Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XX, 25 III 2013 r.

Zadanie 1. Znajdź bazę dualną do bazy $\mathbb{C}^3$

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zadanie 2. Znajdź bazę dualną do bazy $B := \{1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^n}{n!}\}$ przestrzeni wektorowej rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia wyższego niż n.

Zadanie 3. W bazie kanonicznej, znajdź macierz endomorfizmu przestrzeni wektorowej $\mathbb{Q}^5$ rzutującego wzdłuż podprzestrzeni

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{na podprzestrzeń} \quad \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zadanie 4. Niech $f\colon M \to N$ będzie dowolnym surjektywnym homomorfizmem grup abelowych. Udowodnij że odwzorowanie transponowane $f^T : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ jest injektywne. Podaj przykład injektywnego homomorfizmu grup abelowych którego odwzorowanie transponowane *nie* jest surjektywne.

Zadanie 5. Niech $z_0, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ będą różnymi liczbami zespolonymi. Udowodnij że zbiór $\{\mathrm{ev}_{z_j}\}_{j=0}^n$ funkcjonałów ewaluacyjnych jest bazą przestrzeni dualnej do przestrzeni $\mathbb{C}_n[z]$ wszystkich wielomianowych funkcji zespolonych nie posiadających stopnia większego niż n. Znajdź bazę $\mathbb{C}_n[z]$ do której $\{\mathrm{ev}_{z_j}\}_{j=0}^n$ jest bazą dualną.

Zadanie 6. Niech M i N będą prawymi modułami nad dowolnym pierścieniem R. Udowdnij że, jeśli M i N posiadają skończone bazy, to $(M \oplus N)^* = M^* \oplus N^*$.