Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XX, 25 III 2013 r.

Zadanie 1. Znajdź bazę dualną do bazy $\mathbb{C}^3$

$$B := \left\{ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Rozwiązanie: Wiemy, że baza dualna bazy kanonicznej

$$B_0 := \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

to $B_0^* := \left\{ e^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Szukamy bazy $B^* = \{\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3\}$ przestrzeni dualnej $(\mathbb{C}^3)^*$ takiej, że

$$\bar{e}^j(\bar{e}_i) = \delta_i^j, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Można zauważyć, że dla dowolnego wektora $v = \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2 + \lambda^3 e_3 \in \mathbb{C}^3$, to

$$\bar{e}^j(v) = \bar{e}^j(\lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2 + \lambda^3 e_3) = \lambda^1 \bar{e}^j(e_1) + \lambda^2 \bar{e}^j(e_2) + \lambda^3 \bar{e}^j(e_3).$$

Na przykład,

$$\bar{e}^j(\bar{e}_i) = \bar{e}^j(\lambda_i^1 e_1 + \lambda_i^2 e_2 + \lambda_i^3 e_3) = \lambda_i^1 \bar{e}^j(e_1) + \lambda_i^2 \bar{e}^j(e_2) + \lambda_i^3 \bar{e}^j(e_3),$$

gdzie $\lambda_i^1, \lambda_i^2, \lambda_i^3$ to współrzędy wektora $\bar{e}_i$ w bazie e_1, e_2, e_3.

Z tego i skoro

$$\bar{e}_1 = e_1 + e_2, \qquad \bar{e}_2 = e_1 + e_3, \quad \bar{e}_3 = e_2 + e_3,$$

można warunki (1) napisać macierzowo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}^1(\bar{e}_1) & \bar{e}^1(\bar{e}_2) & \bar{e}^1(\bar{e}_3) \\ \bar{e}^2(\bar{e}_1) & \bar{e}^2(\bar{e}_2) & \bar{e}^2(\bar{e}_3) \\ \bar{e}^3(\bar{e}_1) & \bar{e}^3(\bar{e}_2) & \bar{e}^3(\bar{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}^1(e_1) & \bar{e}^1(e_2) & \bar{e}^1(e_3) \\ \bar{e}^2(e_1) & \bar{e}^2(e_2) & \bar{e}^2(e_3) \\ \bar{e}^3(e_1) & \bar{e}^3(e_2) & \bar{e}^3(e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wobec powyższego wzoru, to

$$\begin{pmatrix} \bar{e}^1(e_1) & \bar{e}^1(e_2) & \bar{e}^1(e_3) \\ \bar{e}^2(e_1) & \bar{e}^2(e_2) & \bar{e}^2(e_3) \\ \bar{e}^3(e_1) & \bar{e}^3(e_2) & \bar{e}^3(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Więc,

$$\bar{e}^1 = \frac{1}{2}(e^1 + e^2 - e^3), \qquad \bar{e}^2 = \frac{1}{2}(e^1 - e^2 + e^3), \qquad \bar{e}^3 = \frac{1}{2}(-e^1 + e^2 + e^3).$$

Uwaga: Można rozwiązać powyższe ćwiczenie za pomocą macierzy zmiany bazy w przestrzeni dualnej. Dana forma liniowa $\omega \in E^*$ i wektor $v \in E$, mamy, że

$$\omega(v) = \omega_{B^*} \cdot v_B,$$

gdzie v_B to wektor (kolumnowy) v we współrzędnach bazy B i ω_B to współrzędny formy liniowej ω (vektor poziomowy) w bazie dualnej B^*. Niech A będzie macierzą zmiany bazy od B do B_0, to

$$\omega(v) = \omega_{B^*} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot v_B = \omega_{B^*} \cdot A^{-1} \cdot v_{B_0} = \omega_{B_0^*} \cdot v_{B_0}.$$

Skoro to prawda dla dowolnego v, to $\omega_{B_0^*} = \omega_{B^*} \cdot A^{-1}$.

Możemy stosować poprzedni wynik do naszego problemu. We współrzędnach bazej dualnej do $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_2$, czyli B^*, wektory $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ mają postać $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$. Skoro macierz zmiany bazy od B do B_0 to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

to współrzędny form liniowych $\bar{e}^1, \bar{e}^1, \bar{e}^1$ w bazie B_0^* dualnej do bazy kanonycznej to

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Więc, j-tej wiersz to wspólrzędny $\bar{e}^j$ w bazie B_0^*, czyli

$$\bar{e}^1 = \frac{1}{2}(e^1 + e^2 - e^3), \qquad \bar{e}^2 = \frac{1}{2}(e^1 - e^2 + e^3), \qquad \bar{e}^3 = \frac{1}{2}(-e^1 + e^2 + e^3).$$

Zadanie 2. Znajdź bazę dualną do bazy $B := \{1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^n}{n!}\}$ przestrzeni wektorowej rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia wyższego niż n.

Rozwiązanie: Możemy zdefiniować następujące odwzorowania liniowe od $\mathbb{R}_n[x]$ do $\mathbb{R}$ postaci

$$\omega_j(P(x)) = \frac{d^j P}{dx^j}(0), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

i $\omega_0(P(x)) = P(0)$. Często pisze się w literaturze, że

$$\frac{d^0}{dx^0} P(x) = P(x).$$

Więc, (2) można zdefiniować też dla $j = 0$. Można widać, że ω_j to funkcja liniowa

$$\begin{aligned} \omega_j(\lambda P(x) + \mu Q(x)) = \frac{d^j}{dx^j}(\lambda P(x) + \mu Q(x))(0) = \left(\lambda \frac{d^j P}{dx^n} + \mu \frac{d^j Q}{dx^j}\right)(0) \\ = \lambda \frac{d^j P}{dx^j}(0) + \mu \frac{d^j Q}{dx^j}(0) = \lambda \omega_j(P(x)) + \mu \omega_j(Q(x)). \end{aligned}$$

Ponadto, mamy, że dla $k = 0, \ldots, n$,

$$\omega_j(x^k/k!) = \frac{d^j(x^k/k!)}{dx^j}(0) = \begin{cases} 0 & j > k, \\ 1 & j = k, \\ x^{k-j}/(k-j)!(0), & j < k, \end{cases}$$

Czyli

$$\omega_j(x^k/k!) = \frac{d^j(x^k/k!)}{dx^j}(0) = \begin{cases} 0, & j > k, \\ 1, & j = k, \\ 0, & j < k. \end{cases}$$

Z tego, $\omega_j(x^k/k!) = \delta_j^k$ i $\omega_0, \ldots, \omega_n$ tworzą bazę dualną bazy $1, x, x^2/2, \ldots, x^n/n!$.

Zadanie 3. W bazie kanonicznej, znajdź macierz endomorfizmu przestrzeni wektorowej $\mathbb{Q}^5$ rzutującego wzdłuż podprzestrzeni

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{na podprzestrzeń} \quad \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zadanie 4. Niech $f\colon M \to N$ będzie dowolnym surjektywnym homomorfizmem grup abelowych. Udowodnij że odwzorowanie transponowane $f^T\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z})$ jest injektywne. Podaj przykład injektywnego homomorfizmu grup abelowych którego odwzorowanie transponowane *nie* jest surjektywne.

Rozwiązanie: Dane $f^T : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z})$, mamy, że dla dowolnych $\omega_1, \omega_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{Z})$,

$$f^T(\omega_1) = f^T(\omega_2) \Rightarrow \omega_1 \circ f = \omega_2 \circ f.$$

Skoro f jest surjekcją, dla każdego elementu $n \in N$ istnieje $m \in M$ taki, że $n = f(m)$. Więć, z założenia $f^T(\omega_1) = f^T(\omega_2)$, to

$$\omega_1(n) = \omega_1 \circ f(m) = \omega_2 \circ f(m) = \omega_2(n).$$

Wówczas, $\omega_1(n) = \omega_2(n)$ dla dowolnego $n \in N$, czyli $\omega_1 = \omega_2$ i f^T jest injekcją.

Natomiast, możemy zdefiniować różnowartościową injekcją grup $f : M \to N$ taka, że f^T nie jest surjekcją. Na przykład, niech f będzie homomorfizmem $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takim, że $f(1) = k \notin \{0, 1\}$. Można zauważyć, że f jest injekcją. Właśnie, jeżeli $f(n) = f(n')$, to $f(n) = nf(1) = n'f(1)$. Skoro $f(1) \neq 0$ i $\mathbb{Z}$ nie ma dzielników zera, to $n = n'$. Możemy udowodnić, że f^T nie jest surjekcją. Wprowadzamy dowód nie wprost. Jeżeli f^T jest surjekcją, to dla formy linowej $\omega : t \in \mathbb{Z} \to \omega(t) \in \mathbb{Z}$ takiej, że $\omega(1) = 1$, istnieje forma liniowa $\omega_1 \in \mathrm{Ham}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ taka, że

$$f^T(\omega_1) = \omega \Rightarrow \omega_1 \circ f(1) = \omega(1) \Rightarrow \omega_1(k) = 1 \Rightarrow k\,\omega_1(1) = 1.$$

Skoro k nie ma elementu odwrotnego, nie istnieje ω_1 taka, że $k\omega_1(1) = 1$. Więc, $\omega \notin \mathrm{Im} f^T$ i f^T nie jest surjekcją.

Zadanie 5. Niech $z_0, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ będą różnymi liczbami zespolonymi. Udowodnij że zbiór $\{\mathrm{ev}_{z_j}\}_{j=0}^n$ funkcjonałów ewaluacyjnych jest bazą przestrzeni dualnej do przestrzeni $\mathbb{C}_n[z]$ wszystkich wielomianowych funkcji zespolonych nie posiadających stopnia większego niż n. Znajdź bazę $\mathbb{C}_n[z]$ do której $\{\mathrm{ev}_{z_j}\}_{j=0}^n$ jest bazą dualną.

Rozwiązanie:

Będziemy podać bazę przestrzeni $\mathbb{C}_n[x]$ postaci

$$P_{z_i}(z) = \frac{(z-z_0)\cdot(z-z_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{(z-z_i)}\cdot\ldots\cdot(z-z_{n-1})\cdot(z-z_n)}{(z_i-z_0)\cdot(z_i-z_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{(z_i-z_i)}\cdot\ldots\cdot(z_i-z_n)}, \qquad i = 0,\ldots,n,$$

gdzie $\widehat{(z-z_i)}$ oznacza, że taki termin nie pojawia się w wzorze. Właśnie, to są wielomiani stopnia n i ponadto

$$P_{z_i}(z_j) = \delta^i_j, \qquad i,j = 0,\ldots,n.$$

Takie wielomiany są liniowo niezależne, właśnie

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j P_{z_j}(z) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

oznacza, że

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j P_{z_j}(z_k) = 0 \qquad dla\ k = 0,\ldots,n.$$

Z tego,

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j P_{z_j}(z_k) = \lambda_k = 0 \qquad dla\ k = 0,\ldots,n.$$

i są liniowo niezależne. Ponadto, generują przestrzeń wymiaru $n+1$. Skoro $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_n[z] = n+1$, to

$$\langle P_{z_0},\ldots,P_{z_n}\rangle = \mathbb{C}_n[z].$$

Mozna widać, że

$$\mathrm{ev}_{z_j}(P_{z_i}(z)) = P_{z_i}(z_j) = \delta^i_j, \qquad dla\ i, j = 0, \ldots, n.$$

Więc, $\mathrm{ev}_{z_j} : \mathbb{C}_n[z] \to \mathbb{C}$, dla $j = 0, \ldots, n$ otworzą bazę dualną bazy $P_{z_j}(z)$, dla $j = 0, \ldots, n$.

Zadanie 6. Niech M i N będą prawymi modułami nad dowolnym pierścieniem R. Udowdnij że, jeśli M i N posiadają skończone bazy, to $(M \oplus N)^* = M^* \oplus N^*$.

Rozwiązanie: Będziemy zdenifiniować morfizm

$$\phi : \omega \in (M \oplus N)^* \mapsto (\omega|_M, \omega|_N) \in M^* \oplus N^*$$

gdzie $\omega|_M$ to obcięcie (restrykcja) formy liniowej ω do M i $\omega|_N$ to obcięcie formy ω do N. Następująco, udowodnimy, że ϕ to izomorfism i z tego $(M \oplus N)^* = M^* \oplus N^*$.

Udowodnijmy, że ϕ to injekcja. Dany $\omega_1, \omega_2 \in (M \oplus N)^*$, to

$$\phi(\omega_1) = \phi(\omega_2) \Rightarrow \omega_1|_M = \omega_2|_M \ i\ \omega_1|_N = \omega_2|_N.$$

Niech $\{m_1, \ldots, m_r\}$ będzie bazą M i $\{n_1, \ldots, n_s\}$ będzie bazą N, to

$$\omega_1(\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r m_r + \mu_1 n_1 + \ldots + \mu_s n_s) = \omega_1(\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r m_r) + \omega_1(\mu_1 n_1 + \ldots + \mu_s n_s).$$

Skoro $\omega_1|_M = \omega_2|_M$ i $\omega_1|_N = \omega_2|_N$, to

$$\omega_1(\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r m_r + \mu_1 n_1 + \ldots + \mu_s n_s) = \omega_2(\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r m_r) + \omega_2(\mu_1 n_1 + \ldots + \mu_s n_s).$$

i

$$\omega_1(\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r m_r + \mu_1 n_1 + \ldots + \mu_s n_s) = \omega_2(\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r m_r + \mu_1 n_1 + \ldots + \mu_s n_s).$$

Czyli $\omega_1 = \omega_2$ i ϕ jest injekcją.

Teraz, korzystając z baz, można udowodnić, że ϕ jest surjekcją. Dane $\omega_M \in M^*$ i $\omega_N \in N^*$, możemy zdefiniować

$$\omega(\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r m_r + \mu_1 n_1 + \ldots + \mu_r n_r) = \omega_M(\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r m_r) + \omega_N(\mu_1 n_1 + \ldots + \mu_s n_s)$$

Można widać,że ω to forma liniowa. i $\phi(\omega) = (\omega_M, \omega_N)$. Więc, ϕ to surjekcja.

Więc, ϕ jest surjekcją i injekcją, czyli ϕ jest izomorfizmem i $N^* \oplus M^* = (N \oplus M)^*$.