Algebra z geometrią 2012/2013

Rozwiązania serii XXIV, 6 V 2013 r.

J. de Lucas

Zadanie 1. Niech V będzie dowolną przestrzenią unormowaną. Udowodnij że:

a) $\forall\, x, y \in V : |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$,

b) wzór $d(x, y) := \|x - y\|$ definiuje metrykę na V,

c) norma jest funkcją ciągłą w tej metryce.

Rozwiązanie:

a) Każda norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ spełnia, że

$$\|w_1 + w_2\| \leqslant \|w_1\| + \|w_2\| \qquad \text{(nierówność trójkątowa)}$$

i

$$\|w_1 - w_2\| = \|(-1)(w_2 - w_1)\| = \|w_2 - w_1\|.$$

Z tego wynika, że dla dowolnych $x, y \in V$:

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|. \tag{1}$$

Podobnie,

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|y - x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|. \tag{2}$$

Z (1) i (2) wynika

$$-\|x - y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\| \Leftrightarrow |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|.$$

b) Aby sprawdzić, że $d(x, y) = \|x - y\|$ to metryka musimy udowodnić, że

- $d(x, y) \geqslant 0, \quad \forall x, y \in V.$
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in V.$
- $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in V.$
- $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ dla dowolnych $\forall x, y, z \in V$.

1. Z definicji $d(x, y) = \|x - y\|$. Z właściwości normy, $\|v\| > 0$ dla $v \neq 0$. Z tego wynika, że $\|x - y\| \geqslant 0$, gdy $x \neq y$. Ponadto, $d(x, x) = \|\mathbf{0}\|$, gdzie $\mathbf{0}$ to zero wektor. Też z właściwości normy, $\|\mathbf{0}\| = \|0 \cdot v\| = 0\|v\| = 0$. Więc, $d(x, y) \geqslant 0$ dla dowolnych $x, y \in V$.

2. Z poprzedniego kroku, widać, że $\|v\| = 0$ wtedy i tylko wtedy $v = 0$. Z tego wynika, że $\|x - y\| = 0$ wtedy i tylko wtedy $x = y$.

3. Trzeci warunek spełnia się, gdyż $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$ dla dowolnych $x, y \in V$.

4. Czwarty warunek wynika z

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| = \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y), \qquad \forall x, y, z \in V.$$

c) Aby udowodnić, że norma jest funkcją ciągłą ze względu na tą metrykę trzeba sprawdzić, że dany ustalony dowolny punkt $x_0 \in V$, to

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x, x_0) = \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |\|x\| - \|x_0\|| < \epsilon.$$

Oczywiście, dany $\epsilon > 0$ możemy ustalić $0 < \delta < \epsilon$. Wówczas,

$$|\|x\| - \|x_0\|| \leqslant \|x - x_0\| < \delta < \epsilon$$

i funkcja jest ciągła dla dowolnego punktu $x_0 \in V$.

Zadanie 2. Udowodnij że na przestrzeni $C([0,1], \mathbb{C})$ zespolonych funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ odwzorowanie zadane wzorem

$$\|f\| := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \tag{3}$$

jest normą na $C([0,1], \mathbb{C})$.

Rozwiązanie: Musimy sprawdzić, czy $\| \cdot \|$ to dobrze określona funkcja rzeczywista taka, że

1. $\forall f, g \in C([0,1], \mathbb{C})$, $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f \in C([0,1], \mathbb{C})$, $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$,
3. $f \neq 0 \Rightarrow \|f\| > 0$.

Najpierw, trzeba sprawdzić, czy funkcja f jest dobrze zdefiniowana, czyli sprawdzić, że $\|f\|$ to zawsze liczba rzeczywista. Skoro f jest funkcją ciągłą to $|f|$ jest funkcją ciągłą (jest złożona z dwóch funkcji ciągłych, f i modułu $|\cdot|$), to osiąga jej większe i mniesze wartosci w $[0,1]$. To $\sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ istnieje i $\| \cdot \|$ jest dobrze zdefiniowana.

Teraz udowodnimy (1). Mamy, że

$$\|f + g\| = \sup_{x \in [0,1]} |(f + g)(x)| = \sup_{x \in [0,1]} (|f(x)| + |g(x)|).$$

Skoro $|f(x)| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ i $|g(x)| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$, to

$$\sup_{x \in [0,1]} (|f(x)| + |g(x)|) \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$$

i

$$\|f + g\| = \sup_{x \in [0,1]} (|f(x)| + |g(x)|) \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| = \|f\| + \|g\|.$$

Z tego wynika (1).

Aby udowodnić (2) wystarczy zauważyć, że

$$\|cf\| = \sup_{x \in [0,1]} |cf(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |c||f(x)| = |c| \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = |c| \|f\|.$$

Wówczas (2) sie spełnia.

Na końcu, jeżeli $f \neq 0$, to istnieje $x_0 \in [0,1]$ taki, że $f(x_0) \neq 0$. Więc,

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \geqslant |f(x_0)| > 0.$$

Z tego wynika (3). Więc, (3) jest normą.

Zadanie 3. Niech $C^1[0,1]$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową funkcji rzeczywystych mających ciągłą pochodną na przedziale [0,1]. Wykaż że odwzorowanie zadane wzorem

$$\|f\| := |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

jest normą na $C^1[0,1]$.

Rozwiązanie: Skoro f ma ciągłą pochodną, to $|f'|$ jest funkcją ciągłą i osiąga jej największe i najmiejsze wartości w $[0,1]$. Więc, $\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|$ istnieje i $\|\cdot\|$ jest dobrze zdefiniowana. Teraz sprawdzimy, że $\|\cdot\|$ spełnia wszystkie własciwości normy:

$$\|f+g\| = |f(0)+g(0)| + \sup_{x\in[0,1]}|(f'+g')(x)| \leqslant |f(0)|+|g(0)| + \sup_{x\in[0,1]}(|f'(x)|+|g'(x)|). \quad (4)$$

Skoro $|f'(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|$ i $|g'(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]}|g'(x)|$, to

$$\sup_{x\in[0,1]}(|f'(x)|+|g'(x)|) \leqslant \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|g'(x)|.$$

Z tego i (4),

$$\|f+g\| \leqslant |f(0)|+|g(0)| + \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|g'(x)| = \|f\|+\|g\|.$$

Ponadto,

$$\|cf\| = |cf(0)| + \sup_{x\in[0,1]}|cf'(x)| = |c||f(0)| + \sup_{x\in[0,1]}|c||f(x)| = |c|(|f(0)| + \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|) = |c|\|f\|.$$

Na końcu, musimy sprawdzić, czy jeżeli $f \neq 0$, to $\|f\| > 0$. Właśnie, jeżeli $f \neq 0$, to istnieje $x_0 \in [0,1]$ taki, że $f(x_0) \neq 0$. Teraz, mamy dwie możliwości:

- Jeżeli $f' = 0$ to $f(x_0) = f(0) \neq 0$ i
$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)| = |f(x_0)| > 0.$$
- Jeżeli $f' \neq 0$, istnieje $x_0 \in [0,1]$ taki, że $f'(x_0) > 0$, więc
$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)| \geqslant |f(0)| + |f'(x_0)| > 0.$$

  Więc,
$$f \neq 0 \Rightarrow \|f\| > 0.$$

Zadanie 4. Niech $C([0,2\pi],\mathbb{C})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych na przedziale $[0,2\pi]$ o wartościach zespolonych. Sprawdź że odwzorowanie

$$C([0,2\pi],\mathbb{C}) \times C([0,2\pi],\mathbb{C}) \ni \langle f,g\rangle \longmapsto \langle f|g\rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx \in \mathbb{C}$$

jest iloczynem skalarnym. Wykaż że zbiór funkcji

$$\left\{ f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

jest układem ortonormalnym, to znaczy że wszystkie elementy mają normę 1 oraz że iloczyn skalarny każdej pary dwóch różnych elementów wynosi 0.

Rowiązanie: Musimy sprawdzić, czy to odwzorowanie spełnia następujące właściwości

- $\forall f, f_1, f_2 \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$, to $\langle f|f_1+f_2\rangle = \langle f|f_1\rangle + \langle f|f_2\rangle$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ i $f_1, f_2 \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$, to $\langle f_1|\lambda f_2\rangle = \lambda\langle f_1|f_2\rangle$.
- $\forall f_1, f_2 \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$, to $\langle f_1|f_2\rangle = \overline{\langle f_2|f_1\rangle}$.
- $\forall f_1 \in C([0,2\pi],\mathbb{C})\backslash\{0\}$, to $\langle f_1|f_1\rangle > 0$.

Mamy, że

$$\langle f|f_1+f_2\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}(f_1(x)+f_2(x))dx = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}f_1(x) + \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}f_2(x)dx = \langle f|f_1\rangle + \langle f|f_2\rangle.$$

i

$$\langle f|\lambda f_1\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}(\lambda f_1(x)dx = \lambda \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}f_1(x)dx = \lambda\langle f|f_1\rangle$$

dla dowolnych funkcji f, f_1, f_2 i dowolnej $\lambda \in \mathbb{C}$. Ponadto,

$$\langle f_1|f_2\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f_1(x)}f_2(x)dx = \int_0^{2\pi} \overline{f_1(x)\overline{f_2(x)}}dx = \overline{\int_0^{2\pi} \overline{f_2(x)}f_1(x)dx} = \overline{\langle f_2|f_1\rangle}.$$

Jeżeli $f \neq 0$, to istnieje x_0 taki, że $f(x_0) \neq 0$. Skoro f jest ciągła, to istnieje otwarty przedział$I_0 = (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ gdzie $f(x) \neq 0$. Więc, istnieje $I = [-\epsilon' + x_0, x_0 + \epsilon'] \subset I_0$ gdzie $|f_1|$ jest większa od zera. To

$$\int_0^{2\pi} |f_1(x)|^2 dx \geqslant \int_I |f_1(x)|^2 dx > 0 \Rightarrow \|f_1\| > 0.$$

Udowodnijmy, że funkcje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ utworzą układ ortonormalny.

$$\langle f_n|f_m\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin((n+m)x) + \sin((n-m)x))dx$$

Kiedy $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, to $\int_0^{2\pi} \sin(kx)dx = 0$. Jeżeli $k = 0$, to $\int_0^{2\pi} dx = 2\pi$. Z tego,

$$\langle f_n|f_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin((n+m)x) + \sin((n-m)x))dx = \delta_n^m.$$

Zadanie 5. Na $\mathbb{C}^3$ standardowy iloczyn skalarny zadany jest wzorem

$$\langle u|v\rangle := \sum_{k=1}^{3} \bar{u}_k\, v_k,$$

gdzie $u := (u_1, u_2, u_3)^T$, $v := (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{C}^3$. Oblicz $\operatorname{span}\{(1,2,3),(0,1,0)\}^\perp$.

Rozwiązanie:

Jeżeli $(x,y,z)^T \in \operatorname{span}\{(1,2,3),(0,1,0)\}^\perp$, to

$$0 = \langle (x,y,z)^T|(1,2,3)^T\rangle = x + 2y + 3z$$

i

$$0 = \langle (x,y,z)^T|(0,1,0)\rangle = y.$$

Wówczas $x = -3z, y = 0$. Więc,

$$\operatorname{span}\{(1,2,3),(0,1,0)\}^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zadanie 6. Niech $\ell^2(\mathbb{N}) := \{f \in \operatorname{Map}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty\}$ będzie zespoloną przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym danym wzorem

$$\langle f|g\rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \overline{f(k)}g(k).$$

Niech W będzie podprzestrzenią wszystkich ciągów skończonych (funkcji o skończonym nośniku). Udowodnij że $W \neq W^{\perp\perp}$.

Rozwiązanie:

Najpierw obliczymy $W^{\perp}$. Jeżeli $f \in W^{\perp}$, to f jest ortogonalna do każdego elementu podprzestrzeni W, np. dla każdego $f^{(k)} \in \ell^2$, postaci $f^{(k)}(n) = \delta_n^k$, gdzie k to ustalona liczba naturalna. Więc,

$$0 = \langle f^{(k)} | f \rangle = f(k), \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Z tego, $f = 0$ i $W^{\perp} = \{0\}$, gdzie 0 to funkcja $0 : n \in \mathbb{N} \mapsto 0 \in \mathbb{C}$. Wówczas $W^{\perp\perp} = \ell^2 \neq W$. Na przykład, element $g \in \ell^2$ z nieskończonymi elementami

$$g(n) = \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

nie należy do W a należy do ℓ^2.