Ciała i wielomiany

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Załóż, że $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ jest ciałem i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Które z następujących właściwości są prawdą?

1. $0 \cdot \alpha = 0$.
2. $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$.
3. Każdy element zbioru $\mathbb{F}$ ma tylko jeden element przeciwny.
4. Każdy element $\alpha \neq 0$ zbioru $\mathbb{F}$ ma tylko jeden element odwrotny.
5. $(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$.
6. $1 + 1 \neq 0$.
7. Jeżeli $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$, to $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

Ćwiczenie 2. Udowodnij, że $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot, 1, 0)$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy p jest liczbą pierwszą.

Ćwiczenie 3. Niech $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ będzie ciałem. Funkcją wymierną o współczynnikach w $\mathbb{F}$ nazywamy formalny napis postaci

$$f = \frac{f_1(\mathfrak{X})}{f_2(\mathfrak{X})},$$

gdzie $f_1(\mathfrak{X})$ i $f_2(\mathfrak{X})$ są wielomiany o współczynnikach w $\mathbb{F}$ i $f_2(\mathfrak{X}) \neq 0$. Ponadto, mówimy, że $f = g$, gdy $f_1(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X}) = g_1(\mathfrak{X}) \cdot f_2(\mathfrak{X})$. Zbiór funkcji wymiernych można wyposażyć w dodawanie i mnożenie

$$h + g = \frac{h_1(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X}) + h_2(\mathfrak{X}) g_1(\mathfrak{X})}{h_2(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X})}, \qquad h \cdot g = \frac{h_1(\mathfrak{X}) \cdot g_1(\mathfrak{X})}{h_2(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X})}.$$

Udowodnij, że zbiór funkcji wymiernych o współczynnikach w $\mathbb{F}$ jest ciałem względem tych działań.

Ćwiczenie 4. Dane wielomiany

$$f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + \mathfrak{X}^4 + \mathfrak{X}^3 + 3\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X} + 1, \qquad f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X} + 1, \qquad f_3(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 1$$

w $\mathbb{R}[\mathfrak{X}]$, oblicz resztę podzielenia f_1 przez f_2 i f_3 za pomocą twierdzenia dzielenia wielomianów. Oblicz resztę gdy zakładamy, że $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{Z}_5[\mathfrak{X}]$.