Zadanie 4

Chcemy udowodnić, że $(\oplus_N R)^* = \prod_N R^*$. Aby to zrobić, będziemy zdefiniować izomorfizm

$$\phi : (\oplus_N R)^* \xrightarrow{\sim} \prod_N R^*.$$

Trzeba pamiętać, że

$$\prod_N R = R \times R \times R \times \ldots$$

i, że $\oplus_N R$ to podprzestrzeń przestrzeni $\prod_N R$ złożona z elementów $\prod_N R$ postaci

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

takich, że tylko skończone wiele elementów (a_i) są różne od zera. Więc, np.

$$(\underset{\in R}{1}, \overset{\in R}{1}, 0, 0, \ldots) \in \oplus_N R$$

$$(1, 1, 1, 1, \ldots) \notin \oplus_N R.$$

Teraz, zdefiniujemy

$$\phi : (\oplus_N R)^* \xrightarrow{\sim} \prod_N R^*$$

$$\omega \longmapsto \phi(\omega) = (\overset{R^*}{\omega_1}, \overset{R^*}{\omega_2}, \omega_3, \ldots)$$

gdzie $\omega_i(v_i) = \omega(0, 0, 0, \ldots 0, \underset{\uparrow\ \text{i-tej pozycji}}{v_i}, 0, \ldots \ldots)$, $\quad v_i \in R$.

Z definicji, można zauważyć, że ϕ jest odwzorowaniem liniowym. Można widać, że $\phi(\omega)=0 \Rightarrow \omega=0$, czyli ϕ jest injekcją. Właśnie,

$$\phi(\omega) = (\omega_1,\omega_2,\omega_3,\dots)=0 \Rightarrow \omega_i=0 \quad \text{dla } i=1,2,3\dots$$

Więc, dla tej ω: ω jest liniowa.

$$\begin{aligned}\omega(a_1,a_2,a_3\dots) &= \omega(a_1,0,\dots 0\dots) + \\ &\quad \omega(0,a_2,0\dots) + \\ &\quad \omega(0,0,a_3,\dots) + \\ &\quad \dots \\ &= \omega_1(a_1)+\omega_2(a_2)+\omega_3(a_3)+\dots \\ &= 0+0+0+\dots \\ &= 0.\end{aligned}$$

z definicji $\omega_i=0$ dla $\phi(\omega)=0$

Czyli, $\omega=0$. i ϕ jest injekcją. Ponadto, można widać, że ϕ jest surjekcją. Dane dowolne $(\omega_1,\omega_2\dots)\in\prod_N R^*$, zdefiniujemy $\omega\in(\bigoplus_{i\in N}^{\infty} R)^*$ postaci

$$\omega(a_1,a_2,a_3\dots) = \omega_1(a_1)+\omega_2(a_2)+\omega_3(a_3)+\dots \qquad (3)$$

Skoro $(a_1,a_2,a_3,\dots)\in\bigoplus_N R$ tylko skończone wiele a_i są różne od zera i prawa strona (3) zawsze jest mniejsza od nieskończoności (do dlatego trzeba napisać $\bigoplus_N R$).

Teraz, można widać, że

$$\phi(\omega) = (\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\dots)$$

więc ϕ jest surjekcją i $\phi: (\bigoplus_N R)^*\cong\prod_N R^*$.

Dane

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$$

To

$$\mathrm{Im}\, T = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Szukamy bazy tej przestrzeni: Oczywiście, trzeci wektor możemy wykreślić bo się powtarza.

$$\mathrm{Im}\, T = \left\langle \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \right\rangle$$

Można widać, że $v_1 = (v_2 - v_3)/2$. więc są liniowo zależne i możemy wykreślić v_1.

$$\mathrm{Im}\, T = \left\langle \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \right\rangle$$

Wektory v_2 i v_3 są liniowo niezależne, np.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 5 & 1 \\ 5 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix} \longrightarrow$$ Wyznacznik różny od zera.

Teraz, możemy obliczyć jądro. T

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x + 2y + z = 0 \\ 2y + 2t = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = +2t - z \\ y = -t \end{matrix} \Rightarrow \ker T = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

t, z dowolne

~~Ter~~ Teraz

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

są liniowo niezależne, bo

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= \cancel{18} \; 18 \neq 0.$ $\quad \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ są liniowo niezależne $\Rightarrow$

$$\dim \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4 \rangle = 4$$

$$\dim V_1 + V_2 = 4 = \underbrace{\dim V_1}_{2} + \underbrace{\dim V_2}_{2} - \dim V_1 \cap V_2$$

$\Rightarrow \dim V_1 \cap V_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \cancel{\emptyset} \{0\}.$

Więc $\boxed{V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4}$.

Musimy ~~zdefiniować~~ napisać macierz rzutu $\pi : V_1 \cancel{\oplus} V_2 \to V_1$

czyli $\pi|_{V_1} = \mathrm{Id}|_{V_1}$ i $\pi|_{V_2} = 0$.

W bazie $B' = \langle \underbrace{\bar{e}_1, \bar{e}_2}_{V_1}, \underbrace{\bar{e}_3, \bar{e}_4}_{V_2} \rangle$ macierz π jest

$$M^{\pi}_{B'B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \Rightarrow M^{\pi}_{BB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

zmiana bazy od B' do B

zmiana bazy od B do B'!

$$M^{\pi}_{BB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} & -\frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}.$$

$$M_{BB}^{\pi} = \begin{pmatrix} -1/9 & \frac{1}{3} & -1/9 & 5/9 \\ 5/9 & 1/3 & 5/9 & -7/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -5/9 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

Jak trzeba. można widać, że

$$M_{BB}^{\pi}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad M_{BB}^{\pi}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{BB}^{\pi}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M_{BB}^{\pi}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wszystko działa :).

Druga metoda:

$B'^{*} = \{ \bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3, \bar{e}^4 \}$

Baza dualna do $B' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ ~~to~~ (we współrzędnych bazy kanonicznej) można obliczyć jako rozwiązanie układu

e_z

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{e}^1_i = w_{i1}e^1 + w_{i2}e^2 + w_{i3}e^3$

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/18 & \frac{1}{6} & -1/18 & 5/18 \\ 5/18 & 1/6 & 5/18 & -7/18 \\ 5/9 & -2/3 & 5/9 & -7/9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Druga metoda (niezrobiona na zajęciach).

Teraz Pamiętać $(\bar{e}_1 \otimes \bar{e}^1)(v) = e_1 \underbrace{\bar{e}^1(v)}_{\text{liczba}}$.

$$\pi = \bar{e}_1 \otimes \bar{e}^1 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}^2$$

Właśnie

$$\pi(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 \cdot \underbrace{\bar{e}^1(\bar{e}_1)}_{1} + \bar{e}_2 \cdot \underbrace{\bar{e}^2(\bar{e}_1)}_{0} = \bar{e}_1$$

$$\pi(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 \cdot \underbrace{\bar{e}^1(\bar{e}_2)}_{0} + \bar{e}_2 \; \bar{e}^2(\bar{e}_2) = \bar{e}_2$$

$$\pi(\bar{e}_3) = \bar{e}_1 \cdot \underbrace{\bar{e}^1(\bar{e}_3)}_{0} + \bar{e}_2 \cdot \underbrace{\bar{e}^2(\bar{e}_3)}_{0} = 0$$

$$\pi(\bar{e}_4) = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}^1(\bar{e}_4) + \bar{e}_2 \cdot \underbrace{\bar{e}^2(\bar{e}_4)}_{0} = 0.$$

$$\pi^q = \bar{e}_1 \otimes \bar{e}^1 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}^2 \Rightarrow \cancel{(2\ 0\ 2\ -1)}$$

$$= \cancel{\left(-\tfrac{1}{18}\ \tfrac{1}{6}\ -\tfrac{1}{18}\ \tfrac{5}{18}\right)}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left(-\tfrac{1}{18}\ \tfrac{1}{6}\ -\tfrac{1}{18}\ \tfrac{5}{18}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\tfrac{5}{18}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{5}{18}\ -\tfrac{7}{18}\right)$$

$$M^q_{BB} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{18} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{18} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{18} & \frac{25}{18} \\ -\frac{5}{18} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{18} & \frac{25}{18} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{6} & \frac{5}{18} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{5}{18} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} & -\frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

Jak wcześniej!!