Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XVI, 25 II 2013 r.

Zadanie 1. Wyznaczyć rząd macierzy:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Rozwiązać układy równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. W zależności od parametrów $a, \lambda \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 2 \\ x & + & ay & + & z & = & -1 \\ ax & + & y & + & z & = & -1 \end{array} \right., \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} (1+\lambda)x & + & y & + & z & = & \lambda^2 + 3\lambda \\ x & + & (1+\lambda)y & + & z & = & \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x & + & y & + & (1+\lambda)z & = & \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{array} \right. .$$

Zadanie 4. Niech k będzie ciałem, $A, A' \in M_{i\times j}(k)$, $B \in M_{j\times m}(k)$. Udowodnij następujące własności:

a) $\operatorname{rank}(A + A') \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A')$,

b) $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$,

c) $\operatorname{rank}(B) = j \;\Rightarrow\; \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A)$,

d) $\operatorname{rank}(A) = j \;\Rightarrow\; \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$.

Zadanie 5. Niech V i W będą skończenie-wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi. Udowodnij, że rząd odwzorowania liniowego $f\colon V \to W$ jest równy rzędowi macierzy F odwzorowania liniowego f wziętej względem dowolnych baz V i W.

Zadanie 6. Pokaż, że istnieje więcej niż jedno ciało k, dla którego istnieją odwzorowania liniowe $f\colon k^{11} \to k^{11}$ i $y_0 \in k^{11} \setminus \{0\}$ takie, że równanie $f(x) = y_0$ ma dokładnie 1024 różnych rozwiązań.