# Liczby zespolone, liniowa zależność i bazy

Javier de Lucas

**Ćwiczenie 1.** Dowieść, że jeśli $\mu := c\bar{d} - d\bar{c} \neq 0$, to homografia $h(x) = (ax+b)/(cx+d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, odwzorowuje oś rzeczywistą $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ na okrąg

$$C\left(\frac{a\bar{d} - b\bar{c}}{\mu}; \left|\frac{ad - bc}{\mu}\right|\right)$$

z usuniętym punktem $a/c = \lim_{x\to\infty} h(x) = h(\infty)$.

**Ćwiczenie 2.** Niech układ $e_1, \ldots, e_n$, gdzie $n \geq 3$, będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni wektorowej $V$. Dowieść, że układ $e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_n + e_1$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n$ jest nieparzysta.

**Ćwiczenie 3.** Niech $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ funkcji rzeczywistych jednej zmiennej. Zbadać liniową zależność układu funkcji $\sin\phi, \cos\phi, \sin 2\phi, \cos 2\phi, \sin 3\phi$ i $\cos 3\phi$.

**Ćwiczenie 4.** Dowieść, że ciągi geometryczne $\Gamma(u) := (u, u^2, u^3, \ldots)$ przy $u$ przebiegającym $\sqrt[n]{1}$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\Omega_n \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ nad $\mathbb{C}$ złożonej z ciągów okresowych z okresem $n$, tzn. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ takich, że $\forall k : x_{k+n} = x_k$.

**Ćwiczenie 5.** Niech $n \in \mathbb{N}$. Sprawdzić, że wielomiany $v_k(t) = t^k + t^{k-1}$, dla $k = 1, \ldots, n$, tworzą bazę przestrzeni liniowej (nad $\mathbb{K}$) $W = \{v \in \mathbb{K}_n[\cdot] : v(-1) = 0\} \subset \mathbb{K}_n[\cdot]$, gdzie $\mathbb{K}_n[\cdot]$ to zbiór wielomianów stopnia $n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$.

**Ćwiczenie 6.** W zależności od $p \in \mathbb{R}$ zbadać liniową niezależność nad $\mathbb{R}$ trójki wektorów

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1+2p \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} p \\ 5 \\ 3+p \\ -3p \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 10+p \\ -13 \end{bmatrix}.$$

**Ćwiczenie 7.** Udowodnij, że wektory

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tworzą bazę $\mathbb{R}^3$ i napisz współrzędne wektora $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ w tej bazie.