Algebra z geometrią 2012/2013

Egzamin pisemny, 24 VI 2013 r.

<u>**Instrukcje:**</u> *Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi egzamin jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z egzaminu. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chlujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu:* **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. *Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.*

Zadanie 1. Zdefiniuj macierz formy kwadratowej $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oraz pokaż że znak jej wyznacznika nie zależy od wyboru bazy (3 punkty). Sformułuj twierdzenie pozwalające na definicję sygnatury α (1 punkt). Zbadaj dodatniość, rząd i sygnaturę formy kwadratowej $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, gdzie

$$Q(\mathbf{v}) = x^2 + \lambda y^2 + 2z^2 - 4xy - 2xz + 6yz, \qquad \mathbf{v} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{(3 punkty)}.$$

Sprowadź formę Q do postaci kanonicznej (3 punkty).

Rozwiązanie: Trzeba pamiętać, że jeżeli A to macierz formy kwadratowej Q w bazie $\mathcal{B}$, macierz $\bar{A}$ to macierz formy kwadratowek Q w bazie $\bar{\mathcal{B}}$ i P to macierz przejścia bazy z $\mathcal{B}$ do $\bar{\mathcal{B}}$, wtedy

$$P^T \bar{A} P = A.$$

Wówczas

$$\det A = \det(P^T \bar{A} P) = \det P^T \det \bar{A} \det P = (\det P)^2 \det \bar{A}$$

i znak $\det A$ jest równy znak $\det \bar{A}$.

Dana formy kwadratowa w bazie $\mathcal{B}$ postaci

$$Q(v) = \sum_{i<j=1}^{r} c_{ij} x_i x_j,$$

jej macierz A w tej bazie ma elementy $\alpha_{ii} = c_{ii}$ dla $i = 1, \ldots, r$ i $\alpha_{ij} = c_{ij}/2$ kiedy $i \neq j$ i $i, j = 1, \ldots, r$. W naszym przypadku, macierz A formy kwadratowej Q jest

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Z kryterium Sylvestera, forma kwadratowa jest dodatnia, gdy wiodące minory główne, czyli wynaczniki

$$D_1 = 1, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 4, \text{ i } D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda + 6 + 6 - \lambda - 9 - 8 = \lambda - 5.$$

są więsze od zera. Więc, Q jest dodatnio określona kiedy $\lambda > 5$. Z kryterium Sylvestera, forma kwadrawota Q jest ujemna gdy $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ i $D_3 < 0$. W naszym przypadku, to nigdy sie spełnia bo $D_1 = 1 > 0$. Więc, Q jest dodatnia dla $\lambda > 5$ i niezdefiniowana dla $\lambda \leqslant 5$. Skoro $D_3 \neq 0$ dla $\lambda \neq 5$, to rząd macierzy jest trzy dla $\lambda \neq 5$ i dla $\lambda = 5$ to Q jest zdegenerowana.

Aby prowadzic $Q(\mathbf{v})$ do postaci kanonicznej, korzystamy z metody Lagrange'a. Najpierw, wprowadzamy zmiannę zmiennych. Skoro $\alpha_{11} \neq 0$, to zdefiniujemy

$$\bar{x} = x + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} y + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}} z = x - 2y - z.$$

Wtedy,

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}) = (\bar{x} + 2y + z)^2 + \lambda y^2 + 2z^2 - 4xy - 2xz + 6yz = \bar{x}^2 + 4y^2 + z^2 + 4y\bar{x} + 2\bar{x}z + 4yz \\ + \lambda y^2 + 2z^2 - 4xy - 2xz + 6yz = \bar{x}^2 + (4+\lambda)y^2 + 3z^2 + 2z(-2y - z) + 4y(-2y - z) + 10yz = \\ \bar{x}^2 + (\lambda - 4)y^2 + z^2 + 2yz. \quad (1) \end{aligned}$$

Macierz Q w nowej bazie to

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jeżeli $\lambda \neq 4$, to $\bar{\alpha}_{22} \neq 0$ i wprowadzamy nową zmiannę zmiennych:

$$\bar{y} = y + \frac{\bar{\alpha}_{23}}{\bar{\alpha}_{22}} z = y + \frac{1}{\lambda - 4} z.$$

Więc,

$$Q(\mathbf{v}) = \bar{x}^2 + (\lambda - 4)\left(\bar{y} - \frac{1}{\lambda - 4} z\right)^2 + z^2 + 2z\left(\bar{y} - \frac{1}{\lambda - 4} z\right) =$$

i

$$Q(\mathbf{v}) = \bar{x}^2 + (\lambda - 4)\left(\bar{y}^2 + \frac{1}{(\lambda - 4)^2} z^2 - 2\frac{\bar{y}z}{\lambda - 4}\right) + z^2 + 2z\bar{y} - \frac{2z^2}{\lambda - 4} = \bar{x}^2 + (\lambda - 4)\bar{y}^2 + \frac{\lambda - 5}{\lambda - 4} z^2$$

Widać, że dla $\lambda > 5$, Q jest dodatnio określona i signaura jest $(3, 0)$. Kiedy $\lambda = 5$, macierz ma rząd 2, jest zdegenerowana i ma signaturę $(2, 0)$. Forma kwadratowa Q jest nieokreślona kiedy $\lambda \leqslant 5$. Ponadto, kiedy $4 < \lambda < 5$ signatura jest $(2, 1)$. Kiedy $\lambda < 4$, signatura jest $(2, 1)$.

Jeżeli $\lambda = 4$, to $\bar{\alpha}_{22} = 0$ musimy wprowadzić inną zmianną zmiennych. Najpierw trzeba zdefiniować $\bar{y} = y + z$ i $\bar{z} = y - z$. Wtedy, $y = (\bar{y} + \bar{z})/2$ i $z = (\bar{y} - \bar{z})/2$ i z (1) wynika, że

$$Q(\mathbf{v}) = \bar{x}^2 + z^2 + 2yz = \bar{x}^2 + (\bar{y} - \bar{z})^2/4 + (\bar{y}^2 - \bar{z}^2)/2 = \bar{x}^2 + 3\bar{y}^2/4 - \bar{z}^2/4 - \bar{y}\bar{z}/2.$$

Macierz Q jest teraz

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Skoro $\bar{\bar{\alpha}}_{22} \neq 0$ możemy wprowadzać zmiannę zmiennych

$$\bar{\bar{y}} = \bar{y} + \frac{\bar{\bar{\alpha}}_{23}}{\bar{\bar{\alpha}}_{22}} \bar{z} = \bar{y} - \frac{1}{3} \bar{z}.$$

Więc,

$$Q(\mathbf{v}) = \bar{x}^2 + \frac{3}{4}\left(\bar{\bar{y}} + \frac{1}{3}\bar{z}\right)^2 - \frac{\bar{z}^2}{4} - \frac{1}{2}\bar{z}\left(\bar{\bar{y}} + \frac{1}{3}\bar{z}\right) = \bar{x}^2 + \frac{3}{4}\bar{\bar{y}} - \frac{1}{3}\bar{z}^2.$$

Wówczas, Q ma signaturę $(2, 1)$ dla $\lambda = 4$.

Zadanie 2. Zdefiniuj iloczyn skalarny na zespolonej przestrzeni wektorowej oraz podaj wzór na metrykę indukowaną przez iloczyn skalarny (4 punkty). W przestrzeni $\mathbb{C}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym, podaj bazę ortonormalną podprzestrzeni generowanej przez wektory

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(6 punktów).}$$

Rozwiązanie: Widać, że $e_1 = e_2 + e_3$. Więc, przestrzeń $V \subset \mathbb{C}^4$ zgenerowana przez e_1, e_2 i e_3 jest zgenerowana przez e_2 i e_3. Wówczas, aby obliczyć bazę ortonormalną podprzestrzeni V, wystarczy ortonormalizować e_2 i e_3. Stosujemy metodę Grama–Schmidta:

$$\widetilde{e}_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \frac{e_3}{\sqrt{2}}.$$

Natomiast,

$$\widetilde{e}_2 = \frac{e_2 - \langle \widetilde{e}_3, e_2 \rangle \widetilde{e}_3}{\sqrt{\langle e_3, e_3 \rangle}}.$$

Widać, że $\langle \widetilde{e}_3, e_2 \rangle = 0$. Wówczas,

$$\widetilde{e}_2 = \frac{e_2}{\sqrt{\langle e_2, e_2 \rangle}} = \frac{e_2}{\sqrt{2}}.$$

Więc, wektory $\widetilde{e}_2$ i $\widetilde{e}_3$ tworzą bazę podprzestrzeni V.

Zadanie 3. Zdefiniuj sprzężenie hermitowskie endomorfizmu skończeniewymiarowej zespolonej przestrzeni wektorowej, oraz udowodnij że wartości własne endomorfizmu samosprzężonego są rzeczywiste (4 punkty). W przestrzeni $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym macierz endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ w bazie kanonicznej ma postać:

$$F := \begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}.$$

Oblicz wartości własne f (3 punkty), oraz zbadaj czy f jest endomorfizmem: a) normalnym, b) hermitowskim, c) unitarnym (3 punkty).

Rozwiązanie: Wartości własne F są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego F, czyli

$$p_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4+3i-\lambda & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i-\lambda & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Zamiast obliczyć wyznacznika (to trzwa dlugo i można łatwo się mylić) pamiętamy, że

$$p_F(\lambda) = (-1)^3\lambda^3 + (-1)^{3+1}\mathrm{Tr}\, F\, \lambda^2 + c\,\lambda + \det F = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + c\lambda + \det\, F. \tag{2}$$

Więc,

$$\det F = \begin{vmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{vmatrix} \overset{K1+iK2\to K1}{=} \begin{vmatrix} 3i & 4i & -6-2i \\ 3 & 4-3i & -2-6i \\ 12 & -2-6i & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{iR1+R2\to R2 \\ 4iR1+R3\to R3}}{=}$$

$$\det F = \begin{vmatrix} 3i & 4i & -6-2i \\ 0 & -3i & -12i \\ 0 & -18-6i & 9-24i \end{vmatrix} = 3i \left| \begin{pmatrix} -3i & -12i \\ -18 & 9 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot 243 = 729.$$

Widać, że

$$c = \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} p_F(\lambda) = -\begin{vmatrix} 4-3i & -2-6i \\ -2-6i & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4+3i & -6-2i \\ 6+2i & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4+3i & 4i \\ -4i & 4-3i \end{vmatrix} = -81.$$

Też widać, że takie wyrazy są jedyne które pojawiają sie w $p_F(\lambda)$ z λ. Wówczas,

$$p_F(\lambda) = (-1)^3\lambda^3 + (-1)^{3+1}\mathrm{Tr}\, F\,\lambda^2 + c\,\lambda + \det F = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 = -(\lambda - 3^2)(81 + \lambda^2).$$

To $\mathrm{spec}_{M_3(\mathbb{C})}F = \{9, 9i, -9i\}$.

Macierz F w bazie kanonicznej jest hermitowska, gdy $F_{ij} = \bar{F}_{ij}$ dla $i, j = 1, 2, 3$. Z tego $F_{ii} = \bar{F}_{ii}$ dla $i = 1, 2, 3$. Więc, kiedy macierz F jest hermitowska, to elementy w diagonale są liczbami rzeczywistymi. Skoro F nie spełnia takiego warunku, F nie jest hermitowska. Ponadto, wartości własne F nie są rzeczywiste, to też F nie może być hermitowska.

Macierz F jest unitarna wtedy i tylko wtedy $F^*F = \mathrm{I}$. W naszym przypadku

$$F^*F = \begin{vmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{vmatrix} = 81I. \tag{3}$$

Więc, F nie jest unitarna. Ponadto, macierze unitarne mają wartości własne λ takie, że $|\lambda| = 1$. Skoro $\mathrm{spec}_{M_3(\mathbb{C})}F = \{9, -9i, 9i\}$, to F nie jest unitarna. Natomiast, widać z (3), że $F^* = 81F^{-1}$. Wówczas, $F^*F = FF^* = 81I$ i F jest normalna.

Zadanie 4. Niech V będzie dowolną zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny. Udowodnij że, jeżeli endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ posiada bazę ortonormalną wektorów własnych, to jest on endomorfizmem normalnym (4 punkty). Niech $\mathbb{C}^3$ będzie wyposażona w standardowy iloczyn skalarny. Oblicz spektrum, wymiary podprzestrzeni własnych, oraz podaj bazę ortonormalną wektorów własnych endomorfizmu $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ którego macierz w bazie kanonicznej jest postaci

$$f_{BB} := \begin{pmatrix} 0 & 4i & 0 \\ -4i & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(6 punktów).}$$

Rozwiązanie: Aby znaleź ć bazę ortonormalną musimy obliczyć wielomian charakterystyczny. Korzystając z (2) mamy

$$p_f(\lambda) = -\lambda^3 + c\lambda,$$

gdzie

$$c = \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} p_F(\lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 4i \\ -4i & 0 \end{vmatrix} = 25.$$

Wieć, $p_f(\lambda) = -\lambda^3 + 25\lambda$ i $\mathrm{spec}_{M_3(\mathbb{C})}f_{BB} = \{0, -5, 5\}$. Wektory własne obliczymy następująco:

Wektory własne z wartością $\lambda = 0$ to są elementy przestrzeni

$$\ker f_{BB} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 4i & 0 \\ -4i & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Więc, $v = (x, y, z)^T \in \ker f_{BB}$ wtedy i tylko wtedy

$$\begin{pmatrix} 0 & 4i & 0 \\ -4i & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem $y = 0$ i $-4ix + 3z = 0$. Wówczas, $\ker f_{BB} = \langle (3,0,4i)^T \rangle$ i mamy jeden wektor własne $|0\rangle = (3,0,4i)^T$.

Wektory własne z wartością $\lambda = -5$ to są elementy przestrzeni

$$\ker(f_{BB} + 5I) = \ker \begin{pmatrix} 5 & 4i & 0 \\ -4i & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Więc, $v = (x,y,z)^T \in \ker f_{BB}$ wtedy i tylko wtedy

$$\begin{pmatrix} 5 & 4i & 0 \\ -4i & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skoro macierz 3×3 po lewej stronie ma wyznacznik różny od zera, jedno rownanie układu jest liniową kombinacją innych i nie trzeba rozpatriwać niej. Na przekład, tylko trzeba rozpatrywać pierwsze i trzeci wiersze. Więc,

$$5x + 4iy = 0 \qquad 3y + 5z = 0.$$

Z tego, $y = 5x/(4i)$ i $z = 3y/5$. Więc, $\ker(f_{BB} + 5I) = \langle (4i, -5, 3)^T \rangle$.

$$\ker(f_{BB} + 5I) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 4i & 0 \\ -4i & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Więc, $v = (x,y,z)^T \in \ker(f_{BB} - 5i)$ wtedy i tylko wtedy

$$\begin{pmatrix} -5 & 4i & 0 \\ -4i & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skoro macierz 3×3 po lewej stronie ma wyznacznik różny od zera, jedno rownania układu jest liniową kombinacją innych i nie trzeba rozpatriwać niej. Naprzekład, tylko trzeba rozpatriwać pierwsze i trzeci wiersze. Więc,

$$-5x + 4iy = 0 \qquad 3y - 5z = 0.$$

Z tego, $y = -5x/(4i)$ i $z = 3y/5$. Więc, $\ker(f_{BB} + 5I) = \langle (4i, 5, 3)^T \rangle$.

Skoro f_{BB} jest hermitowska, jej wektory własne w wartościami róznimy są ortogonalne. Więc, wystarczy podzielić każde wektor przez jego norma, aby tworzyć bazę wektorów własnych:

$$|0\rangle := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4i \end{pmatrix}, \qquad |-5\rangle := \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4i \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad |5\rangle := \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4i \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$