## Anihilator i iloczyn tensorowy

Javier de Lucas

W następujących zadaniach uogólnie zakładamy, że wszystkie podprzestrzeni należą do przestrzeni wektorowej skończonego wymiaru.

**Ćwiczenie 1.** Dane przestrzeni wektorowe $\mathbb{C}^5$ i podprzestrzeń liniowa

$$Y = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

oblicz $Y^\circ$ i $\dim Y^\circ$. Sprawdź, że $\dim Y^\circ = \dim \mathbb{C}^5 - \dim Y$.

**Ćwiczenie 2.** Niech $Y_1, Y_2$ będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej $V$. Udowodnij, że: a) $(Y_1 + Y_2)^\circ = Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$, b) $Y^{\circ\circ} = Y$, c) Jeżeli $Y_1 \subset Y_2$, to $Y_2^\circ \subset Y_1^\circ$, d) $(Y_1 \cap Y_2)^\circ \supset Y_1^\circ + Y_2^\circ$ gdy $\dim V = \infty$ i $(Y_1 \cap Y_2)^\circ = Y_1^\circ + Y_2^\circ$ gdy $\dim V < \infty$.

**Ćwiczenie 3.** Niech $W_1$, $W_2$ będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^5$ postaci

$$W_1 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_5 = 0\},$$
$$W_2 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = 0, x_1 + x_2 + 3x_5 = 0\}.$$

Oblicz $W_1^\circ$, $W_2^\circ$, $W_2^\circ + W_1^\circ$, $W_1 \cap W_2$ i $(W_1 \cap W_2)^\circ$ i $(W_1 + W_2)^\circ$.

**Ćwiczenie 4.** Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru nad $\mathbb{R}$. Udowodnij, że $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.