Liczby zespolone i liniowa zależność

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ćwiczenie 2. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Wykazać, że

$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n| \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \exists z \neq 0 : \exists r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}_+ : \\ z_j = r_j z \text{ dla } j \in 1, \ldots, n \end{array} \right).$$

Ćwiczenie 3. Oblicz wyrażenie

$$\frac{(1 + i \operatorname{ctg} \varphi)^{19}}{(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)^{19}}.$$

Ćwiczenie 4. Dowieść, że wektory

$$\begin{bmatrix} 326 \\ 471 \\ 797 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 263 \\ 714 \\ 977 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 632 \\ 147 \\ 779 \end{bmatrix}$$

w $\mathbb{R}^3$ są liniowo zależne.

Ćwiczenie 5. Dowieść, że wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ a_1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

w $\mathbb{R}^4$ są liniowo zależne.