Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XVI

Javier de Lucas

Zadanie 1. Wyznaczyć rząd macierzy:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie:

Macierz A:

1 Sposób: Rząd macierzy to wymiar przestrzeni zgenerowanej przez jej kolumny. Dana macierz M, można udowodnić, że

$$\text{rank}M = \text{span}\{M_1, \ldots, M_j, \ldots, M_k\} = \text{span}\left\{M_1, \ldots, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i M_i, \ldots, M_k\right\},$$

gdzie $\lambda_j \neq 0$ i M_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, są kolumnami macierzy M. Z tego wynika, że

$$\text{rankA} := \text{rank}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zauważymy, że ani pierwsza kolumna nie jest liniową kombinacją innych ani innej kolumnej nie można napisać jako liniowej kombinacji zawiarającej tę pierwszą kolumnę. To

$$\text{rank}\, A := 1 + \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 + \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 + \text{rank}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

2 Sposób: Można udowodnić, że rząd macierzy to wymiar największej podmacierzy, której wyznacznik jest różny od zera. Dla A, mamy jeden wyznacznik podmacierzy 4×4, czyli

$$\left\| \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \right\|$$

Za pomocą rozwinięcia Laplace'a i korzystając z właściwości wyznacznika, to

$$\left\| \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| = 3(-1)^{4+1} \left\| \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right\| = -3 \left\| \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| = 0.$$

Więc, $\text{rank}\, A < 4$. Natomiast następujący wyznacznik podmacierzy macierzy A nie jest równy zeru:

$$\left\| \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| = 6 \neq 0.$$

To rząd równa się 3.

Macierz B:

1 Sposób:

$$\operatorname{rank}B := \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -7 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & -7 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$1 + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} = 4.$$

Sposób 2.

$$\left|\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right| = 5\left|\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}\right| + 2\left|\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right| = 5(-23) + 2 \cdot 2 = -111 \neq 0.$$

Więc, rząd równa się cztery.

Zadanie 2. Rozwiązać układy równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązania:

Układ ma rozwiązania, gdy

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Skoro

$$\left|\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}\right| = -9,$$

rząd tej macierzy równa się cztery. Więc, skoro ten wyznacznik podmacierzy macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix},$$

to ta macierz ma co najmiej rząd cztery. Ponadto, jej rząd jest mniejszy od 5, to ma rząd cztery. Wobec twierdzenia Kronekera Capelliego, układ ma rozwiązanie. Rozwiązanie można obliczyć za pomocą reguły Kramera.

Roz: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5/3, x_4 = -4/3$.

Zadanie 3. W zależności od parametrów $a, \lambda \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 2 \\ x & + & ay & + & z & = & -1 \\ ax & + & y & + & z & = & -1 \end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} (1+\lambda)x & + & y & + & z & = & \lambda^2+3\lambda \\ x & + & (1+\lambda)y & + & z & = & \lambda^3+3\lambda^2 \\ x & + & y & + & (1+\lambda)z & = & \lambda^4+3\lambda^3 \end{array}\right. .$$

Rozwiązanie: Drugi układ ma rozwiązanie, gdy

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & \lambda^2+3\lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda^3+3\lambda^2 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^4+3\lambda^3 \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ -\lambda & -\lambda & 1+\lambda \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ -\lambda & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}\right| = \lambda^3+3\lambda^2.$$

Gdy $\lambda \notin \{0,-3\}$, układ ma jedyne rozwiązanie. Za pomocą reguły Kramera, to

$$x = \frac{\left|\begin{bmatrix} \lambda^2+3\lambda & 1 & 1 \\ \lambda^3+3\lambda^2 & 1+\lambda & 1 \\ \lambda^4+3\lambda^3 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}\right|}{\left|\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}\right|} = \frac{6\lambda^2+2\lambda^3-3\lambda^4-\lambda^5}{\lambda^3+3\lambda^2} = \frac{6+2\lambda-3\lambda^2-\lambda^3}{\lambda+3} = 2-\lambda^2.$$

$$y = \frac{\left|\begin{bmatrix} 1+\lambda & \lambda^2+3\lambda & 1 \\ 1 & \lambda^3+3\lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda^4+3\lambda^3 & 1+\lambda \end{bmatrix}\right|}{\left|\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}\right|} = \frac{-3\lambda^2+5\lambda^3+2\lambda^4}{\lambda^3+3\lambda^2} = \frac{-3+5\lambda+2\lambda^2}{\lambda+3} = 2\lambda-1$$

$$z = \frac{\left|\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & \lambda^2+3\lambda \\ 1 & 1+\lambda & \lambda^3+3\lambda^2 \\ 1 & 1 & \lambda^4+3\lambda^3 \end{bmatrix}\right|}{\left|\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}\right|} = \frac{-3\lambda^2-4\lambda^3+5\lambda^4+5\lambda^5+\lambda^6}{\lambda^3+3\lambda^2} = -1-\lambda+2\lambda^2+\lambda^3.$$

Gdy, $\lambda = 0$, to

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1, \qquad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Więc, układ ma rozwiązania. Właśnie, $x+y+z=0$, to rozwiązania są

$$\begin{bmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \forall z, y \in \mathbb{R}.$$

Gdy, $\lambda = -3$, to

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 2, \qquad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Więc, ma rozwiązania wobec twierdzenia Kronekera–Capelli'ego (zwanego też twierdzeniem Rouche'a–Frobenius'a)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 4. Niech k będzie ciałem, $A, A' \in M_{i\times j}(k)$, $B \in M_{j\times m}(k)$. Udowodnij następujące własności:

a) $\operatorname{rank}(A + A') \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A')$,

b) $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$,

c) $\operatorname{rank}(B) = j \Rightarrow \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A)$,

d) $\operatorname{rank}(A) = i \Rightarrow \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$.

Rozwiązanie: Korzystam z tego, że rząd macierzy w pewnych bazach jest równy rządowi przekształcenia liniowego. To możemy zrozumieć A, A' i B jako odwzorowania liniowe. To,

a) $\operatorname{rank}(A + A') = \dim \operatorname{Im}(A + A')$.

Jeśli $v \in \operatorname{Im}(A + A')$, to istnieje $v_0 \in k^m$ taki, że

$$v = (A + A')v_0 \Rightarrow v = Av_0 + A'v_0 \in \mathrm{ImA} + \mathrm{ImA}'.$$

Więc, $\operatorname{Im}(A + A') \subset \mathrm{ImA} + \mathrm{ImA}'$ i

$$\dim \operatorname{Im}(A + A') \leqslant \dim(\mathrm{ImA} + \mathrm{ImA}') = \\ \dim(\mathrm{ImA}) + \dim(\mathrm{ImA}') - \dim(\mathrm{ImA} \cap \mathrm{ImA}') \leqslant \dim(\mathrm{ImA}) + \dim(\mathrm{ImA}').$$

Z tego

$$\operatorname{rank}(A + A') = \dim \operatorname{Im}(A + A') \leqslant \dim(\mathrm{ImA}) + \dim(\mathrm{ImA}') = \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}A'.$$

b) Skoro $B(k^m) \subset k^j$, to

$$\operatorname{rank}(AB) = \dim(\mathrm{Im}AB) = \dim(AB(k^m)) \leqslant \dim(A(k^j)) = \mathrm{rank}A.$$

Skoro dla każdego liniowego przekształcenia $f : k^j \to k^i$ to $\dim \mathrm{Im} f \leqslant j$, to

$$\operatorname{rank}(AB) = \dim(\mathrm{Im}AB) = \dim(AB(k^m)) = \dim(\mathrm{Im}A|_{B(k^m)}) \leqslant \dim(B(k^m)) = \mathrm{rank}B,$$

gdzie $A|_{B(k^m)} : v_0 \in B(k^m) \mapsto Av_0 \in k^j$. Więc,

$$\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B).$$

c) Jeżeli $\mathrm{rank}B = k^j$, to $B(k^m) = k^j$ i $AB(k^m) = A(k^j)$. Z tego wynika, że

$$\operatorname{rank}(AB) = \dim(\mathrm{Im}AB) = \dim(\mathrm{Im}A(k^j)) = \mathrm{rank}A.$$

d) Jeżeli $\operatorname{rank} A = k^i$, to $A(k^j) = k^i$ i A to izomorfizm. Z tego wynika, że $\dim \mathrm{Im}A|_{V'} = \dim V'$, gdzie $A|_{V'} : v_0 \in V' \subset k^j \to Av_0 \in k^i$ i V' to podprzestrzeń liniowa. To

$$\operatorname{rank}(AB) = \dim(\mathrm{Im}AB) = \dim(AB(k^m)) = \dim(A|_{B(k^m)}) = \dim B(k^m) = \mathrm{rank}B.$$

Zadanie 5. Niech V i W będą skończenie-wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi. Udowodnij, że rząd odwzorowania liniowego $f\colon V\to W$ jest równy rzędowi macierzy F odwzorowania liniowego f wziętej względem dowolnych baz V i W.

Rozwiązanie Bądź $v_1,\dots,v_n$ będzie bazą przestrzeni V i $w_1,\dots,w_r$ będzie bazą W. Dane $f(e_1),\dots,f(e_k)$, gdzie $e_1,\dots,e_k\in V$, to

$$0=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i c_{ij} f(v_j)=$$
$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{r}\lambda_i c_{ij}F_{mj}w_m \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i c_{ij}F_{mj}=0,\ (\forall m)\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i c_{ij}F_j=0,$$

gdzie F_j to j-tej kolumna macierzy F. Z tego wynika, że kiedy $f(e_1),\dots,f(e_r)$ są liniowo niezależne, czyli $\lambda_1=\ldots=\lambda_k=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(e_i)=0$ to kombinacja liniowa kolumn $\sum_{j=1}^{n}c_{ij}F_j$, dla $i=1,\dots,k$ są liniowo niezależne i odwrotnie. Zatem

$$\mathrm{rank} f=\mathrm{rank}\,F.$$

Zadanie 6. Pokaż, że istnieje więcej niż jedno ciało k, dla którego istnieją odwzorowania liniowe $f\colon k^{11}\to k^{11}$ i $y_0\in k^{11}\setminus\{0\}$ takie, że równanie $f(x)=y_0$ ma dokładnie 1024 różnych rozwiązań.

Rozwiązanie: Jeżeli równanie $f(x)=y_0$ ma 1024 rozwiązanie, to k musi być skończonym ciałem. Inaczej, to $\ker f$ miałoby nieskończenie wiele elementów i równanie $f(x)=y_0$ miałoby nieskończenie wiele rozwiązań. Łatwo zauważyć, że jeżeli $k=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i ustalimy bazę $e_1=(1,0,\dots,0), e_2=(0,1,0,\dots,0),\dots,e_{11}=(0,\dots,0,1)$ i odwzorowanie $f(e_1)=e_1$ i $f(e_j)=0$ dla reszty, czyli f jest związana z macierzą

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0\end{bmatrix},$$

w bazach $\{e_1,\dots,e_{11}\}$, to

$$\ker f=\langle e_2,\dots,e_{11}\rangle$$

ma $2^{10}=1024$ elementów i równanie $f(x)=e_1$ ma 1024 rozwiązań.

Inne ciało skończone, to

$$k_4=F_2[x]/\langle x^2+x+1\rangle,$$

gdzie $F_2[x]$ to pierścień wielomianów o współczynnikach w $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Zauważ, że x^2+x+1 jest nierozkładalne jako wielomian o współczynnikach w $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Takie ciało ma 4 elementy:

$$0,1,x,x+1.$$

To jedyne takie ciało z czteroma elementami. Właśnie, podobnie są zbudowane wszystkie ciała z p^n elementami, gdzie p to liczba pierwsza i $n\in\mathbb{N}$. Analogicznie, możemy zdefiniować inne przekształcenie $f: k_4\times\ldots\times k_4(11\text{razy})\to k_4\times\ldots\times k_4(11\text{razy})$ w postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

gdzie ostatnie 5 kolumn mają współczynniki równe 0. Jądro tego odwzorowania ma $4^5=2^{10}=1024$ elementów. Jeżeli $y_0\in k_4\times\ldots\times k_4(11\text{razy})$ to $f(x)=y_0$ ma 1024 rozwiązań kiedy $y_0\in\mathrm{Im}f$.