Podprzestrzeń wektorowa, baza, suma prosta i wymiar

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Niech $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\}$. Czy W jest podprzestrzenią gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? A kiedy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$? Podaj wymiar W gdy jest podprzestrzenią.

Ćwiczenie 2. Niech $W = \{w \in \mathbb{R}_4[\mathfrak{X}] : w(-1) = w(1), , w'(-1/\sqrt{3}) + w'(1/\sqrt{3}) = 0\}$, gdzie w' to pochodna wielomianu w i $\mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$ to przestrzeń liniowa wielomianów aż do stopnia 4. Sprawdzić, że W jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$, znaleźć jakąś bazę W i obliczyć $\dim W$.

Ćwiczenie 3. Niech $W = \{w \in \mathbb{R}_4[\mathfrak{X}] : w(-p) = w(p), , w'(1) + w'(-1) = 0\}$ dla $p \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, że W_p jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$, znaleźć jakąś bazę W i obliczyć $\dim W_p$. Dodatkowo, uzupełnij bazę W do bazy $\mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$.

Ćwiczenie 4. Dane przestrzenie liniowe $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}_3[\mathfrak{X}]$, zdefiniujemy $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[\mathfrak{X}]$ postaci

$$\Phi(a, b, c, d) = [\Phi(a) + \Phi(b) - \Phi(c)]\mathfrak{X}^3 + \Phi(b)\mathfrak{X}^2 + [\Phi(c) + \Phi(a)]\mathfrak{X} + \Phi(d).$$

Czy Φ jest izomorfizmem?

Ćwiczenie 5. Dana przestrzeń liniowa $\mathbb{K}_m^n$ macierzy $m \times n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$, rząd macierzy to maksymalny zbiór liniowo niezależnych kolumn. Oblicz rząd macierzy

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

o współczynnikach w $\mathbb{R}$.

Ćwiczenie 6. Podaj bazę podprzestrzeni V_1, V_2 przestrzeni $\mathbb{R}^5$ postaci

$$V_1 = \langle (0, 1, 2, 3, 1), (0, 1, 3, 4, 0), (0, 4, 9, 13, 3) \rangle,$$
$$V_2 = \langle (1, 1, 2, 3, 1), (1, 0, 3, 4, 0), (1, 2, 1, 2, 2), (3, -1, 7, 9, -1), (0, 2, 5, 7, 1) \rangle.$$

Oblicz $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$ i sprawdź, że

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$