# ZADANIA Z FUNKCJI ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

**Zadanie 1.**
Sprawdzić, czy podana funkcja $g(x,y)$ jest harmoniczna; jeśli jest, znaleźć funkcję holomorficzną $f(z)$, której częścią rzeczywistą jest $g(x,y)$. Czym od $f(z)$ różni się funkcja $\tilde{f}(z)$, której $g(x,y)$ jest częścią urojoną?

$$
\begin{array}{ll}
a) & g(x,y) = x^2 - y^2 - 2y - 8xy\,, \\
a) & g(x,y) = 3x^2 + x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 3y^2 - 2y^3\,, \\
b) & g(x,y) = \dfrac{2x+y}{x^2+y^2}\,, \\
d) & g(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \\
e) & g(x,y) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+y^2}\,(x\cos y + y\sin y)\,, \\
f) & g(x,y) = e^{2x}\left[-2xy(\cos^2 y - \sin^2 y) - 2(x^2-y^2)\sin y\cos y\right],
\end{array}
$$

Znale'zć warunki Cauchy'ego-Riemanna, jakie musi spełniać funkcja $f(r,\varphi) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$, aby być funkcją holomorficzną.

**Zadanie 2.**
Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$
\begin{array}{ll}
a) & \cos z = 2i\,, \\
b) & \sin z = 3i\,, \\
c) & z = (2i)^i\,,
\end{array}
$$

**Zadanie 3.**
Rozpisując na zwykłe całki rzeczywiste (tj. pisząc $dz = dx + idy$ oraz $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, etc.), obliczyć:
a) całkę z $\sin z$ po prostej od punktu $z_1 = 0$ do $z_2 = 1+i$,
b) całkę z funkcji $z\,e^{z/a}$ po półokręgu o promieniu $R$ łączącym punkty $z_1 = R$ i $z_2 = -R$.
c) całkę z funkcji $f(z) = 1/(4-z^2)$ po okręgu o środku w $z=0$ i promieniu $R=1$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara,
d) całkę z funkcji $f(z) = 1/(4-z^2)$ po okręgu o środku w $z=0$ i promieniu $R=4$ (kierunek jak wyżej),
e) całkę z funkcji $f(z) = 1/(4-z^2)$ po okręgu o środku w $z=2$ i promieniu $R=3$ (kierunek jak wyżej),
f) całkę z funkcji $f(z) = 1/(4-z^2)$ po okręgu o środku w $z=-2+i$ i promieniu $R=2$ (kierunek jak wyżej),
g) całkę z funkcji $f(z) = 1/z(z-i)$ po konturze składającym się z $3/4$ okręgu o promieniu

$R = 2$ i środku w $z = 0$ biegnącego od punktu $z_1 = 2$ do punktu $z_2 = 2i$ oraz z odcinka łączącego $z_2$ i $z_1$.
W całkach z punktów c), d), ... trzeba będzie przypomnieć sobie całkowanie funkcji wymiernych, których argumentami są funkcje trygonometryczne (niektóre rzeczy trzeba sobie co jakiś czas odświeżać...); wyniki należy skonfrontować z twierdzeniami o całkach z funkcji zespolonych.

**Zadanie 4.**
Korzystając tylko z twierdzenia wielkiego Augusta[1] oczywiście Cauchy'ego (i ewentualnie tego, że kontur całkowania, w obrębie obszaru, w którym funkcja jest holomorficzna, można dowolnie deformować) obliczyć
a) całkę z $1/[(1-z)\sin z]$ po okręgu o środku w $z = 0$ i promieniu $R = 1/2$,
b) całkę z $1/[(1-z)\sin z]$ po okręgu o środku w $z = 1 + i/2$ i promieniu $R = 1$,
c) całkę z $1/[(1-z)\sin z]$ po okręgu o środku w $z = \pi - i/2$ i promieniu $R = 1$,
d) całkę z $z^2/(z^3 + 1)$ po okręgu o środku w $z = -1$ i promieniu $R = 1$,
e) całkę z $1/[(z^2 + 1)\sin z]$ po okręgu o środku w $z = 0$ i promieniu $R = 2$,
f) całkę z $z/(z^3 - z^2 - z + 1)$ po okręgu o środku w $z = 0$ i promieniu $R = 2$,
g) całkę z $1/[(z - \pi/2)^2 \cos z]$ po okręgu o środku w $z = \pi/2$ i promieniu $R = 1$,

**Zadanie 5.**
Rozwinąć w szereg Wawrzusia funkcję (wypisać cztery pierwsze nieznikające wyrazy rozwinięcia)
a) $f(z) = 1/(z - i)$ wokół punktu $z = 0$ w pierścieniu $0 < |z| < 1$,
b) $f(z) = 1/(z - i)$ wokół punktu $z = 0$ w pierścieniu $1 < |z| < \infty$,
c) $f(z) = z^2/(z - i)$ wokół punktu $z = i$ w pierścieniu $1 < |z| < \infty$,
d) $f(z) = z/(z - i)$ wokół punktu $z = 1$ w pierścieniu $|z - 1| < \sqrt{2}$,
e) $f(z) = z/(z - i)$ wokół punktu $z = 1$ w pierścieniu $\sqrt{2} < |z - 1| < \infty$,
f) $f(z) = 1/[(z - 1)(z - 2)]$ wokół punktu $z = 0$ w kolejnych pierścieniach,
g) $f(z) = 1/[(z - 1)(z - 2)]$ wokół punktu $z = 1$ w kolejnych pierścieniach,
h) $f(z) = ((z - a)/(z - b))^2$ wokół punktu $z = a$ w kolejnych pierścieniach,
i) $f(z) = 1/\cos z$ wokół punktu $z = 0$ w pierścieniu $0 < |z| < \frac{1}{2}\pi$,
j) $f(z) = \exp(z/(1 - z))$ wokół punktu $z = 0$ w pierścieniu $0 < |z| < 1$,
k) $f(z) = \exp(z/(1 - z))$ wokół punktu $z = 0$ w pierścieniu $1 < |z| < \infty$,
l) $f(z) = \frac{1}{2}\ln[(z + a)/(z - a)]$ wokół punktu $z = 0$ w pierścieniu $a < |z| < \infty$,
m) $f(z) = \frac{1}{2}\ln[(z + a)/(z - a)]$ wokół punktu $z = 0$ w pierścieniu $0 < |z| < a$.
W dwu ostatnich punktach trzeba uważać, bo wprawdzie logarytm niby ten sam, ale to jest jednak w tych dwu punktach *inna* funkcja: aby można było rozwijać dla $|z| > a$, cięcie płaszczyzny zespolonej zmiennej $z$ musi biec od $-a$ do $+a$; aby zaś sens miało rozwinięcie dla $0 < |z| < a$, funkcja musi być zdefiniowana w otoczeniu $z = 0$, czyli cięcia trzeba np. poprowadzić od każdego z punktów $z = a$ i $z = -a$ do nieskończoności odpowiednio

[1] Mimo zbliżających się Świąt nie mylić go z Oktawianem Augustem (tym, o którym śpiewa (gdzie?) tenor-ewangelista: "Es bagab sich aber zu der Zeit da$\beta$ ein Gebot von dem Kaiser Augusto ausging...").

wzdłuż dodatniej i ujemnej półosi.[2]

**Zadanie 6.**
Znaleźć residua funkcji[3] we wszystkich punktach, w których ma ona osobliwości. W miarę możności zaleca się znalezienie residuum zarówno przez rozwijanie w odpowiedni szereg Wawrzusia, jak też i ze wzoru

$$\mathrm{res} f(z)|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$$

(jeśli osobliwość jest biegunem rzędu $n$).
a) $f(z) = (z^4+z^3+2)/[(z+1)(z^2+4)]$,
b) $f(z) = 1/(z^3 - z^5)$,
c) $f(z) = 1/(z^2+1)^4$,
d) $f(z) = e^{imz}/(z^2+a^2)^3$,
e) $f(z) = \mathrm{ctg}^3 z$,
f) $f(z) = 1/(z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1)$,
g) $f(z) = e^{z^2}/[z^2(z-1)]$,
h) $f(z) = e^z/(1-z^4)$,
i) $f(z) = 1/[z^2\sin(z^2)]$,
j) $f(z) = \cos(z)/(1-\cos z)$,
k) $f(z) = z\,\mathrm{tg} z/[(z+\pi/2)\cos 2z]$,
l) $f(z) = z\,e^{1/z}$,
m) $f(z) = \sin(z/(z+1))$.

**Zadanie 7.**
Posługując się metodą residuów obliczyć całki
a) $\int dz\,(z^3 - z)\,e^{1/z}$ po okręgu o środku w $z = 1+i$ i promieniu $R = 2$,
b) $\int dz\,e^z/[z^2(z^2+4)]$ po okręgu o środku w $z = i/2$ i promieniu $R = 1$,
c) $\int dz\,e^{z^2+z}/[z^3(z^2+4)^2]$ po okręgu o środku w $z = i$ i promieniu $R = 2$,
d) $\int_0^{2\pi} d\theta/(1+\varepsilon\sin\theta)$, dla $|\varepsilon| < 1$,
e) $\int_{-\infty}^{\infty} dz/(z^3 - 4iz - z - 6i)$ (Całka z funkcji zespolonej po osi rzeczywistej - a czemuż by nie? Czy domknięcie konturu nieskończonym półokręgiem w górnej półpłaszczyźnie i w dolnej daje to samo?)
f) $\int_{-\infty}^{2} dx/(2x^2 - 8x + 11)$,

---

[2] Zapewne, dałoby się je poprowadzić od $-a$ do $+a$ po jakimś łuku, np. wzdłuż półokręgu o środku w $z = 0$ i promieniu $R = a$. Zwykle się tak tego nie robi, ale mogą Państwo popróbować: można np. obliczyć ściśle $f(z)$ dla jakiegoś $z$, np. $z = i/2$ i porównać z wynikiem sumowania otrzymanego w wyniku rozwijania szeregu, który można zsumować np. programem Mathematica (potem się nauczymy sumować szeregi ręcznie wykorzystując twierdzenie o residuach i wtedy już będzie można szaleć na całego!).

[3] Za pisanie bohomazów językowych w rodzaju "*Dla funkcji f* znaleźć zera, czy residua" (nader często spotykanych w materiałach do ćwiczeń, czy zadaniach domowych, a także, niestety!, w książkach - co dowodzi tego, że redaktorki PWN nie mają wymaganych kwalifikacji - np. w mechanice Landaua i Lifszyca znajdujemy "tensor bezwładności *dla* bąka" itp...) powinno się rozstrzeliwać!

g) $\int_{-1}^{\infty} dx/(x^2+2x+2)^3$,
h) $P\int_{-\infty}^{\infty} dx/(x^3-x^2+4x-4)$; $P$ oznacza wartość główną całki, czyli w tym przypadku $\lim_{\delta\to 0}(\int_{-\infty}^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{\infty})$; należy obliczyć całkę po konturze biegnącym po osi rzeczywistej (domkniętym nieskończonym półokręgiem w górnej lub dolnej półpłaszczyźnie) ale mającym półkoliste "wypuczenie" o promieniu $\delta>0$ nad punktem $x=1$,
i) $P\int_{-\infty}^{\infty} dx/[(x+1)(x^2+1)^2]$,
j) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \cos(|a|(x-1))/(x^2+|b|^2)$, (nie zapomnieć o dowodzie znikania całki po półokręgu),
k) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \cos(|a|x)/(x^2+|b|^3)$,

Życząc Państwu Wesołych Świąt chcę jeszcze powiedzieć, że trochę dodatkowych zadań z całkowania można znaleźć w drugim tomie wielkopomnego dziełka Krysickiego i Włodarskiego, a sporo bardziej fikuśnych całek (z logarytmów, czy z wykorzystaniem konceptu residuum w nieskończoności) zebrałem w takim skrypcie, który gdzieś tam powinien być w sieci dostępny.

## Odpowiedzi

**Do zadania 1**
a) $f(z) = (1 + 4i)z^2 + 2iz$,
b) $f(z) = (1 - 2i)z^3 + 3z^2$,
c) $f(z) = (2 + i)/z$,
d) $f(z) = i/z^2$,
e) $f(z) = (1/z)e^{-z}$,
f) $f(z) = iz^2 e^{2z}$,
Z funkcją $f(z)$ funkcja $\tilde{f}(z)$, której $g(x, y)$ byłaby częścią urojoną (zamiast rzeczywistą) wiąże się prostym wzorem: $\tilde{f}(z) = if(z)$.

**Do zadania 2**
a) $z = x+iy$, gdzie $y = -\ln(2+\sqrt{5})$, a $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k$ lub $y = -\ln(-2+\sqrt{5})$, a $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi k$ (w obu przypadkach $k \in \mathbb{Z}$).
b) $z = x + iy$, gdzie $y = -\ln(-3 + \sqrt{10})$, a $x = 2\pi k$ lub $y = -\ln(3 + \sqrt{10})$, a $x = \pi + 2\pi k$ (w obu przypadkach $k \in \mathbb{Z}$).
c) $z = x + iy$, gdzie $x = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k} \cos(\ln 2)$, $y = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k} \sin(\ln 2)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

**Do zadania 3**
a) $1 - \cos 1\, \mathrm{ch}1 - i \sin 1\, \mathrm{sh}1$,
b) $a\left[-(R + a)e^{-R/a} - (R - a)e^{R/a}\right]$,
c) 0,
d) 0,
e) $-i\pi/2$,
f) $i\pi/2$,
g) $2\pi$.

**Do zadania 4**
a) $2\pi i$,
b) $-2\pi i/\sin 1$,
c) $-2\pi i/(\pi - 1)$,
d) $2\pi i/3$,
e) $2\pi i(1 - 1/\mathrm{sh}1)$,
f) $\pi i/$,
g) $-\pi i/3$.

**Do zadania 5**
a) $f(z) = i + z - iz^2 - z^3 + \ldots = i\sum_{n=0}^{\infty}(z/i)^n$,
b) $f(z) = 1/z - i/z^2 - 1/z^3 - i/z^4 = (1/z)\sum_{n=0}^{\infty}(i/z)^n$,
c) $f(z) = (z - i) + 2i - 1/(z - i)$ (wynik ścisły),
d) $f(z) = \frac{1}{2}(1 + i) + \frac{1}{2}(z - 1) - \frac{1}{4}(1 + i)(z - 1)^2 + \frac{i}{4}(z - 1)^3 + \ldots$,
e) $f(z) = 1 - i/(z - 1) + (1 - i)/(z - 1)^2 + 2/(z - 1)^3 + \ldots$,

f) dla $|z| < 1$: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-2^{-k-1})z^k$; dla $1 < |z| < 2$: $f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1}z^k$; dla $2 < |z|$: $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(2^{k-1}-1)z^{-k}$,
g) dla $|z-1| < 1$: $f(z) = -1/(z-1) - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - (z-1)^3 + \ldots$; dla $1 < |z-1| < \infty$: $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty}(z-1)^{-k}$,
h) dla $|z-a| < |b-a|$: $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)[(z-a)/(b-a)]^k$; dla $b-a| < |z-a|$: $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{0}(1-k)[(z-a)/(b-a)]^k$,
i) $f(z) = 1 + \frac{1}{2}\,z^2 + \frac{5}{24}\,z^4 + \frac{61}{720}\,z^6 + \ldots$
j) $f(z) = 1 + z + \frac{3}{2}\,z^2 + \frac{13}{6}\,z^3 + \ldots$
k) $f(z) = (1/e)(1 - 1/z - 1/(2z^2) - 1/6z^3 + \ldots$
l) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(1/(2k+1))(a/z)^{1k+1}$, przy cięciu biegnącym od $-a$ do $+a$ po osi rzeczywistej,
m) $f(z) = i\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(1/(2k+1))(z/a)^{2k+1}$, przy dwu cięciach biegnących od $-a$ do $-\infty$ po ujemnej półosi i od $+a$ do $+\infty$ po osi rzeczywistej.

**Do zadania 6**

a) $z = -1$ biegun prosty, res$= 2/5$; $z = 2i$ biegun prosty, res$= -11/5 - i/10$; $z = -2i$ biegun prosty, res$= -11/5 + i/10$,
b) $z = 0$ biegun trzeciego rzędu, res$= 1$; $z = \pm 1$ bieguny proste, res$= -1/2$ (w obu),
c) $z = \pm i$ bieguny czwartego rzędu, res$= \mp 5i/32$,
d) $z = ia$ biegun trzeciego rzędu, res$= (-i/16a^5)e^{-am}(3 + 3am + a^2m^2)$; $z = ia$ biegun trzeciego rzędu, res$= (+i/16a^5)e^{-am}(3 - 3am + a^2m^2)$,
e) $z = k\pi$ bieguny proste, res$= -1$ we wszystkich (periodyczność!) f) $z = 1$ biegun drugiego rzędu res$= -1/2$, $z = \pm i$,
bieguny proste res$= 1/4$ (w obu),
g) $z = 0$ biegun drugiego rzędu, res$= -1$; $z = 1$ biegun prosty res$= e = 2,71828$,
h) $z = \pm 1$ bieguny proste, res$= \mp(1/4)e^{\pm 1}$; $z = \pm i$ biegun prosty res$= \mp(i/4)e^{\pm i}$,
i) $z = 0$ biegun czwartego rzędu, res$= 0$; $z = \pm\sqrt{k\pi}$ bieguny proste res$= (-1)^k/(2\pi^{3/2})$,
j) $z = 2k\pi$ bieguny proste, res$= 0$ (we wszystkich - parzystość funkcji cosinus plus periodyczność!) k) $z = -\frac{\pi}{2}$ biegun drugiego rzędu, res$= 1$; $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (dla $n \neq -1$) bieguny proste, res$= (1+2n)/(2+2n)$; $z = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$ bieguny proste, res$= -(1+2n)/(6+4n)$;
l) $z = 0$ punkt istotnie osobliwy, res$= 0$ (bo $10n - 1 \neq 1$),
m) $z = -1$ punkt istotnie osobliwy, res$= -\cos(1)$ (a Mathematica pada na tym...)

**Do zadania 7**

a) $-(11/12)\pi i$,
b) $i(\pi/2)$,
c) $i(\pi/8) + \pi[i(3/32) + (1/64)]e^{-4+2i}$,
d) $2\pi/\sqrt{1-\varepsilon^2}$,
e) $i(\pi/6)$ obydwoma sposobami,
f) $\pi/\sqrt{24}$,
g) $(3/16)\pi$,
h) $-(\pi/10)$,
i) $\pi/2$,

j) $\pi\, e^{-|ab|} \cos(|a|)/|b|$,
k) $\pi\, e^{-|ab|}(3 + 3|ab| + |ab|^2)/8|b|^5$