Algebra z geometrią 2012/2013

Ustne, 20 IV 2013 r.

Chciemy obliczyć

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Niech będzie

$$v_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Można widać, że

$$v_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} + b_{n-1} \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad dla\ n > 0.$$

Wówczas,

$$b_n = a_{n-1}, \qquad a_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \qquad dla\ n > 0.$$

Więc,

$$b_n = a_{n-1}, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad dla\ n > 1.$$

Skoro $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ i $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$, to można zauważać, że a_n to $n+2$-wyraz szeregu Fibonaciego:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 2, \quad f_4 = 3, \quad f_5 = 5 \dots \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Więc,

$$v_n = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Możemy obliczyć rozwiązanie równania iteracyjnego $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $f_0 = 1$ i $f_1 = 1$, aby ustalić wartość f_n. Równanie charakterystyczne rownania iteracyjnego

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad n \geqslant 2, \tag{1}$$

to

$$r^2 = r + 1.$$

To równanie wynika z założeniu, że $f_n = r^n$ dla pewnej $r \neq 0$ w (1). Wielomian charakterysztyczny ma rozwiązania

$$r^2 = r + 1 \Rightarrow r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ta liczba $\varphi = r_+$ jest bardzo ważna, to *liczba zólta*. Kiedy wielomian charakterystyczny ma dwa inne rozwiązania, to rozwiązanie równania iteracyjnego ma postać

$$f_n = \lambda_1 r_+^n + \lambda_2 r_-^n.$$

Skoro $f_0 = 0$ i $f_1 = 1$ dla szeregu Fibonaciego, to $\lambda_1 = 1/\sqrt{5}, \lambda_2 = -1/\sqrt{5}$. Więc,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi)^n.$$

i

$$v_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi)^{n+2} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi)^{n+1}. \end{pmatrix}.$$

Oczywiscie, zawsze można obliczyć A^n za pomocą zmiany bazy dla A.