Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXI, 8 IV 2013 r.

Zadanie 1. Zbadaj czy odwzorowanie $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ określa formę dwuliniową, jeśli:

a) $V := \mathbb{R}_n[x], \ \ \forall\, v, w \in V : \ \omega(v, w) := \int_0^1 v(x)w(x)\, dx;$

b) $V := \mathbb{R}_n[x], \ \ \forall\, v, w \in V : \ \omega(v, w) := \int_0^1 v'(x)w(x)\, dx;$

c) $V := M_3(\mathbb{R}), \ \ \forall\, A, B \in V : \ \omega(A, B) := \mathrm{tr}(AB).$

Zadanie 2. Udowodnij że jeśli funkcja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek $\forall\, \lambda, x \in \mathbb{R} : \alpha(\lambda x) = \lambda^2\alpha(x)$, to α jest formą kwadratową. Podaj przykład funkcji $\alpha_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takiej że $\forall\, \lambda, v \in \mathbb{R}^2 : \alpha_2(\lambda v) = \lambda^2\alpha_2(v)$, ale $\breve{\alpha}_2(v, w) := \alpha_2(v + w) - \alpha_2(v) - \alpha_2(w)$ nie definiuje formy biliniowej.

Zadanie 3. Niech E będzie wolnym modułem nad niezerowym przemiennym pierścieniem k, a B jego bazą. Udowodnij że, jeśli $\alpha : E \to k$ jest formą kwadratową, to istnieje dokładnie jedna symetryczna macierz $M : B \times B \to k$ taka że

$$\forall\, v, w \in E : \ \breve{\alpha}(v, w) = v_B^T\, M_{BB}\, w_B,$$

gdzie v_B, w_B są wektorami współrzędnych w bazie B odpowiednio wektorów v i w. Wykaż że, jeśli B' też jest bazą E, to

$$M_{B'B'} = M_{BB'}(\mathrm{id})^T\, M_{BB}\, M_{BB'}(\mathrm{id}).$$

Zadanie 4. Niech

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

będzie macierzą formy kwadratowej $\alpha : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}$ w bazie $\{e_1, e_2, e_3\}$. Oblicz macierz tej formy kwadratowej w bazie $\{e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3\}$.

Zadanie 5. Niech E będzie dowolnym modułem nad przemiennym pierścieniem k, a $\alpha : E \to k$ formą kwadratową. Wykaż że zbiór automorfizmów $G : E \to E$ takich że

$$\forall\, v \in E : \ \alpha(Gv) = \alpha(v)$$

jest podgrupą grupy wszystkich automorfizmów E. Pokaż że dla $E = \mathbb{C}^n$, jeśli $\alpha(v) := v^T v\ \forall v \in \mathbb{C}^n$, to ta podgrupa jest izomorficzna z grupą ortogonalną $O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^T A = I_n\}$.

Zadanie 6. Niech $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową taką że

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} : \ \alpha(v) > 0.$$

Udowodnij że w dowolnej bazie macierz M formy kwadratowej α spełnia warunki $M_{11}, M_{22} > 0$.