ANALIZA FUNKCJONALNA
27 lutego 2015
Semestr letni

Różne przestrzenie sprzężone

Javier de Lucas

Zadanie 1. Niech $\mathbb{C}^n$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ i niech $J : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie odwzorowaniem

$$J(z_1, \ldots, z_n) = (iz_1, \ldots, iz_n).$$

Udowodnij, że J jest odwzorowaniem liniowym takim, że $J^2 = -\mathrm{Id}$. Niech $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie odwzorowaniem liniowym nad $\mathbb{R}$. Wykaz, że T jest odwzorowaniem antyliniowym wtedy i tylko wtedy T jest odwzorowaniem liniowym nad $\mathbb{R}$ i $\{T, J\} := TJ + JT = 0$. Wykaz, że T jest odwzorowaniem liniowym nad $\mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy T jest odwzorowaniem liniowym nad $\mathbb{R}$ i $[T, J] := TJ - JT = 0$.

Zadanie 2. Czy odwzorowania

$$a)\ V \ni v \mapsto \varphi_v \in (V^{\#})^{\#}, \qquad \varphi_v : f \in V^{\#} \mapsto \bar{f}(v) \in \mathbb{C},$$

$$b)\ V^{\#} \ni f \mapsto \varphi(\bar{f}) \in \mathbb{C}, \qquad \varphi \in (V^*)^{\#},$$

$$c)\ V^* \ni f \overset{F^*}{\mapsto} F^* f := f \circ F \in W^{\#}, \qquad F \in \mathrm{AL}(W, V),$$

$$d)\ V^{\#} \ni f \overset{F^{\#}}{\mapsto} F^{\#} f := f \circ F \in W^*, \qquad F \in \mathrm{AL}(W, V),$$

są dobrze zdefiniowane? Czy są liniowe czy antyliniowe?

Zadanie 3. Udowodnij, że odwzorowania $\omega_i^{\#}, \omega_i^* : \mathbb{C}_n[\mathfrak{X}] \to \mathbb{C}$, gdzie $\mathbb{C}_n[\mathfrak{X}]$ to przestrzeń wielomianow stopnia nie większe niż n nad $\mathbb{C}$, dane wzorami

$$\omega_i^{\#}(P) := \int_0^1 \bar{P}(x) x^i dx, \qquad \omega_i^*(P) := \int_0^1 P(x) x^i dx, \qquad i = 0, \ldots, n,$$

są liniowe czy antyliniowe. Udowodnij, że $\omega_i^{\#}$ tworzą bazę przestrzeni $V^{\#}$ i ω_i^* tworzą bazę przestrzeni V^*. Wykaż, że $\omega_i^{\#} = \bar{\omega}_i$, gdzie $i = 1, \ldots, n$.

Zadanie 4. Niec $F : \mathbb{C}_2[\mathfrak{X}] \to \mathbb{C}_1[\mathfrak{X}]$, $D_1 \in \mathbb{C}_1^{\#}(\mathfrak{X})$ i $D_2 \in \mathbb{C}_1^*[\mathfrak{X}]$ mają postać

$$F(P) := \int_0^1 \bar{P}(x) dx + x \left(\int_0^1 \bar{P}(x) x^2 dx \right), \qquad D_1(P) := \overline{dP/dx}, \qquad D_2(P) := dP/dx.$$

Oblicz $F^{\#} D_1$ and $F^* D_2$.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{C}^n$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ wyposażoną w iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Wykaż, że odwzorowanie ${}_w\Psi : \mathbb{C}^n \ni v \mapsto (w|v) \in \mathbb{C}^n$ jest liniowy i $\Psi_w : \mathbb{C}^n \ni v \mapsto (v|w) \in \mathbb{C}^n$ jest antyliniowy.