

Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXII, 15 IV 2013 r.

Zadanie 1. Znajdź macierz formy dwuliniowej $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - x_2y_2,$$

w bazie kanonicznej oraz w bazie $f_1 = (1, 1)^T$, $f_2 = (1, -1)^T$.

Zadanie 2. Znajdź macierz formy dwuliniowej $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3,$$

w bazie $f_1 = (1, 1, 1)^T$, $f_2 = (1, 1, -1)^T$, $f_3 = (1, -1, -1)^T$.

Zadanie 3. Dla formy dwuliniowej $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 5x_2y_1 + x_2y_2,$$

znajdź formy dwuliniowe symetryczną b_s oraz antysymetryczną b_a takie że

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Zadanie 4. Znajdź formę kwadratową stowarzyszoną z formą 2-liniową $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2.$$

Zadanie 5. Sprowadź do postaci diagonalnej oraz znajdź bazy diagonalizujące form kwadratowych $Q_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$,

$$Q_1(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3, \quad Q_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2.$$

Zadanie 6. Sprowadź do postaci diagonalnej oraz znajdź bazy diagonalizujące form kwadratowych $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$,

$$Q_1(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1, \quad Q_2(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4.$$