Algebra z geometrią II
semestr letni 2012/2013

Seria XV: Kilka rozwiązań
J. de Lucas

Zadanie 1. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy za pomocą rozwinięcia Laplace'a:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&-1&1\\0&0&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-1&3&0\\-4&0&2&0\\1&0&-2&0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-1&3&0\\3&0&-4&3\\1&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}i&0&3\\2&-i&1\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix}i&0&2&0\\i&1&3&0\\2-i&0&i+2&1\\1&0&2&0\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}i&-i&2&0\\i+1&-2i&4&0\\2-i&0&i+2&1\\1&-i&2&0\end{pmatrix}.$$

Wyznacz macierze odwrotne macierzy A, B, D i E.

Roz:

Wyznaczniki: $\det A=-4, \det B=-6, \det C=0, \det D=1, \det E=2-2i, \det F=0$. Macierze odwrotne:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-3/4\\1&-1&-1/2\\0&0&1/4\end{pmatrix},\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1/3&-1/3\\0&-1&-1/2&-2\\0&0&-1/6&-2/3\\1&1&7/6&11/3\end{pmatrix},$$

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}-i&0&3i\\-2&i&6-i\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad E^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2-2i&0&0&2(1+i)\\-(5+i)&4&0&-1+i\\1+i&0&0&1-i\\5-i&0&4&-9-i\end{pmatrix}.$$

Zadanie 2. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy oraz ustal które z nich i kiedy są odwracalne.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\-1&0&3&\dots&n\\-1&-2&0&\dots&n\\-1&-2&-3&\dots&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}a&a&\dots&\dots&a+x\\a&a&\dots&a+x&a\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a+x&a&\dots&a&a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&x_1&x_1^2&\dots&x_1^{n-1}\\1&x_2&x_2^2&\dots&x_2^{n-1}\\1&x_3&x_3^2&\dots&x_3^{n-1}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&x_n&x_n^2&\dots&x_n^{n-1}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}7&4&0&\dots&0&0\\3&7&4&\dots&0&0\\0&3&7&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&7&4\\0&0&0&\dots&3&7\end{pmatrix}$$

Roz:

$$\left|\begin{pmatrix}a&a&\dots&\dots&a+x\\a&a&\dots&a+x&a\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a+x&a&\dots&a&a\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}na+x&na+x&\dots&\dots&na+x\\a&a&\dots&a+x&a\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a+x&a&\dots&a&a\end{pmatrix}\right|=$$

$$(na+x)\left|\begin{pmatrix}1&1&\dots&\dots&1\\a&a&\dots&a+x&a\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a+x&a&\dots&a&a\end{pmatrix}\right|=(na+x)\left|\begin{pmatrix}1&0&\dots&\dots&0\\a&0&\dots&x&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a&x&\dots&0&0\\a+x&-x&\dots&-x&-x\end{pmatrix}\right|=$$

$$(na+x)\left|\begin{pmatrix} 0 & \dots & x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & \dots & 0 & 0 \\ -x & \dots & -x & -x \end{pmatrix}\right| = (-x)x^{n-2}(na+x)\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| (n{-}2 \text{ kolumny})$$

Teraz

$$D_n := \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \quad (n \text{ kolumny})$$

i za pomocą rozwinięcia Laplace'a $D_1 = 1 = (-1)^2$, $D_2 = (-1)^{2+1}D_1 = -1 = (-1)^3(-1)^2$, $D_3 = (-1)^{3+1}D_2 = -1 = (-1)^4(-1)^3(-1)^2$, $D_4 = (-1)^{4+1}D_3 = 1 = (-1)^5(-1)^4(-1)^3(-1)^2$, to...

$$D_n = (-1)^{n+1}D_{n-1}.$$

To równanie rekuręcyjne. W tym przypadku, można rozwiązać równanie następująco

$$D_n = (-1)^{n+1}\cdots(-1)^4(-1)^3(-1)^2 = (-1)^{(n+1)+n+\ldots+2+1-1} = (-1)^{(n+1)(n+2)/2-1}.$$

Macierz jest odwraczalna, gdy jej wyznacznik, tj. $-x^{n-1}(an+x)D_n$, jest różny od zera, czyli $x \neq 0$ i $an + x \neq 0$.

$$E_n = \left|\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 7 \end{pmatrix}\right|$$

Za pomocą rozwienięcia Laplace'a, to

$$E_n = \left|\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 7 \end{pmatrix}\right| = 7E_{n-1} + 3(-1)^3\left|\begin{pmatrix} 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 7 & 4 \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 7 \end{pmatrix}\right|.$$

Zatem,

$$E_n = 7E_{n-1} - 3\cdot 4\left|\begin{pmatrix} 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 7 & 4 \\ 0 & \dots & 3 & 7 \end{pmatrix}\right| = 7E_{n-1} - 12E_{n-2}.$$

To mamy równanie rekurręcyjne. Aby rozwiązać, najpierw założemy, że $E_n = r^n$ dla pewnego r, to

$$r^n = 7r^{n-1} - 12r^{n-2} \Rightarrow r^2 = 7r - 12.$$

Zatem $r \in \{4, 3\}$. Skoro $r_+ = 4 \neq r_- = 3$, to można napisać

$$E_n = Ar_+^n + Br_-^n$$

dla pewnych stałych A i B. Skoro $E_1 = 7$ i

$$E_2 = \left|\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right|,$$

to $E_2 = 37$. Więc,

$$7 = 4A + 3B, 37 = 4^2A + 3^2B \Rightarrow A = 4, B = -3.$$

i

$$E_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}.$$

Ta macierz jest zawsze odwracalna, skoro $E_1 \neq 0$ i E_n jest ciągiem rosnącym.

Zadanie 3. Sprawdź czy następujące macierze są odwracalne. Jeśli tak, oblicz ich macierze odwrotne.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ (rozpatr. na } \mathbb{Z}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ (rozpatr. na } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}),,$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ (rozpatr. na } \mathbb{R}), \quad D = \begin{pmatrix} 1+i & -i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i-1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ (rozpatr. na } \mathbb{C}).$$

Roz: $\det A = -4$ (Nie), $\det B = 1$ (Tak), $\det C = 0$ (Nie), $\det D = -1$ (Tak). Aby obliczyć B^{-1} trzeba pamiętać, że $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ to pierścienie, 1 i 3 są odwracalne i $2, 0$ nie są odwracalne, właśnie 0 to zero i 2 jest dzielnikiem zera ($2 \cdot 2 = 0$).

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i & -i \\ i & -i & 0 & -i \\ 0 & 1-i & 1 & -1 \\ 0 & -i & 1-i & i \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4. Ustal, dla których a następujące macierze są odwracalne w $\mathbb{C}$. Jeśli istnieją, oblicz ich macierze odwracalne.

$$a) \begin{pmatrix} i & 0 & 3 \\ 1 & -i & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} a & 1/4 & 0 \\ i & a & 1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & a+i \end{pmatrix}.$$

Roz: a) $a \neq -6i$, b) $a \neq 1/2(-i \pm i\sqrt{1-i})$, c) $a \notin \{0, -1-2i\}$.

$$\frac{1}{6i+a} \begin{pmatrix} -ia & 0 & 3i \\ 2-a & -6+ai & 3-i \\ 2i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{-i+4a(i+a)} \begin{pmatrix} 4(i+a) & -1 & -i \\ -4i & 4a & 4ia \\ 4 & 4ia & -1-4ia^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{a^2+(2i+1)a} \begin{pmatrix} a & a(a+i) & -a^2 \\ a+2i & -a-i & a \\ -2 & 1-a & 2a \end{pmatrix}.$$

Zadanie 5. Ustal, dla których $a \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ następujące macierze są odwracalne lub mają nietrywialne jądro (w $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 2 \\ 3+a & 1 & 3a+2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Roz: a) Wyz: 0. Nie jest odwracalna i ma jądro. b) Wyz

$$\left|\begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3a+1 & 3a+1 & 3a+1 \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}\right| = (3a+1)\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (3a+1)\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}\right| = 3a+1.$$

Kiedy $3a+1$ jest elementem odwracalnym w $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, to macierz jest odwracalna, czyli albo $3a+1 = 1$ albo $3a+1 = 3$. To, $a = 0$ lub $a = 2$. Macierz ma niezerowe jądro w/w $3a+1$ jest zerem albo dzielnikiem zera, to albo $3a+1 = 0$ albo $3a+1 = 2$. Więc, $a = 1$ lub $a = 3$.

Zadanie 6. Dane $f \in \mathrm{End}((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3)$ postaci

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix},$$

czy f jest bijekcją?

Roz: Wyznacznik tej macierzy to $3a^2 - 2$. Wiemy, że f jest injekcją, gdy wyznacznik nie jest dzielnikiem zera. W $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ to sie dzieję, dla $1, 3$. To, musi być $3a^2 = 3$ albo $3a^2 = 1$. Mnożemy przez 3 i to $a^2 = 1$ i $a^2 = 3$. Tylko pierwsze rownanie ma rozwiązanie $a = 1$. Kiedy $a = 1$, macierz jest odwracalna, to jest surjekcją. Zatem, f jest byjekcją w/w $a = 1$.