Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XVIII, 11 III 2013 r.

Zadanie 1. Znajdź wartości, wektory i podprzestrzenie własne macierzy

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2. Oblicz wartości i wektory własne macierzy

$$J_x := \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_y := \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Niech $\varphi(\lambda)$ będzie wielomianem, a $F \in \mathrm{EndV}$, Dowieść, że jeśli $\varphi(F) = 0$, to każda wartość własna λ operatora F, spełnia równanie $\varphi(\lambda) = 0$.

Zadanie 4. Dane dwa odwzorowania liniowe $F, G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mają n liniowo niezależnych wspólnych wektorów własnych $e_1, \ldots, e_n$. Pokaż, że $FG = GF$.

Zadanie 5. Dana jest macierz

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy A w przypadku gdy A jest macierzą nad ciałem a) $\mathbb{R}$, b) $\mathbb{C}$.

Zadanie 6. Zbadaj, czy w $\mathbb{R}^3$ istnieje baza złożona z wektorów własnych macierzy:

$$a)\ A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b)\ B := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad c)\ C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$