

Odwzorowania liniowe i ich macierze

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Odwzorowanie liniowe $F \in \text{End } \mathbb{R}_n[t]$ dane jest wzorem $(Fw)(t) = (t+1)w'(t)$, gdzie $w \in \mathbb{R}_n[t]$ i w' to jego pochodna po t . Znaleźć macierz $[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ operatora F w bazie $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$; znaleźć $\ker F$, $\text{im } F$ i $\text{rk } F$ oraz zbadać, czy F jest izomorfizmem.

Ćwiczenie 2. Niech $\mathbb{R}_2[x, y]$ oznacza przestrzeń wielomianów stopnia mniejszego/równego 2 zmiennych x, y o współczynnikach rzeczywistych. Jaki jest wymiar $\mathbb{R}_2[x, y]$? Znaleźć jakąś bazę $\mathbb{R}_2[x, y]$ i związane z tą bazą macierze odwzorowań:

$$F : w \mapsto \frac{\partial w}{\partial x}, \quad G : w \mapsto \frac{\partial w}{\partial y}, \quad H : w \mapsto \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Ćwiczenie 3. Oblicz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2i & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ćwiczenie 4. Dane macierze

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

oblicz A^{-1} i B^{-1} jeżeli to możliwe.

Ćwiczenie 5. Dane odwzorowanie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, którego macierz w bazach kanonicznych \mathcal{B} ma postać

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

oblicz jego macierz $[F]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ w bazach \mathcal{B}_1 i \mathcal{B}_2 danych wzorami

$$\mathcal{B}_1 \equiv \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 \equiv \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$