Algebra z geometrią 2012/2013

Kartkówka V

Zadanie 1. Niech $f\colon M \to N$ będzie dowolnym surjektywnym odwzorowaniem liniowym. Udowodnij że odwzorowanie transponowane $f^T\colon N^* \to M^*$ jest injektywne. Niech $V := \mathbb{R}_2[x]$ będzie przestrzenią rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia większego niż 2. Pokaż że funkcjonały liniowe $\omega^i \in V^*$ $(i = 0, 1, 2)$ określone wzorem

$$\omega^i(v) = v'(i) - v(i), \qquad v \in V,$$

tworzą bazę przestrzeni V^*. Znajdź bazę E przestrzeni V do której $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ jest bazą dualną. Oblicz macierz endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ danego wzorem $(f(v))(x) = v'(x) + v(x)$ w bazie E oraz macierz endomorfizmu transponowanego $f^T \in \mathrm{End}(V^*)$ w bazie $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$.

Zadanie 2. Dana przestrzeń $\mathbb{C}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym, znaleźć bazę ortonormalną podprzestrzeni generowanej przez wektory

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$