Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXII, 15 IV 2013 r.

Zadanie 1. Znajdź macierz formy dwuliniowej $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - x_2y_2\,,$$

w bazie kanonicznej oraz w bazie $f_1 = (1,1)^T$, $f_2 = (1,-1)^T$.

Rozwiązanie:

Aby napisać macierz formy dwuliniowej b w bazie kanonicznej trzeba znaleźć macierz $M_B \in M_2(\mathbb{R})$ taką, że dane dowolne wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, to

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_B^T M_B \mathbf{y}_B,$$

gdzie $\mathbf{x}_B$ i $\mathbf{y}_B$ to wektory złożone ze współrzędnych $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ w bazie kanonicznej. Jeżeli piszemy

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

to

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2) M_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - x_2y_2.$$

Więc,

$$b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2 = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - x_2y_2.$$

Skoro to spełnia się dla dowolnych $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, widać, że

$$b_{11} = 3, \quad b_{12} = 2, \quad b_{21} = -2, \quad b_{22} = -1.$$

Aby napisać macierz formy dwuliniowej w nowej bazie

$$B' = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

wystarczy pamiętać formułę zmiany bazy

$$M_{B'} = M_{B'B}^T M_B M_{B'B}$$

gdzie $M_{B'B}$ to macierz zmiany bazy od B' do B, czyli

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wówczas,

$$M_{B'} = M_{B'B}^T M_B M_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Zadanie 2. Znajdź macierz formy dwuliniowej $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3\,,$$

w bazie $f_1 = (1,1,1)^T$, $f_2 = (1,1,-1)^T$, $f_3 = (1,-1,-1)^T$.

Rozwiązanie: Możemy najpierw znaleźć macierz formy dwuliniowej w bazie kanonicznej i sprowadzić macierz do nowej bazy. Aby znaleźć macierz formy b w bazie kanonicznej, trzeba znaleźć macierz $M_B \in M_3(\mathbb{R})$ taką, że dane dowolne wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, to

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{B'}^T M_B \mathbf{y}_{B'},$$

gdzie $\mathbf{x}_B$ i $\mathbf{y}_B$ to wektory złożone ze współrzędnych $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ w bazie kanonicznej. Jeżeli piszę się $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, to

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2, x_3) M_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

Więc,

$$\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij} x_i y_j = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

Skoro to spełnia się dla dowolnych $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, widać, że

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aby napisać macierz formy dwuliniowej w nowej bazie

$$B' = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

wystarczy pamiętać formułę zmiany bazy dla form dwuliniowych

$$M_{B'} = M_{B'B}^T M_B M_{B'B},$$

gdzie $M_{B'}$ to macierz formy dwuliniowej w nowej bazie i $M_{B'B}$ to macierz zmiany bazy od B' do B, czyli

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wówczas,

$$M_{B'} = M_{B'B}^T M_B M_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Znajdź formę kwadratową stowarzyszoną z formą 2-liniową $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2.$$

Rozwiązanie: Trzeba pamiętać, że forma kwadratowa $\alpha : V \to \mathbb{R}$ stowarzyszona z formą dwuliniową $b : V \times V \to \mathbb{R}$ spełnia, że

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \alpha(\mathbf{x}) - \alpha(\mathbf{y}).$$

Wówczas
$$b(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \alpha(2\mathbf{x}) - \alpha(\mathbf{x}) - \alpha(\mathbf{y}) = 2\alpha(\mathbf{x}).$$
Czyli, dana forma dwu-liniowa, istnieje tylko jedna forma kwadratowa stowarzyszona z nią. W naszym przypadku
$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}b(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_2x_1 - x_2^2).$$

Zadanie 4. Dla formy dwuliniowej $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 5x_2y_1 + x_2y_2,$$
znajdź formę dwuliniową symetryczną b_s oraz antysymetryczną b_a takie, że
$$b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = b_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) + b_a(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Rozwiązanie: Wystarczy zauważyć, że
$$b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{x},\mathbf{y}) - b(\mathbf{y},\mathbf{x})) + \frac{1}{2}(b(\mathbf{x},\mathbf{y}) + b(\mathbf{y},\mathbf{x})).$$
Zdefiniując,
$$b_a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{x},\mathbf{y}) - b(\mathbf{y},\mathbf{x})), \qquad b_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{x},\mathbf{y}) + b(\mathbf{y},\mathbf{x})).$$
Widać, że b_a jest antysymetryczna:
$$b_a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{x},\mathbf{y}) - b(\mathbf{y},\mathbf{x})) = -\frac{1}{2}(b(\mathbf{y},\mathbf{x}) - b(\mathbf{x},\mathbf{y})) = -b_a(\mathbf{y},\mathbf{x}).$$
i b_s jest symetryczna:
$$b_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{x},\mathbf{y}) + b(\mathbf{y},\mathbf{x})) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{y},\mathbf{x}) + b(\mathbf{x},\mathbf{y})) = b_a(\mathbf{y},\mathbf{x}).$$
Ponadto, widać, że można tylko przedstawić b w postaci $b = b_a + b_s$ jednym sposobem. Właśnie, jeżeli b można napisać w postaci
$$b = b_a + b_s,$$
to
$$b(\mathbf{x},\mathbf{y}) + b(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 2b_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Rightarrow b_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{x},\mathbf{y}) + b(\mathbf{y},\mathbf{x}))$$
i
$$b(\mathbf{x},\mathbf{y}) - b(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 2b_a(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Rightarrow b_a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{x},\mathbf{y}) + b(\mathbf{y},\mathbf{x}))$$
i b_a i b_s są jedyne.

Zadanie 5. Sprowadź do postaci diagonalnej oraz znajdź bazy diagonalizujące form kwadratowych $Q_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$,
$$Q_1(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3, \qquad Q_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2\,.$$

Rozwiązanie: Aby sprowadzić Q_1 do postaci diagonalnej, zaczynamy od pierwszej współrzędnej, tutaj x_1. Jeżeli x_1^2 nie występuje, to pisze się $Q_1(x)$ za pomocą zmiennych $\bar{x}_1 = x_1 + x_2$ i $\bar{x}_2 = x_1 - x_2$ zamiast x_1 i x_2, czyli
$$Q_1(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 = (x_1+x_2)^2/4 - (x_2 - x_1)^2/4 + [(x_1+x_2) - (x_1 - x_2)]x_3/2 = \\ \bar{x}_1^2/4 - \bar{x}_2^2/4 + \bar{x}_1x_3/2 - \bar{x}_2x_3/2,$$

Macierz formy dwuliniowej stowarzyszonej z tą formą kwadratową jest

$$2\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Przypominamy, że termin 2 pojawia się, bo $b_1(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2Q_1(\mathbf{x})$ z definicji

$$b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y}).$$

W nowych zmiennych, $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ i x_3 pierwsza zmienna, $\bar{x}_1$ pojawia się do kwadratu. Więc, możemy zdefiniować nową zmienną

$$\bar{\bar{x}}_1 = \bar{x}_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\bar{x}_2 + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}x_3 = \bar{x}_1 + x_3,$$

czyli

$$Q_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}(\bar{x}_1 + x_3)^2 - \frac{1}{2}\bar{x}_1 x_3 - \frac{1}{4}x_3^2 + \frac{1}{2}\bar{x}_1 x_3 - \frac{1}{4}\bar{x}_2^2 - \frac{1}{2}\bar{x}_2 x_3 = \frac{1}{4}\bar{\bar{x}}_1^2 - \frac{1}{4}\bar{x}_2^2 - \frac{1}{2}\bar{x}_2 x_3 - \frac{1}{4}x_3^2.$$

Macierz formy dwuliniowej stowarzyszonej z tą formą kwadratową, to

$$2\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_{11} & \widetilde{\alpha}_{12} & \widetilde{\alpha}_{13} \\ \widetilde{\alpha}_{21} & \widetilde{\alpha}_{22} & \widetilde{\alpha}_{23} \\ \widetilde{\alpha}_{31} & \widetilde{\alpha}_{32} & \widetilde{\alpha}_{33} \end{pmatrix}.$$

Widać, że $\widetilde{\alpha}_{12} = \widetilde{\alpha}_{13} = \widetilde{\alpha}_{21} = \widetilde{\alpha}_{31} = 0$. Skoro teraz $\widetilde{\alpha}_{22} \neq 0$, czyli druga zmienna pojawia się do kwadratu, zdefiniujemy

$$\bar{\bar{x}}_2 = \bar{x}_2 + \frac{\widetilde{\alpha}_{23}}{\widetilde{\alpha}_{22}}x_3 = \bar{x}_2 + x_3,$$

czyli

$$Q_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}\bar{\bar{x}}_1^2 - \frac{1}{4}\bar{x}_2^2 - \frac{1}{2}\bar{x}_2 x_3 - \frac{1}{4}x_3^2 = \frac{1}{4}\bar{\bar{x}}_1^2 - \frac{1}{4}(\bar{x}_2 + x_3)^2 + \frac{1}{2}\bar{x}_2 x_3 + \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}\bar{x}_2 x_3 - \frac{1}{4}x_3^2 = \frac{1}{4}\bar{\bar{x}}_1^2 - \frac{1}{4}\bar{\bar{x}}_2^2.$$

Macierz formy dwuliniowej stowarzyszonej z tą formą kwadratową, to

$$2\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Baza przetrzeni $\mathbb{R}^3$ gdzie Q_1 diagonalizuje jest dualna do

$$\bar{\bar{x}}_1 = x_1 + x_2 + x_3, \qquad \bar{\bar{x}}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \quad x_3.$$

Aby to zrobić, trzeba pamiętać, że taka baza e'_1, e'_2, e'_3 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ spełnia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \lambda_3^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wówczas,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \lambda_3^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Baza diagonalizująca to

$$e_1' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Właśnie, można widać, że dana macierz M_B formy dwuliniowej stowarzsonej z Q_1, czyli

$$2\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

to macierz w bazie diagonalizującej jest

$$M_B' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$