Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXV, 13 V 2013 r.

Zadanie 1. Udowodnij że sprzężenie hermitowskie $*$ ma następujące własności:

a) $\forall\, f \in \mathrm{End}(V) : f^{**} = f$,

b) $\forall\, f \in \mathrm{End}(V),\ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$,

c) $\forall\, f, g \in \mathrm{End}(V) : (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Zadanie 2. Niech $V := \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{C}$ będzie zespoloną przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym względem którego baza kanoniczna $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest bazą ortonormalną. Oblicz sprzężenie hermitowskie endomorfizmu $s \in \mathrm{End}(V)$ zadanego wzorem $\forall\, i \in \mathbb{N}$: $s(e_i) = e_{i+1}$. Pokaż że endomorfizm ss^* jest samosprzężonym idempotentem (projekcją). Podaj przykład endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ który jest normalny, ale nie jest ani hermitowski ani unitarny, i którego macierz w bazie kanonicznej nie jest diagonalna.

Zadanie 3. Niech f będzie endomorfizmem hermitowskim. Udowodnij że, jeżeli v_1 i v_2 są wektorami własnymi f odpowiadającymi różnym wartościom własnym, to $\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle = 0$.

Zadanie 4. Niech V będzie zespoloną przestrzenią wektorową z bazą ortonormalną $\{e_k\}_{k\in I}$. Udowodnij że każdy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ da się jednoznacznie zapisać w postaci $f = f_1 + i f_2$, gdzie $f_1^* = f_1$ i $f_2^* = f_2$.

Zadanie 5. Niech $C_0^\infty([0,1],\mathbb{C})$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji gładkich $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ takich, że

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(0) = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(1) = 0, \qquad k \in \mathbb{N},$$

wyposażoną w iloczyn skalarny:

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Wykaż, że odwzorowanie

$$D :\ C_0^\infty([0,1],\mathbb{C}) \ni f \mapsto -i\frac{df}{dx} \in C_0^\infty([0,1],\mathbb{C})$$

jest odwzorowaniem hermitowskim.

Zadanie 6. W przestrzeni $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym odwzorowanie $H \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ w bazie kanonicznej jest zadane macierzą

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdź, że H jest odwzorowaniem hermitowskim. Pokaż, że w $\mathbb{C}^3$ istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych H. Sprawdź, że macierz przejścia od bazy kanonicznej do tej bazy wektorów własnych jest unitarna.