do skończonej granicy. Zatem wyraz $s_{2^{n+1}-1}$ jest ograniczony od góry, ograniczając tym samym także od góry wyraz s_n, który przecież był mniejszy. A że ciąg s_n jest, jak już powiedzieliśmy, rosnący, to będąc ograniczonym z góry, musi być zbieżny. Stąd mamy wreszcie kompletny wynik (wykorzystując to, co już wcześniej ustaliliśmy)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{ZB}, & \text{gdy} \quad \alpha > 1 \\ \text{NZB}, & \text{gdy} \quad \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

To co tu zrobiliśmy było w gruncie rzeczy zastosowaniem techniki zagęszczania, którą sobie dalej sformalizujemy formułując tzw. kryterium zagęszczeniowe (Cauchy'ego oczywiście).

Zbadajmy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin\left(\frac{1}{n}\right),$$

w zależności od wartości parametru α. Najpierw analiza "fizyczna": każdy wie (wiedzieć powinien!), że $\sin(\delta) \sim \delta$, gdy $|\delta| \ll 1$. Jeśli $n \gg 1$, to $\delta = 1/n$ jest właśnie malutka i zatem widzimy, że

$$a_n \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}},$$

czyli rokowania są takie, że szereg jest ZB, gdy $\alpha > 0$ i NZB, gdy $\alpha \leq 0$. Ale ten argument trzeba uściślić. Można to osiągnąć tak: wiadomo, że[11]

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\sin \delta}{\delta} = 1 .$$

W hieroglificznym języku matematyków wyraża się to mówiąc, że dla każdego[12] $\varepsilon > 0$ istnieje taka $\delta_0 > 0$, że jeśli $|\delta| < \delta_0$, to

$$\left| \frac{\sin \delta}{\delta} - 1 \right| < \varepsilon ,$$

lub, równoważnie,

$$1 - \varepsilon < \frac{\sin \delta}{\delta} < 1 + \varepsilon .$$

Wykorzystamy prawą stronę tej nierówności, by dowieść, że nasz szereg jest zbieżny, gdy $\alpha > 0$ (gdybyśmy chcieli dowodzić, że jest niezbieżny przy $\alpha \leq 0$, użylibyśmy lewej nierówności). Kładąc np. (nie będziemy zbyt subtelni) $\varepsilon = 1/2$ i $\delta = 1/n$ mamy nierówność

$$\sin \frac{1}{n} < \frac{1+\varepsilon}{n} = \frac{3}{2n} ,$$

zachodzącą od jakiegoś n_0. Mamy więc od tegoż n_0 poczynając (n_0 przy ustalonym ε jest skończone, a skończona liczba wyrazów szeregu - te co odpowiadają n-om mniejszym od n_0 - jest nieistotna dla jego zbieżności - o tym już było) szacowanie $a_n < 3/2n^{\alpha+1} = b_n$, a szereg $\sum_n b_n$ jest zgodnie z tym, co ustaliliśmy wyżej jest zbieżny, gdy $\alpha + 1 > 1$, czyli gdy $\alpha > 0$, tak jak to nam podpowiadało proste oszacowanie. Tu oczywiście zamiast bawić się w te ciupciania epsilonikowe można było z mety napisać $\sin(1/n) < 1/n$ (bo $\sin x < x$, gdy $x > 0$), i przeprowadzić to samo oszacowanie, ale chcieliśmy pokazać technikę epsilonikową, która w innych przypadkach może być użyteczniejsza. Np. jeśli chcemy pokazać, że nasz szereg nie jest zbieżny, gdy $\alpha \leq 0$, nie możemy wykorzystać powyższej oczywistej nierówności, bo daje ona oszacowanie w złą stronę (dowiedzielibyśmy się z niej, że zawsze $a_n < b_n = 2/n^{\alpha+1}$, ale przy $\alpha \leq 0$ szereg $\sum_n b_n$ jest NZB i z tego, że $a_n < b_n$ nic nie wynika dla zbieżności szeregu $\sum_n a_n$). Za to korzystając z lewej strony naszego oszacowania mamy

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \sin \frac{1}{n} > \frac{1-\varepsilon}{n^{\alpha+1}} ,$$

poczynając od pewnego n_0 i teraz już możemy odwołać się do kryterium porównawczego, by orzec, że przy $\alpha \leq 0$ badany szereg jest NZB.

Dla rozrywki rozpatrzmy szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} .$$

[11] Jak by ktoś nie pamiętał dlaczego, to dowód jest np. u Lejka.
[12] Na szczęście nie umiem robić kwantyfikatorów w LaTeXie!

Aby zbadać jego zbieżność stosujemy standardową sztuczkę $a^b = \exp(b \ln a)$:

$$(\ln n)^{\ln n} = \exp\{(\ln n) \cdot \ln(\ln n)\} = [\exp(\ln n)]^{\ln(\ln n)} = n^{\ln(\ln n)} .$$

Teraz już łatwo oszacować (nawet z grubej rury): zawsze istnieje takie[13] n_0, poczynając od którego $\ln(\ln n) > 2$. Zatem poczynajac od jakiegoś n_0

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2} = b_n ,$$

a że szereg $\sum_n b_n$ jest zbieżny, w kryterium porównawczego mamy, że badany szereg też jest ZB.

Zbadajmy też zbieżność szeregu

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} ,$$

(n_0 dostatecznie duże, żeby pod żadnym logarytmem nie wyszła liczba ujemna). Tu już po zastosowaniu standardowej sztuczki dostaniemy

$$a_n = \frac{1}{\exp[\ln(\ln n) \cdot \ln(\ln n)} = \frac{1}{e^{[\ln(\ln n)]^2}} .$$

No i co teraz? Ano możemy użyć nierówności

$$[\ln(\ln n)]^2 < \ln n ,$$

która wynika z tego, że $\ln(\ln n) < \sqrt{\ln n}$, czyli $\ln n < \exp(\sqrt{\ln n}\,)$. To zaś wynika z tego, że $x < \exp(\sqrt{x}\,)$, albo że $y^2 < \exp(y)$, co już jest mniej więcej oczywiste (interesują nas oczywiscie $x = y^2 > 1$). Zatem

$$a_n = \frac{1}{e^{[\ln(\ln n)]^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n} .$$

Ponieważ szereg $\sum_n (1/n)$ jest niezbieżny, badany szereg, jako majacy większe wyrazy, też jest NZB.

Bardzo użyteczne jest **kryterium porównawcze ilorazowe** zbieżności szeregów (stosowalne do szeregów o wyrazach dodatnich). Głosi ono, że jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g ,$$

[13] To n_0 jest bardzo duuuże: słynne twierdzenia Szymachy - zmarłego nie tak dawno profesora naszego Instytutu Fizyki Teoretycznej - głosi, że logarytm logarytmu każdej liczby x jest zerem. Jest to oczywiście twierdzenie fizyczne: np. $x =$ liczba protonów we Wszchświecie; to jest jakieś 10^{100} powiedzmy; ale $\ln\ln(10^{100}) = \ln(100\ln(10))$, a to już jest liczba mniejsza od setki, która w porównaniu z x jest właściwie niczym, niemal zerem. (Jeśli się to komuś kojarzy z pewnym ministrem, to nie moja wina).

to jeśli tylko $g > 0$ (przy czym może być tu także $g = \infty$), to jeśli szereg $\sum_n b_n$ jest NZB, to szereg $\sum_n a_n$ jest też NZB. Jeśli zaś $g < \infty$ (przy czym tu może być $g = 0$), to gdy szereg $\sum_n b_n$ jest ZB, to szereg $\sum_n a_n$ jest też ZB. Inaczej: jeśli $0 < g < \infty$, szeregi się zachowują tak samo: (nie)zbieżność jednego pociąga za sobą (nie)zbieżność drugiego. Jeśli jednak $g = 0$, to wprawdzie zbieżność $\sum b_n$ oznacza też zbieżność $\sum_n a_n$, ale niezbieżność $\sum b_n$ nie implikuje już niezbieżności $\sum_n a_n$. I podobnie: jeśli $g = \infty$, to niezbieżność $\sum_n b_n$ implikuje niezbieżność $\sum a_n$, ale zbieżność $\sum_n b_n$ już nie oznacza zbieżności $\sum a_n$. (Przeczytać 5 razy i pomyśleć dlaczego tak musi być! - to się daje zrozumieć na zdrowy chłopski rozum). Dowodzik szkicowałem na wykładzie; z grubsza sprowadza się on do zastosowania przedstawionej tu już techniki epsilonikowej. Każdy może, przynajmniej przypadek $0 < g < \infty$ sam sobie tą techniką udowodnić. (Przypadki szczególne $g = 0$ i $g = \infty$ też z tej techniki wynikają, lub raczej właśnie odpowiednie oszacowania nie dają się w tych przypadkach zastosować i stąd nie otrzymuje się implikacji).

Kryterium powyższe sprowadza np. sprawdzanie zbieżności wszystkich szeregów o wyrazach a_n postaci

$$a_n = R(n) = \frac{W_p(n)}{W_s(n)}\,,$$

gdzie $R(x)$ jest funkcją wymierną czyli, jak zaznaczone, typu wielomian względem n stopnia p przez wielomian względem n stopnia s, do problemu zbieżności szeregu $\sum_n b_n$ o $b_n = \text{const.}/n^{s-p}$, czyli sprawdzanie takich przypadków trywializuje.

Zastosujemy tytułem przykładu kryterium porównawcze ilorazowe do zbadania zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha}\,.$$

Jako szereg porównawczy weźmiemy szereg $\sum_n b_n$ o $b_n = 1/n^\beta$. Mamy wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}} = g\,.$$

Oczywiście $g = 0$, gdy $\alpha - \beta > 0$, bo ($\varepsilon = 1/n$)

$$\varepsilon^{\alpha-\beta} \ln n = -\varepsilon^{\alpha-\beta} \ln \varepsilon \to 0\,,$$

(logarytm rośnie z n wolniej niż dowolna, nawet maciupeńka dodatnia potęga n-a). Z kolei gdy $\alpha - \beta < 0$, $g = \infty$, bo

$$n^{\beta-\alpha} \ln n \to \infty\,.$$

Jeśli zatem $\alpha > 1$, co zawsze sie da zapisać jako $\alpha = 1 + \delta$ z jakimś $\delta > 0$, bierzemy $\beta = 1+\delta/2 > 1$ i mamy $g = 0$. Wtedy z wykazanej już zbieżności szeregu $\sum_n(1/n^{1+\delta/2})$ wynika zbieżność badanego szeregu. Jeśli zaś $\alpha \leq 1$, to niezbieżność badanego szeregu wynika już w sposób natychmiastowy z warunku SQN. Morał z tego jest taki, że naogół (ale tylko naogół, a nie zawsze!) $\ln n$ można, rozpatrując zbieżność szeregów, uważać za równoważny n^0 (n do zerowej potęgi, czyli właściwie 1). Trzeba jednak zachować pewną czujność bo czasem jednak to tak nie działa. Będą przykłady.

Inny, trudniejszy przykład zastosowania kryterium ilorazowego porównawczego. Szereg do zbadania to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/n}\right].$$

Aby zbadać jego zbieżność porównamy go ilorazowo z szeregiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)\,,$$

z jakaś odpowiednio dobraną funkcją $f(x)$ dażącą do 0, gdy x dąży do 0. Badamy więc iloraz a_n/b_n zastępując $1/n$ zmienną x dążącą do zera:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x)^x}{f(x)}\,.$$

Ponieważ jest to granica 0/0, użyjemy metody Szpitalnika (de l'Hospitala znaczy się) i zbadamy granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{(d/dx)\left[1 - e^{x\ln(1-x)}\right]}{f'(x)} = -\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(1-x)}\left[-\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)\right]}{f'(x)}\,.$$

To wciąż może być granica 0/0 jeśli $f'(0) = 0$ (bo wyrażenie w nawiasie kwadratowym w liczniku dąży do zera, gdy $x \to 0$) więc sobie rozwiniemy licznik w Taylora, żeby zobaczyć, jak on dąży do zera:

$$\begin{aligned} &e^{x\ln(1-x)}\left[-\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)\right] \\ &\quad= \left[1 + x\ln(1-x) + \frac{1}{2}\,x^2\ln^2(1-x) + \ldots\right]\left[-x(1+x+x^2+\ldots) - x - \frac{1}{2}\,x^2 - \ldots\right]. \end{aligned}$$

Gołym okiem widać, że pierwszy nawias kanciaty dąży do 1, a istotny jest tylko drugi nawias kanciaty i w nim pierwszy wyraz to $-2x$ (a potem są jakieś wyższe potegi x-a). Łącznie z tym minusem, co był przed wszystkim widać, że gdy $x \to 0$, czyli, gdy $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + \mathcal{O}(x^2)}{f'(x)}\,.$$

Widać więc, że gdy weźmiemy $f(x) = x^2$, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

to szereg ten będzie zbieżny, a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1\,,$$

i zgodnie z kryterium porównawczym ilorazowym szereg $\sum_n a_n$ jest ZB. Zauważmy jeszcze, że gdyby wziąć $f(x) = x$, to granicą ilorazu a_n/b_n by było $g = 0$, szereg $\sum_n b_n$ by nie był zbieżny, ale (właśnie!) jeśli $g = 0$, to z niezbieżności $\sum_n b_n$ nie wynika niezbieżność $\sum_n a_n$.

Z kryteriów porównawczych można jeszcze przytoczyć następujące (jak zwykle dotyczące szeregów o wyrazach dodatnich): jeśli poczynając od pewnego n_0 zachodzą nierówności

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}\,,$$

to jeśli szereg $\sum_n b_n$ jest zbieżny, zbieżny jest też szereg $\sum_n a_n$, jeżeli zaś szereg $\sum_n a_n$ jest niezbieżny, to niezbieżny jest także szereg $\sum_n b_n$.

Dowód tego jest bardzo prosty. Niech powyższe nierówności zachodzą już od $n_0 = 1$ (skoro o zbieżności decydują tylko prawie wszystkie wyrazy szeregu, to można sobie wyobrazić, że szeregi $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ "obcięliśmy" od przodu, usuwając z każdego skończoną liczbę wyrazów, które nie spełniały żądanej nierówności, a potem pozostawione wyrazy obu szeregów przenumerowaliśmy tak, że nierówności zachodzą już od nowego $n_0 = 1$). Piszemy więc

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}\,, \quad \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}\,, \quad \ldots \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}\,,$$

a następnie wymnażamy te nierówności stronami, otrzymując

$$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}\,, \qquad \text{czyli} \qquad a_n \le \left(\frac{a_1}{b_1}\right) b_n\,.$$

Z ostatniej nierówności i z kryterium porównawczego ilorazowego wynika już to co trzeba.

Teraz dwa ważne kryteria (już nie porównawcze[14] tylko opierające się wyłacznie na wewnętrznych właściwosciach badanego szeregu) "mistrzów francuskich" (wciąż dotyczące

[14]No, to oczywiście tylko tak powierzchownie: dowód (zob. np. Lejek), że szereg spełniający te kryteria jest zbieżny, a niespełniający - rozbieżny, wykorzystuje oczywiście jego porównanie z jakimś etałonnym szeregiem; tu chodzi jednak o to, że już nie musimy się tym sami zajmować - nie musimy wiedzieć co tam ten samochód ma pod maską, żeby nim jeździć.

tylko szeregów o wyrazach nieujemnych): **kryterium Cauchy'ego**, w którym obliczamy granicę g ze wzoru

$$g = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \,, \qquad\qquad (\textbf{Cauchy}) \,,$$

oraz **kryterium d'Alemberta**, w którym obliczamy granicę g ze wzoru

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \,, \qquad\qquad (\textbf{d'Alembert}) \,.$$

W obu przypadkach jeśli $g < 1$, szereg nieskończony $\sum_n a_n$ jest ZB, jeśli $g > 1$ to jest NZB, a jeśli $g = 1$ (często tak wychodzi...), to na dwoje babka wróżyła, czyli niema konkluzji. Oba kryteria istnieją w wersji z lim sup[15] zamiast $\lim_{n\to\infty}$ (gdy ciąg jest normalnie zbieżny, to lim sup = lim inf = $\lim_{n\to\infty}$) i z ciągu nierówności

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf (a_n)^{1/n} \le \limsup (a_n)^{1/n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} \,,$$

wykazanej przez zdolnych matematyków, wynika, że Cauchy bije d'Alemberta, tzn. że kryterium Cauchy'ego jest silniejsze: jeśli d'Alembert da $g < 1$, to i Cauchy tak da, ale mogą być szeregi, do których zastosowany d'Alembercik da $g = \limsup(a_{n+1}/a_n) \ge 1$, ale Cuchy da $g < 1$ (ważne: gdy $g > 1$ jest otrzymane jako lim sup, a nie jako uczciwy $\lim_{n\to\infty}$, nie pociąga to za sobą niezbieżności! tylko lim sup < 1 oznacza wtedy zbieżność).

Żeby to bicie d'Alemberta przez Cauchy'ego zilustrować, zbadamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{3}{2^{2n+1}} + \ldots$$

Otóż, ciąg $c_n \equiv a_{n+1}/a_n$ ma dwa podciągi: jeden biegnie do granicy większej od 1, a drugi do granicy mniejszej od 1. No bo rzeczywiście:

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{3/2^{2n+1}}{1/2^{2n}} = \frac{3}{2} \,, \qquad \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \frac{1/2^{2n+2}}{3/2^{2n+1}} = \frac{1}{6} \,.$$

Lim sup daje zatem tę granicę większą od 1, czyli d'Alembert nie rozstrzyga sprawy zbieżności tego szeregu. Ale

$$c_n = (a_n)^{1/n} = 1 \,, \;\; \frac{3}{2} \,, \;\; \frac{1}{2} \,, \;\; \ldots \,, \left(\frac{1}{2^{2n}}\right)^{1/2n} \,, \;\; \frac{(3)^{1/(2n+1)}}{2^{(2n+1)/(2n+1)}} \,, \ldots$$

[15]Formalnie:

$$\lim_{n\to\infty} \sup c_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\ge n} c_k\right) \,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf c_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\ge n} c_k\right) \,.$$

i widać, że $\limsup c_n = 1/2$, czyli szereg jednak jest zbieżny. Cauchy pobił d'Alemberta.

No, to był przykład trochę na wyrost. Naogół stosowanie tych kryteriów jest przyjemne bo liczy się zwykłą granicę ciągu. Kryteria te są szczególnie użyteczne przy szeregach potęgowych, bo z $a_n x^n$ dają one zawsze coś razy x i można dobrać x tak, by g było mniejsze od 1. W ten sposób służą one do wyznaczania promienia zbieżności szeregu potęgowego.

Jeszcze tylko ilustracja, że jeśli $g = 1$ to na dwoje babka wróżyła: weźmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \,,$$

Oba kryteria zgodnie dają tu $g = 1$:

$$\lim_{n\to} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1\,, \qquad \lim_{n\to} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to} \left(\frac{1}{(n)^{1/n}}\right)^\alpha = 1\,,$$

(w drugim przypadku, bo wiemy, że $(n)^{1/n} \to 1$ - potęga $1/n$ działa jak walec i wszystko spłaszcza). Wiemy jednak że jeśli $\alpha > 1$, to szereg jest zbieżny, a rozbieżny, jeśli $\alpha \le 1$.

Jako typowy przykład zastosowania weźmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \,.$$

i "zd'Alembercijmy" go:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} \,.$$

Granica g jest więc mniejsza niż 1 i szereg jest zbieżny. Odwrotny szereg, $b_n = n^n/n!$ by był oczywiście niezbieżny.

Inny typowy przykład to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} \,.$$

Tu można albo "sKosić" albo zd'Alembercić:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{2^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^{1/n}\right)^3}{2} = \frac{1^3}{2} = \frac{1}{2}\,, \qquad \text{(Koszenie)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2}\,, \qquad \text{(d'Alembercenie)}.$$

Obaj mistrzowie francuscy mówią zgodnie, że szereg jest zbieżny.

Dość skuteczne bywa też kryterium Raabego.[16] W tym przypadku badając szereg $\sum_n a_n$ tworzymy ciąg

$$r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right),$$

(uwaga! tu jest odwrotny iloraz niż u d'Alemberta!) i pytamy o lim sup tego r_n (albo, jeśli to przyzwoity ciąg, o granicę tego przy $n \to \infty$. Jeśli (uwaga: znów odwrotnie niż u mistrzów francuskich!) $\limsup r_n = g > 1$, to szereg jest zbieżny, a jeśli prawie wszystkie wyrazy ciągu r_n (tj. wszystkie poczynając od jakiegoś n_0) są < 1, to szereg jest niezbieżny.

Dowód (jedna z jego wersji) daje się zrozumieć, więc go dla rozrywki przytoczymy[17] za Fichtenholtzem, na którym wychowało się kilka pokoleń radzieckich matematyków i fizyków (ci wychowywali się też na wielotomowym dziele Smirnowa). Jeśli r_n dąży do $g > 1$ to, pomiędzy 1, a g da się wcisnąć pewną liczbę r taką, że poczynając od jakiegoś n_0 (niechby i baaardzo dużego)

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n}\,.$$

Teraz bierzemy jakieś s wciśnięte pomiędzy 1, a r (znów da się) i wykorzystujemy następujący wynik

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + 1/n)^s - 1}{1/n} = s\,,$$

który jest prostym wnioskiem z zastosowania Szpitalnika do obliczenia granicy typu 0/0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^s - 1}{x}\,.$$

Zatem przy dostatecznie dużych n mamy zawsze (bo s było wzięte mniejsze od r)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + 1/n)^s - 1}{1/n} < r\,, \qquad \text{czyli} \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}}\,,$$

(bo z kolei r jest zawsze mniejsze od wyrazów ciągu r_n, przynajmniej od jakiegoś n_0). Dalej już z górki (teraz odwracamy iloraz do góry nogami więc znak nierówności też się przekręca):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \equiv \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}} \equiv \frac{b_{n+1}}{b_n}\,.$$

[16]Tego od Ene due Raaaaabe, zjadł Tadeusz żabę. Złotousty (po grecku Chryzostom) ale nie Jan (sławny kaznodzieja, święty Jan Chryzostom był jakiś czas (IV/V w.) patriarchą Konstantynopola) tylko właśnie Tadeusz poseł Cymański ostatnio coś o zjadaniu żab (w spelunce przy Nowogrodzkiej) mówił...

[17]Czasem zrozumienie dowodu pomaga, w razie jakichś wątpliwości co tego, jak stosować kryterium (a ogólnie, co do sensu twierdzenia).

i ze zbieżności szeregu $\sum_n b_n = \sum_n (1/n^s)$, gdy $s > 1$ wynika zbieżność szeregu $\sum_n a_n$.

Kryterium Raabego zastosowane do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \, ,$$

daje

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right] = n\left[\frac{\alpha}{n} + \ldots\right] \, ,$$

i jeśli $\alpha > 1$, to szereg jest zbieżny. Oczywiście to jest zjadanie własnego ogona: w przytoczonym dowodzie kryterium Raabego wykorzystaliśmy przecież wiedzę o tym, że szereg $\sum_n (1/n^\alpha)$ jest zbieżny, gdy $\alpha > 1$! Ale może jest jakiś inny dwód kryterium Raabego. (Zapewne jest, bo Lejek też stosuje Raabego do powyższego szeregu). W każdym razie, warto je mieć w swoim arsenale.

Dotarliśmy wreszcie do **kryterium zagęszczeniowego** (oczywiście Cauchy'ego). Mówi ono, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, , \qquad \text{i szereg zageszczony} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \, ,$$

są albo oba zbieżne, albo oba rozbieżne. (W zasadzie zamiast liczby 2 można użyć dowolnej liczby naturalnej p.)

Kryterium to formalizuje ten trick (po naszemu chwyt), który nam posłużył do zbadania szeregu $\sum_n (1/n^\alpha)$. Przeżyjmy to jeszcze raz: szereg zagęszczony w tym przypadku to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n \, ,$$

czyli jest to szereg geometryczny o $q = 1/2^{\alpha-1}$.

Kryterium to jest bardzo wygodne przy badaniu szeregów, w których występują logarytmy. Weźmy np. szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \, .$$

Szereg ten pewnie nie jest zbieżny, bo już było o tym, że naogół $\ln n$ jest równoważny n^0, czyli szereg ten powinien się zachowywać podobnie do szeregu $\sum_n (1/n^{1+0})$, który jest NZB. Aby to sprawdzić wykorzystujemy kryterium zagęszczeniowe: szereg zagęszczony w tym przypadku to

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} \, .$$

Istotnie, jest on NZB, więc badany szereg też jest NZB.

Zobaczmy, czy da się to uogólnić: zbadajmy szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}\,.$$

Szereg zagęszczony w tym przypadku to

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n\,[\ln(2^n)]^{\alpha}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln 2)^{\alpha}}\,.$$

No i tu właśnie regułka, że $\ln n$ działa jak n^0 się załamuje, bo gdyby tak było, to szereg by był niezbieżny niezależnie od wartości α. Widać jednak, że potęgi $\ln n$ coś z niego potrafią "wycisnąć".

Dotąd było w zasadzie o szeregach o wyrazach dodatnich, $a_n > 0$. Przynajmniej wszystkie kryteria zbieżności, jakie tu zostały przytoczone, stosują się w zasadzie tylko do takich właśnie szeregów. W przypadku szeregów, których nie wszystkie wyrazy są dodatnie,[18] kryteriów jest, jak zaraz zobaczymy, niewiele. Oczywiście w mocy pozostaje definicja zbieżności szeregu oparta na zbieżności ciągu jego sum cząstkowych i reguła "ogony nic nie wnoszą", jeśli szereg jest zbieżny. W mocy pozostaje oczywiście także warunek SQN. Jeśli jednak szereg składa się z wyrazów i dodatnich i ujemnych, to nawet jeśli jest zbieżny (ZB), może nie być bezwzględnie zbieżny (BZB), tzn. mimo iż szereg

$$\sum_n b_n\,,$$

jest zbieżny (z tym sensie, że ciąg $s_n(b) = b_1 + \ldots + b_n$ jest ciągiem zbieżnym), szereg

$$\sum_n |b_n|\,,$$

nie jest już zbieżny. Oznacza to, że szereg $\sum_n b_n$ jest zbieżny dzięki temu, że następują w nim pewne kasowania wyrazów dodatnich i ujemnych. Szeregi takie są zbieżne warunkowo (WZB). Jeśli szereg jest WZB, ale nie BZB, to kolejność sumowania jego wyrazów jest bardzo istotna. Definicja zbieżności przez ciąg sum cząstkowych ustala ściśle kolejność sumowania wyrazów szeregu. Jeśli chcemy wyrazy szeregu, który jest tylko WZB posumować w innej kolejności, musimy zmienić konstrukcję ciągu jego sum cząstkowych. W istocie rzeczy, B. Riemann wykazał (twierdzonko takie), że jeśli dopuścimy zmiany kolejności sumowania wyrazów szeregu WZB, to możemy jako jego granicę otrzymać dowolną,

[18] Oczywiście chodzi o sytuację, w której zarówno liczba wyrazów dodatnich, jak też i liczba wyrazów ujemnych szeregu są nieskończone. Gdyby liczba jednych albo drugich była skończona, można by było, zgodnie z regułą, że o zbieżności decyduje to, jak się zachowują prawie wszystkie wyrazy szeregu (czyli wszystkie z wyjątkiem dowolnej ale skończonej ich liczby), obciąć szereg od przodu tak, by już wszystkie jego pozostawione wyrazy były bądź dodatnie, bądź ujemne.

zaplanowaną z góry, liczbę. Nawet nie wgłębiając się w dowód tego twierdzonka można zrozumieć, jak można dostać dowolną granicę g: jeśli $g > 0$, to sumujemy najpierw tylko kolejne wyrazy dodatnie szeregu aż ich suma przekroczy g. Wtedy zaczynamy dodawać kolejne (licząc od początku szeregu) wyrazy ujemne i robimy to dotąd, aż suma spadnie poniżej g. Wtedy znów podejmujemy porzucone dodawanie wyrazów dodatnich, aż znów przeskoczymy g i tak w koło Wojtek (to nie jest aluzja do nawiska wykładowcy). Jeśli $g < 0$, to zaczynamy od sumowania ujemnych wyrazów. Warunek SQN gwarantuje, że oscylacje wyniku wokół zaplanowanej granicy g będą "gasnąć" i rzeczywiście tak sumowany szereg zbiegnie do g.

Jeśli szereg jest BZB, to takie siupy nie są możliwe i granica szeregu jest jedna i ta sama, niezależnie od kolejności sumowania jego wyrazów.

Wśród szeregów, których wyrazy niekoniecznie są jednego znaku, wyróżnioną klasę szeregów, o których można coś ogólnie powiedzieć, stanowią tzw. szeregi naprzemienne, które mają postać

$$\sum_n b_n = \sum_n (-1)^n a_n\,, \qquad \text{gdzie} \qquad a_n = |a_n|\,, \ \text{lub} \qquad a_n = -|a_n|\,.$$

W przypadku takich szeregów bardzo silnym narzędziem oceniania ich zbieżności jest **kryterium Leibnitza**: jeśli w szeregu naprzemiennym, takim jak wyżej, liczby $a_n = +|a_n|$ (jeśli a_n są ujemne, modyfikacja jest oczywista) tworzą ciąg nierosnący, tj. (poczynając od jakiegoś skończonego n_0) $a_n \geq a_{n+1} \geq a_{n+2} \geq \ldots$ i spełniony jest warunek SQN (tj. $a_n \to 0$), to wtedy szereg naprzemienny taki jak wyżej jest zbieżny (naogół tylko WZB) i jego suma (jeśli jest sumowany "po bożemu", tj. po kolei) leży pomiędzy $a_1 - a_2$, a a_1.

Twierdzenie to jest dość zdumiewające: zgodnie z nim zbieżne są bowiem nawet tak "słabo zbiegające" szeregi, jak

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\,, \qquad \sum_n \frac{(-1)^n}{\ln n}\,, \qquad \text{a nawet} \qquad \sum_n \frac{(-1)^n}{\ln(\ln(\ln n))}\,.$$

Oczywiście wszystkie one są jedynie WZB. Kryteria sformułowane wcześniej zastosowane do odpowiadających im szeregów $\sum_n |b_n|$ pozwalają łatwo dowieść, że nie są one BZB.

W kryterium Leibnitza warunek monotoniczności dążenia a_n do zera jest niezwykle istotny: rozpatrzmy bowiem szereg naprzemienny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,, \qquad \text{w ktorym} \quad b_{2n-1} = \frac{1}{n}\,, \qquad b_{2n} = -\frac{1}{2^n}\,.$$

Bez wątpienia $b_n \to 0$, czyli warunek SQN jest spełniony. Nie jest jednak spełniony warunek monotoniczności tego zbiegania: jak łatwo zobaczyć,

$$a_{2n-1} > a_{2n} < a_{2n+1} > a_{2n+2}\,, \qquad \text{etc.}$$

Szereg ten nie jest zbieżny:

$$s_{2n}(b) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}}\right),$$

(konstruując wyraz s_{2n} ciągu sum cząstkowych wolno grupować wyrazy jak się chce, bo s_{2n} jest dany sumą skończonej liczby wyrazów) i widać, że wyrażenie w nawiasie, które jest po prostu skończonym szeregiem geometrycznym o $q = 1/2$, ma granicę, ale pierwsza suma n wyrazów granicy nie ma (to już wiemy). Zatem ciąg sum cząstkowych badanegu szeregu nie zbiega.

Drugim, analogicznym przykładem jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,, \qquad \text{w ktorym} \quad b_{2n-1} = \frac{1}{n^2}\,, \qquad b_{2n} = -\frac{1}{2^n}\,.$$

Tu też warunek SQN jest spełniony, a warunek monotoniczności nie jest:

$$a_{2n-1} > a_{2n} < a_{2n+1} > a_{2n+2}\,, \qquad \text{etc.},$$

(np. $1/2^6 < 1/6^2 > 1/2^7$, itd.) Ten szereg jednak jest zbieżny bo jego ciąg sum cząstkowych jest zbieżny. Morał zatem jest taki, że kryterium Leibnitza działa tylko w jedną stronę: jeśli szereg spełnia jego warunki, to jest zbieżny, ale jeśli kryteriów tych nie spełnia, to nic nie wiadomo - może być zbieżny, albo niezbieżny.

Aby na choć jednym przykładzie zilustrować, że można, zmieniając kolejność sumowania wyrazów szeregu, który jest tylko WZB, dostać coś innego, rozpatrzmy naprzemienny szereg harmoniczny sumowany na dwa sposoby:

$$\sum_n a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots \equiv S\,,$$
$$\sum_n b_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \ldots$$

W drugim przypadku sumujemy te same wyrazy, tylko dodatnie idą parami poprzekładanymi kolejnymi wyrazami ujemnymi. Szereg pierwszy (sumowany "po bożemu") można zapisać na dwa równoważne sposoby

$$\sum_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = S\,,$$
$$\sum_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) = S\,.$$

(jak się wypisze kilka par pierwszej linii i kilka czwórek drugiej, to widać, że to to samo i w tej samej kolejności.) Teraz robimy myk: pierwszą linię (tam gdzie są pary) dzielimy przez 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \frac{1}{2}\,S\,,$$

i dodajemy do drugiej linii (w której są czwórki). W rezultacie skasuje się tam drugi wyraz z każdej czwórki, a ostatni podwoi i będziemy mieć:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)=S+\frac{1}{2}\,S=\frac{3}{2}\,S\,.$$

Jeśli jednak wypiszemy jawnie kilka takich trójek liczb, jakie są teraz w nawiasach, zobaczymy, że to jest szereg $\sum_n b_n$, czyli ten, w którym wyrazy ujemne przeplatają po dwa dodatnie, który miał niby być tym samym, co szereg $\sum_n a_n$ (bo niby te same wyrazy, tylko w innej kolejności sumowane). No ale teraz widzimy, ze to nie jest S, tylko $3S/2$. Wszystko to można bardziej skrupulatnie zapisać posługując się ciągami sum cząstkowych:

$$s_{3n}(b)=s_{4n}(a)+\frac{1}{2}\,s_{2n}(a)\,.$$

Tu już operujemy na skończonych sumach i żadnych wątpliwości co do legalności manipulacji być nie może: jeśli $s_{4n}(a)\to S$ i $s_{2n}(a)\to S$ (bo to ten sam ciąg), to $s_{3n}(b)\to 3S/2$ (to już jest inny ciąg).

Przykład. Zbadajmy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\sqrt{n}}{n+a^2}\,,\qquad a^2\neq 0\,.$$

Szereg ten nie jest BZB, bo $|b_n|\sim 1/\sqrt{n}$, a wiemy, że to oznacza grubą niezbieżność. Ale warunek SQN jest spełniony i możemy się odwołać do Leibnitza. Musimy zatem sprawdzić, czy $a_n=|b_n|$ zbiega do zera monotonicznie. Pytanie, czy $a_n\geq a_{n+1}$ przekłada się na sprawdzenie, nierówności

$$\frac{\sqrt{n}}{n+a^2}\geq\frac{\sqrt{n+1}}{n+1+a^2}\,,$$

czyli pytanie, czy

$$n\,(n+1+a^2)^2\geq(n+1)(n+a^2)^2\,.$$

Po wymnożeniu i zredukowaniu wyrazów mamy pytanie, czy

$$2n^2+n\geq n^2+a^4\,,\quad\text{czyli, czy}\quad n^2+n\geq a^4\,.$$

Jest to rzeczywiście prawda, poczynając od jakiegoś n_0. (zależy to od tego, jak duże jest a^2). Zatem kryterium Leibnitza mówi, że szereg jest WZB.

Ugólnieniem kryterium Leibnitza na szeregi o mniej regularnie zmiennym znaku wyrazów jest **kryterium Abela-Dirichleta.** Mówi ono, że jeśli ogólny wyraz c_n szeregu da się przedstawić jako $c_n = a_n b_n$ i wyrazy a_n dążą do zera monotonicznie (jak u Leibnitza), a ciąg sum cząstkowych

$$s_n(b) = \sum_{k=1}^{n} b_n\,,$$

jest ograniczony (nie musi być zbieżny, może skakać), to szereg $\sum_n c_n = \sum_n a_n b_n$ jest zbieżny (naogół tylko WZB). Oczywiście kryterium Leibnitza jest szczególnym przypadkiem tego: odpowiada ono $b_n = (-1)^n$.

Nieskończone szeregi, które są BZB można bezpiecznie mnożyć:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,, \qquad \text{gdzie} \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0\,.$$

Szereg $\sum_n c_n$ jest wtedy też BZB. Przykład (oczywisty): $a_n = a^n/n!$, $b_n = b^n/n!$. Wtedy

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{b^n}{n!} + \frac{b^{n-1}}{(n-1)!}\frac{a^1}{1!} + \frac{b^{n-2}}{(n-2)!}\frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} \\ &= \frac{1}{n!}\left[b^n + \binom{n}{1} b^{n-1} a + \binom{n}{2} b^{n-2} a^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^n\right] = \frac{(a+b)^n}{n!}\,. \end{aligned}$$

Jeśli szeregi $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ nie są BZB, a tylko WZB, to szereg $\sum_n c_n$ może być NZB. Np. $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$ daje

$$c_n = (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{(n+1)\cdot 1}} + \frac{1}{\sqrt{n\cdot 2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\cdot(n+1)}}\right],$$

i, ponieważ w nawiasie kwadratowym jest $n+1$ wyrazów, z których najmniejszy (środkowy) jest równy albo $2/(n+2)$, gdy n jest parzyste, albo $2/\sqrt{(n+3)(n+1)}$ (dwa równe sobie środkowe), gdy n jest nieparzyste, to $|c_n|$ nie dąży do zera i warunek SQN zbieżności szeregu $\sum_n c_n$ nie jest spełniony. (Oczywiście w takich przypadkach możemy - jeśli umiemy - najpierw obliczyć sumy $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ i wyniki (granice) wymnożyć).

Podobno - Lejek robi taki "tonkij namiok na tołstoje obstojatielstwo" (prawda, jaki śliczny ten język sąsiadów? Na wszelki wypadek radzę sobie przyswajać - może się w przymusowej podróży na północny wschód przydać...), że jeżeli jeden z wymnażanych szeregów jest BZB, a drugi WZB, to szereg $\sum_n c_n$ jest zbieżny (zapewne - tego Lejek nie mówi - tylko WZB).

Wyrazy szeregu $\sum_n b_n$ mogą zależeć od zmiennej x, $b_n = b_n(x)$ i wtedy szereg może zbiegać do pewnej funkcji. Dokładniej, ciąg

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x)\,,$$

sum cząstkowych szeregu $\sum_n b_n(x)$ jest ciągiem funkcyjnym i może zbiegać do jakiejś funkcji $s(x)$. Pamiętamy, że ciągi funkcyjne mogą zbiegać do funkcji na jakimś zbiorze albo punktowo albo jednostajnie (jednostajnie znaczy lepiej). Oczywiście zbieżność ciągu $s_n(x)$, a tym samym zbieżność szeregu $\sum_n b_n(x)$ może zależeć od wartości x - dla jednych x-ów szereg zbiega (bezwzględnie lub warunkowo), a dla innych nie zbiega. To właśnie będziemy teraz ustalać.

Szczególną klasę szeregów funkcyjnych stanowią szeregi potęgowe, tj. takie, w których $b_n(x) = a_n x^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Jeśli szereg taki jest zbieżny przy jakimś $x_0 \neq 0$, to, jak się dowodzi (patrz np. Lejek), jest BZB wewnątrz otwartego przedziału $(-R, +R)$, gdzie $R = |x_0|$ i jego ciąg sum cząstkowych jako ciąg funkcyjny zbiega jednostajnie do pewnej funkcji na każdym przedziale domkniętym $[-R\theta, +R\theta]$, gdzie $0 < \theta < 1$.

Trzeba więc wyznaczyć maksymalnie duże x_0, a tym samym to, co się nazywa promieniem zbieżności szeregu potęgowego. $R = 0$, gdy szereg zbiega tylko, gdy $x = 0$ (każdy szereg potęgowy zbiega przy $x = 0$, bo niezerowy jest wtedy tylko jeden wyraz szeregu) i $R = \infty$, gdy szereg zbiega niezależnie od tego jaka jest wartość x-a. Oczywiście promień zbieżności szeregu zależy od tego, jak się zachowują współczynniki a_n, gdy $n \to \infty$.

Jak już to było wspomniane (tj. zrobiłem był tonkij namiok na eto tołstoje obstojatielstwo), szczególnie wygodne do wyznaczania promienia zbieżności szeregu są kryteria mistrzów francuskich, Cauchy'ego i d'Alemberta. Ponieważ zastosowane do $|b_n| = |a_n||x^n|$ dają one jako granicę g coś razy $|x|$, a szereg $\sum_n b_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$, więc

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} (|a_n|)^{1/n}}, \qquad \text{lub} \qquad R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} (|a_{n+1}|/|a_n|)}.$$

(Zamiast uczciwego lim może też być lim sup). Zgodnie z podanym wyżej twierdzeniem, szereg potęgowy jest wtedy BZB w otwartym przedziale $(-R, +R)$. Czy jest on zbieżny - i jak zbieżny - w $x = R$ i w $x = -R$ wymaga osobnego zbadania. Czasem na jednym krańcu przedziału jest zbieżny (BZB, częściej WZB), a na drugim nie itd.

Ponieważ na każdym przedziale domkniętym zawartym w otwartym przedziale zbieżności, szereg $\sum_n a_n x^n$ jest zbieżny do pewnej funkcji $f(x)$ jednostajnie, można go wyraz po wyrazie różniczkować (lub całkować) i to co wyjdzie jest szeregiem zbieżnym do $f'(x)$ (do $\int dx\, f(x)$) i ma ten sam promień zbieżności, co szereg różniczkowany (całkowany):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x), \qquad \text{to} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} x^n = f'(x),$$
$$\text{oraz} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} dy\, y^n = \int_{x_0}^{x} dy\, f(y),$$

dla $x \in [a, b] \subset (-R, +R)$.

Trywialnymi przykładami szeregów potęgowych są

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,, \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n\,.$$

W pierwszym przypadku, $a_n = 1$ i z Cauchy'ego, czy z d'Alemberta dostajemy natychmiast $R = 1$. Na obu krańcach przedziału zbieżności, czyli przy $x = 1$ bądz $x = -1$ szereg ten jest niezbieżny (o niezbieżności szeregu $\sum_n (-1)^n$ było na samym początku tych notatek). Wiemy też, że gdy $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,,$$

To ujawnia, dlaczego $R = 1$: funkcja $f(x) = 1/(1-x)$ do której szereg ten zbiega (w przedziale swojej zbieżności) ma w $x = 1$ osobliwość (biegun prosty, powiedzą Państwo po kursie analizy zespolonej). A co gdybyśmy wzięli szereg też o $R = 1$ (tj. $a_{2n} = (-1)^n$, $a_{2n+1} = 0$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \qquad ?$$

Funkcja do której on zbiega w $x = \pm R = \pm 1$ jest zupełnie przyzwoita dla wszystkich rzeczywistych x. To nic, funkcja ta potraktowana jak funkcja $f(z) = 1/(1+z^2)$ zmiennej zespolonej z ma osobliwości w $z = \pm i$. I to właśnie odległość od $z = 0$ do najbliższej osobliwości na płaszczyźnie zespolonej wyznacza promień zbieżności szeregu (mimo, że my chcemy go traktować jak wyznaczający funkcję zmiennej rzeczywistej). Taka jest właśnie prawda o ukrytym życiu szeregów potęgowych.

Drugi przykład jest jeszcze bardziej trywialny: ponieważ $a_n = 1/n!$ to Kosić jest trudniej[19] więc d'Alembercimy i dostajemy $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$ czyli $R = \infty$: szereg jest zbieżny dla każdej wartości x-a (nawet $x = 10^{10^{100}}$!). Wiemy też, że zbiega on do funkcji e^x, która nawet potraktowana jak funkcja e^z zmiennej zespolonej z nie ma nigdzie osobliwości (no, poza $z = \infty$, ale tym się tu nie przejmujemy) i stąd $R = \infty$.

Jako mniej trywialny przykład wyznaczania zbieżności szeregu potęgowego rozpatrzymy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, x^n\,.$$

Stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e}\,.$$

[19] Chyba, że się zna wzorek Stirlinga.

Zatem promień zbieżności szeregu $R = e$. Jeśli $|x| < e$, szereg jest BZB. Pozostaje sprawdzić, jak szereg zachowuje się na krańcach przedziału zbieżności, tj. czy jest zbieżny gdy $x = e$ i gdy $x = -e$. Jest z mety jasne, że skoro promień R został wyznaczony z kryterium d'Alemberta, lub Cauchy'ego, to ich ponowne zastosowanie do szeregu (dla $x = e$, bo żeby takie kryteria można było stosować, wyrazy szeregu muszą być dodatnie)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, e^n\,,$$

da $g = 1$, a to jak wiemy, jest sytuacja, z której nic nie wynika. Zatem trzeba inaczej. Wyciągamy więc z arsenału grubszą armatę, czyli kryterium Raabego i obliczamy

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right].$$

To jest równoważne znajdywaniu granicy

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{e}\frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}\,,$$

która jest granicą typu $0/0$, więc stosujemy Szpitalnika

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{e}\frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} &= \frac{1}{e}\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}(1+x)^{1/x}\\ &= \frac{1}{e}\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln(1+x)\right\} = \frac{1}{e}\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)}\right].\end{aligned}$$

Czynnik $(1+x)^{1/x}$ dąży oczywiście do e. W drugim rozwijamy

$$-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)} = -\frac{1}{x^2}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\right) + \frac{1}{x}\left(1 - x + x^2 - x^3 + \dots\right).$$

Widać, że w granicy dostaje się $(1/2) - 1 = -1/2$. Zatem szereg jest niezbieżny. Ale, tu należy się stuknąć w głowę: jeśli kryterium Raabego daje liczbę ujemną, to oznacza, że $a_{n+1} > a_n$, czyli że ciąg a_n jest rosnący! Rzeczywiście:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1\,,$$

bo granica e jest przez $(1 + 1/n)^n$ osiągana od dołu (za moich czasów takich rzeczy się dowodziło w trzeciej klasie liceum - a w czwartej było to, czym będziemy ten kurs kończyć, czyli rówanania różniczkowe...). Zatem szereg $a_n = n!(e/n)^n$ nie spełnia warunku SQN i wobec tego nie jest zbieżny. Stąd wynika, że badany szereg potęgowy $\sum_n (n!/n^n)x^n$ na obu krańcach przedziału zbieżności jest niezbieżny (bo tam warunek SQN nie jest spełniony).

Wykorzystując jednostajną zbieżność szeregów potęgowych w przedziale ich zbieżności można czasem zsumować szereg albo go wyraz po wyrazie różniczkując, albo całkując, tak by uzyskać nowy szereg, który nam już coś przypomina bo wiemy, że jest to rozwinięcie w szereg Taylora jakiejś funkcji. A jak już tę funkcję mamy, to możemy na niej odwrócić operację wykonaną na szeregu.

Przykład. Zsumujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}\,.$$

Zamiast robić dokładnie to, co napisałem wyżej (choć można) zapiszemy ten szereg inaczej i od razu zobaczymy, co wychodzi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{1}{n}\int_0^x dy\,y^n\,.$$

Teraz odwołując się do tej jednostajnej zbieżności przestawiamy sumowanie z całkowaniem i w szeregu, który dostajemy pod całką rozpoznajemy logarytm:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}=\int_0^x dy\,\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{y^n}{n}=\int_0^x dy\,\ln(1+y)=\int_1^{1+x} dz\,\ln z\,.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}=[z\,(-1+\ln z)]_1^{1+x}=1+(1+x)\,[-1+\ln(1+x)]\,.$$

Gdybyśmy wyjściowy szereg zróżniczkowali, dostalibyśmy

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)\,,$$

i teraz po odcałkowaniu powiedzielibyśmy, że

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}=(1+x)\,[-1+\ln(1+x)]+C=f(x)\,.$$

Stałą C trzebaby teraz dobrać tak, by $f(0)=0$, tak jak szereg po lewej stronie. Wyszłaby oczywiścia ta sama funkcja $f(x)$ (jak w dowcipie wykładowcy: "maść na szczury!, maść na szczury!")

Zadanie 1. (Szeregi, o których możemy wiedzieć wszystko.)
Znaleźć jawne wzory na ciągi sum cząstkowych $s_n(a) \equiv \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ ($n_0 = 0$ lub 1). Zbadać istnienie granic otrzymanych ciągów $s_n(a)$ i podać wynik sumowania odpowiadających im szeregów nieskończonych (jeśli są one zbieżne).

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)},$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}, \qquad \alpha \neq -1, -2, -3, \dots,$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} \qquad \alpha \neq -1, -2, -3, \dots,$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right),$$

f) $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

g) $$\sum_{n=1}^{\infty} n\, q^n,$$

h) $$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 q^n,$$

i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{7^n},$$

Zadanie 2.
Przerobić na ułamek dziesiętny liczbę (ułamek okresowy) $0.0(123) = 0,0123123123\dots$

Zadanie 3.
Zbadać zbieżność następujących szeregów:[20]

3.1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+2n+7},$$

3.2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n,$$

[20]Uwaga: nie wszystkie te szeregi są szeregami o wyrazach nieujemnych. Jeśli w którymś występuje jakiś parametr, to w zależności od wartości tego parametru. W przykładzie 3.14 $E(x)$ = część całkowita liczby rzeczywistej x

3.3) $$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right),$$

3.3′) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)},$$

3.4) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3-n^2+n-1}{n^4-n^2+1},$$

3.5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\cos\frac{1}{n}\right),$$

3.6) $$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\left(\sqrt{n^2-2n+2}-\sqrt{n^2-2n}\right),$$

3.7) $$\sum_{n=2}^{\infty} \left[(n^2-2n+2)^{1/3}-(n^2-2n))^{1/3}\right],$$

3.8) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-1/n}}{n},$$

3.9) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

3.10) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

3.11) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n,$$

3.12) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2\cos n}{8-3\cos n}\right)^n,$$

3.13) $$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln n}},$$

3.14) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3-n^2+n-1}{n^4-n^2+1},$$

3.15) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,E(\sqrt{n}\,)},$$

3.16) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n)^{1/n}},$$

3.17) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}},$$

3.18) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{n(n+1)^n},$$

3.19) $$\sum_{n=34}^{\infty} \frac{1}{(3n-100)^s} \qquad s\in\mathbb{R},$$

3.20) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right),$$

3.21) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\operatorname{th}^2\frac{1}{n}, \quad \alpha\in\mathbb{R},$$

3.21′) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^2},$$

3.22) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!},$$

3.23) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right],$$

3.24) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)},$$

3.25) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n},$$

3.26) $$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n\,\ln n(\ln(\ln n))^s} \qquad s\in\mathbb{R},$$

3.27) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

3.28) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(m-1)},$$

3.29) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n},$$

3.30) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}, \quad a>0.$$

Zadanie 4.
Zbadać zbieżność szeregów naprzemiennych i innych o niekoniecznie dodatnich wyrazach.

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{1/10}},$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}\,,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|n-a|^{1/p}}\,, \quad p \in \mathbb{R}\,, \quad a \neq 1,2,3,\ldots,$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{7n+2}\right)^n\,,$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(9^{1/n}-1\right),$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\, q^{n+1}\,,$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}\,,$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a+(-1)^n}{n}\,, \quad a>0\,,$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}\,,$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+3}\,,$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}\,.$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}\,,$

m) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n\, [\ln(\ln n)]^p}\,,$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n^2)}{\ln(\ln n)}\,,$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{E(n/3)}/\ln n\,.$

Zadanie 5.
Pokazać mnożąc bezpośrednio szeregi, którymi wyrażają się $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, że

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha\,.$$

Można także się zabawić pokazaniem bezpośrednio na szeregach, że $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Zadanie 6.
Podać promień R zbieżności szeregów potęgowych. Zbadać zbieżność szeregów na krańcach przedziału ich zbieżności, (tj. dla $x = -R$ oraz $x = +R$).

$$a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2},$$

$$b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$c) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n}, \qquad a > 0,$$

$$d) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n},$$

$$e) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n,$$

$$f) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{1}{n},$$

$$g) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n,$$

$$h) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n,$$

$$i) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{arctg} n)^n x^n,$$

$$j) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n,$$

$$k) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n},$$

$$l) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \qquad a > 0.$$

Zadanie 7.
Wykorzystując możliwość przestawiania kolejności sumowania i całkowania (lub sumowania i różniczkowania) zsumować nastepujące szeregi potęgowe uprzednio wyznaczywszy ich przedziały zbieżności:

$$a) \qquad \sum_{n=1} \frac{(3x)^n}{n},$$

$b)$ $$\sum_{n=0}(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

$c)$ $$\sum_{n=0}(an+b)x^n,$$

$d)$ $$\sum_{n=0}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$e)$ $$\sum_{n=0}(-1)^n(2n+1)(2x)^{2n},$$

$f)$ $$\sum_{n=0}\frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3)x^n,$$

$g)$ $$\sum_{n=0}\frac{x^{3n+1}}{3n+1},$$

Odpowiedzi i podpowiedzi

NZB ! $\equiv$ niezbieżny, ZB $\equiv$ zbieżny, BZB $\equiv$ zbieżny bezwzględnie, WZB $\equiv$ zbieżny warunkowo. (BZB i WZB dotyczą szeregów o wyrazach niekoniecznie dodatnich).

Zadanie 1.
W przykładach $a) - d)$ należy rozłożyć wyrażenie pod sumą na ułamki proste (względem zmiennej n) i obliczyć n-ty wyraz ciągu sum cząstkowych szeregu rozdzielając go na dwie lub więcej skończonych sum i w każdej z nich przesuwając odpowiednio zmienne, po których jest sumowanie tak, by po wydzieleniu z tych sum (z przodu lub z tyłu) jakichś wyrazów, pozostałe sumy się całkowicie zredukowały.

a) $$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3n+1}, \quad \text{szereg jest ZB}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{3},$$

b) $$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, \quad \text{szereg jest ZB}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1,$$

c) $$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+n+1}, \quad \text{szereg jest ZB}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\alpha+1},$$

d) $$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+n+2}$$

$$\text{szereg jest ZB}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)},$$

e) $$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = -\ln 2 + \ln(n+2), \quad \text{szereg jest NZB},$$

f) $$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = -\ln 2 + \ln\frac{k+1}{k+2}, \quad \text{szereg jest ZB}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\ln 2,$$

g) $$s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^k = \sum_{k=0}^{n-1} k\,q^k = q\,\frac{d}{dq}\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q},$$

$$\text{szereg jest ZB (nawet BZB), gdy } |q|<1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{q}{(1-q)^2},$$

h) $$s_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = q\,\frac{d}{dq}\left(q\,\frac{d}{dq}\right)\sum_{k=0}^{n-1} q^k$$
$$= \frac{q+q^2-n^2q^n-(1+2n-2n^2)q^{n+1}-(1-2n+n^2)q^{n+2}}{(1-q)^3},$$

$$\text{szereg jest ZB (nawet BZB), gdy } |q|<1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{q+q^2}{(1-q)^3},$$

$i)$
$$
\begin{aligned}
s_{n-1} &= 2\sum_{k=1}^{n-1} k\,q^k - \sum_{k=1}^{n-1} q^k = 2\sum_{k=0}^{n-1} k\,q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^k + 1 \\
&= 2q\left(\frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n-1}}{1-q}\right) - \frac{1-q^n}{1-q} + 1\,,
\end{aligned}
$$

szereg jest ZB (nawet BZB) bo $q = 1/7$, i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{9}\,.$

Uwaga: ostatni szereg był dla zmyłki sumowany nie od zera, a od 1.

Zadanie 2.
123/9990 bo $0.0(123) = (1/10)\cdot 0.123 \cdot (1 + q + q^2 + \ldots)$ z $q = 10^{-3}$.

Zadanie 3.
3.1) Szereg ZB, bo $a_n \sim 1/n^2$, gdy $n \gg 1$. Ściślej: $a_n < n/n^3 = 1/n^2$ (bo w a_n dzielimy przez więcej, czyli dostajemy mniej), przy dowolnym n, więc kryterium porównawcze z szeregiem $\sum_n (1/n^2)$ działa tu bezpośrednio.
3.2) Szereg NZB, bo $a_n \not\to 0$. Dokładniej,

$$
a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^n \left[\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n\right]^{-1} \longrightarrow (-1)^n e^{-3/2}\left[e^{3/2}\right]^{-1} = (-1)^n e^{-3}\,.
$$

3.3) Szereg NZB, bo $a_n \not\to 0$. Dokładniej, skorzystać ze starej sztuczki $\sqrt{a} - \sqrt{b} = (a-b)/(\sqrt{a} + \sqrt{b}\,)$, by pokazać, że $a_n \to 1$.
3.3') Szereg NZB; sztuczka jak wyżej.
3.4) NZB, bo $a_n \sim 1/n$; uściślić ten argument np. odwołując się do kryterium ilorazowego porównawczego.
3.5) Szereg NZB, bo $a_n \not\to 0$, czyli warunek SQN niespełniony.
3.6) Szereg NZB, bo $a_n \to 1$, czyli warunek SQN niespełniony.
3.7) Szereg ZB, bo $a_n \sim (2/3)n^{-4/3}$. Aby to zobaczyć użyć sztuczki $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ przekształconej po podstawieniu $A = a^{1/3}$, $B = b^{1/3}$ do postaci

$$
a^{1/3} - b^{1/3} = \frac{a-b}{a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}\,.
$$

Dalej już działa kryterium ilorazowe porównawcze ze zbieżnym szeregiem $\sum_n (1/n^{4/3})$.
3.8) Szereg NZB, bo $a_n \sim 1/n$, gdy $n \gg 1$. Dokładniej, z wykresu funkcji widać, że $e^{-x} > 1/e$, gdy $0 < x < 1$. Stad $a_n > 1/(en)$.
3.9) Szereg ZB, bo $a_n \sim n^{-3/2}$. Zastosować technikę epsilonikową do $\mathrm{tg}(1/\sqrt{n}) \to 1/\sqrt{n}$.
3.10) Szereg ZB, bo $a_n \sim n^{-3/2}$. Zastosować technikę epsilonikową do $[\ln(1+1/n)/(1/n)]^2 \to 1$.
3.11) Szereg ZB. Można łatwo oszacować (po paru próbach się na to wpada; pierwszą obserwacją jest, że czynnik w nawiasie pewnie jest < 1), że $(1+\cos n)/(2+\cos n) < 2/3$. Zatem szereg szacuje się z góry przez ZB szereg geometryczny o $q = 2/3$.
3.12) Szereg ZB (wyrażenie w nawiasie zawsze < 1).

3.13) Szereg ZB: $a_n = 1/n^{\ln[\ln(\ln n)]}$ i od pewnego daaaaleeeeekieeeeego (astronomicznie!) n_0 mamy $a_n < 1/n^2$.
3.14) Szereg NZB: $a_n \sim 1/n$, tzn. $a_n/(1/n) \to 1$ i z kryterium ilorazowego porównawczego (z $g = 1$) z niezbieżności $\sum_n (1/n)$ wynika to, co ma wynikać.
3.15) Szereg ZB. Trzeba wpaść na to, że $E(\sqrt{n}) > \sqrt{n} - 1$ więc $a_n < 1/(n(\sqrt{n} - 1)) = c_n$; dalej szereg $\sum_n c_n$ można porównać z $\sum_n b_n$ o $b_n = 1/n^{3/2}$; z kryterium porównawczego ilorazowego mamy wtedy podaną konkluzję.
3.16) Szereg NZB. Porównać ilorazowo z szeregiem $\sum_n b_n = \sum_n (1/n)$.
3.17) Szereg ZB. "SKoszenie" daje $\lim(a_n)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim(2n^4 + n^3 + 2n^2)^{1/2n} \to \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.
3.18) Szereg NZB. Kryterium porównawcze ilorazowe z $\sum_n b_n = \sum_n (1/n)$ daje $\lim(a_n/b_n) = 1/e$, a szereg $\sum_n b_n$ jest NZB.
3.19) Szereg ZB, jeśli $s > 1$. Skorzystać z $3n - 100 > 3(n - 34)$ i przesunąć zmienną sumowania.
3.20) Szereg ZB. Pokazać, że a_n zbiega do $1/2n^2$ i zastosować technikę epsilonikową (albo odwołać się wprost do kryterium porównawczego ilorazowego).
3.21) Szereg ZB, gdy $\alpha < 1$ i rozbieżny jeśli $\alpha \geq 1$.
3.21') Szereg ZB. SKosić i wyjdzie.
3.22) Szereg ZB. ZdAlembercić i wyjdzie.
3.23) Szereg NZB. Warunek SQN niespełniony.
3.24) Szereg ZB. Przesunąć zmienną sumowania i zagęścić.
3.25) Szereg ZB. Nie zagęszczamy, tylko zauważamy, że $\ln n > 2$ od pewnego n i szacujemy geometrycznym.
3.26) Szereg ZB, gdy $s > 1$. Zagęścić i oszacować ilorazowo przez $1/(n \ln^s n)$.
3.27) Szereg NZB. d'Alembercik daje $g = 1$, ale Raabe daje $\lim_{m\to\infty}\{n[(a_n/a_{n+1}) - 1]\} = \frac{1}{2} < 1$.
3.28) Szereg ZB. SKosić (tzn. Cauchym go). Zobaczyć, że granica jest równa $1/e^2 < 1$.
3.29) Szereg ZB, gdy $a > 1$ bo wtedy można go oszacować z góry przez zbieżny geometryczny; NZB, gdy $a \leq 1$ - warunek SQN niespełniony.
3.30) Szereg ZB, jeśli $a > e$. Sztuczka: mianownik a_n można napisać jako $n^{\ln a}$.

Zadanie 4.
a) WZB (Leibnitz), b) WZB (Leibnitz), c) Jeśli $0 < p < 1$, to szereg BZB; jeśli $p \geq 1$, to szereg WZB (Leibnitz); gdy $p \leq 0$, szereg NZB, d) szereg BZB: dla $n \to \infty$, $|a_n| \to e^{3/14}(2/7)^n$, czyli można zastosować kryterium porównawcze ilorazowe z geometrycznym o $q = 2/7$, e) WZB (Leibnitz), f) BZB, jeśli $|q| < 1$ i NZB w przeciwny razie, g) NZB ($|a_n|$ nie dąży do zera, warunek SQN niespełniony), h) NZB (jest to suma szeregu naprzemiennego zbieżnego "pa Leibnitzu" i szeregu rozbieżnego - żeby to rozumowanie zalegalizować, trzeba je sformułować przez ciąg sum cząstkowych; Leibnitz do całości się nie stosuje, bo jako całość nie jest to szereg naprzemienny!), i) BZB oczywiście, j) Niewatpliwie $|a_n| \to 0$ i od jakiegoś n_0 już monotonicznie, więc szereg WZB "pa Leibnitzu"; oczywiście nie BZB, k)

WZB (kryt. Abela- Dirichleta: ciąg $s_n = \sum_{k=1}^n \cos k$ jest ogranicznony[21] przez $1/\sin(1/2)$, bo $|\cos[(n+1)/2]\ \sin(n/2)| < 1$, l) WZB (Leibnitz, $a_n \to 0$ monotonicznie od $n_0 = 3$), m) Jeśli $p > 1$, to szereg BZB (dwakroć zagęścić pomiędzy jednym zgęszczeniem, a drugim skorzystać z ilorazowego porównawczego); gdy $0 \geq p \leq 1$, szereg WZB "pa Leibnitzu" ($|a_n| \to 0$ monotonicznie); wreszcie gdy $p < 0$ to też WZB "pa Leibnitzu", tylko n_0, od którego $|a_n| \to 0$ monotonicznie przesuwa się coraz dalej im bardziej p jest ujemne i trochę trudniej to zobaczyć (wsk. badać zmienność funkcji $[ln(lnx)]^p/x\ln x$), n) WZB, bo $\cos(\pi n^2) = (-1)^n$ - kwadraty kolejnych liczb naturalnych sa naprzemian nieparzyste i parzyste; dalej Leibnitz, o) WZB "pa Abelu-Dirichlecie" bo część całkowita $n/3$ to ciąg $0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1\ldots$ więc ciąg $\sum_{k=1}^n (-1)^{E(k/3)}$ jest ograniczony; ale gdyby tam było $E(n^2/3)$ np., to by już nie było to takie oczywiste, czy Abel z Dirichletem dają radę...

Zadanie 6.

a) $R = 1$; na obu krańcach BZB - ten szereg był omówiony w notatkach prof. Bednorza zwija się on do funkcji dilogarytm zwanej też funkcją Spence'a. b) $R = 1$; dla $x = -R$ BZB, gdy $\alpha > 1$, WZB, gdy $1 \leq \alpha > 0$ i NZB, gdy $\alpha \leq 0$; dla $x = +R$ BZB, gdy $\alpha > 1$ i NZB, gdy $\alpha \leq 1$. c) $R = a$; na obu krańcach NZB. d) $R = \infty$, e) $R = 0$, f) $R = 1$; dla $x = -R$ WZB (Leibnitz), NZB w $x = R$. g) $R = 1/e$, co łatwo dostać d'Alembercąc; w $x = R$ NZB - kryt. Raabego: $\lim_{n\to\infty}\{n[(a_n/a_{n+1}) - 1]\} = \frac{1}{2} < 1$, z kolei w $x = -R$ sam nie wiem: ciąg a_n jest wprawdzie malejący (bo $a_{n+1}/a_n = (1/e)(1 + 1/n)^n < 1$) i ograniczony od dołu (przez zero), ale czy zbieżny do zera? Chyba nie, wiec warunek SQN nie byłby spełniony. h) $R = 2$; na obu krańcach NZB, i) $R = 2/\pi$; na obu krańcach NZB j) $R = \infty$, k) $R = \infty$. l) D'Alembercimy: $a_{n+1}/a_n = (n+1)/a^{2n+1} = a(n+1)/(a^2)^{n+1}$; granica tego, przy $n + 1 \to \infty$ jest tym samym, co $\lim_{x\to 0} e^{-(\ln a^2)/x}/x$; do Szpitala z tym: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln a^2}{x^2}\, e^{-(\ln a^2)/x}$ zależy od a^2: jeśli $a^2 > 1$, to granicą jest 0 i $R = \infty$, jeśli $a^2 < 1$, to granicą jest ∞, czyli $R = 0$. Gołym okiem widać ponadto, że gdy $a = 1$, $R = 0$ także.

Zadanie 7.

) $-\ln(1 - 3x)$; szereg ZB, jeśli $|x| < 1/3$, w $x = 1/3$ NZB, w $x = -1/3$ WZB. b) $(1 - x/2)^{-2}$; szereg ZB, jeśli $|x| < 2$, na krańcach NZB. c) $(b + (a - b)x)/(1 - x)^2$, ZB, jeśli $|x| < 1$ o NZB na krańcach. d) arctg$x$, szereg ZB, gdy $|x| < 1$; w $x = 1$ NZB, w $x = -1$ WZB. e) $(1 - 4x^2)/(1 + 4x^2)^2$, szereg ZB dla $|x| < \frac{1}{2}$; na krańcach NZB. f) $(1 - x)^{-4}$, szereg ZB dla $|x| < 1$; niezbieżny na krańcach. g) $-\frac{1}{3}\ln(1 - x) + \frac{1}{6}\ln(1 + x + x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$, szereg ZB dla $|x| < 1$, w $x = 1$ NZB, w $x = -1$ WZB.

[21] Sumujemy (c.c. oznacza complex conjugation):

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k = \frac{1}{2}\, e^i \sum_{k=0}^{n-1} (e^i)^k + \text{c.c} = \frac{1}{2}\, e^i\, \frac{e^{in} - 1}{e^i - 1} + \text{c.c}$$
$$= \frac{1}{2}\, e^{i(n+1)/2}\, \frac{e^{in/2} - e^{-in/2}}{e^{i/2} - e^{-i/2}} + \text{c.c} = \frac{1}{2}\, e^{i(n+1)/2}\, \frac{\sin(n/2)}{\sin(1/2)} + \text{c.c} = \cos[(n+1)/2]\, \frac{\sin(n/2)}{\sin(1/2)}\,.$$