Dodatkowe zadania

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Udowodnij, że suma wszystkich pierwiastków z wielomianu $f_n(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest równa zeru.

Ćwiczenie 2. Dany wielomian $\sum_{k=0}^{n} a_k \mathfrak{X}^n$ o współczynnikich w ciele $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ z pierwiastkami $x_1, \ldots, x_n$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{k<k'=1}^{n} x_k x_{k'} = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \sum_{k<k'<k''=1}^{n} x_k x_{k'} x_{k''} = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \quad \prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Te wzory to część tzw wzorów Viete'a.

Ćwiczenie 3. Oblicz resztę z dzielenia następujących wielomianów:

- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^7 - 4\mathfrak{X}^6 + \mathfrak{X}^5 + 5\mathfrak{X}^4 + 5\mathfrak{X}^3 - 5\mathfrak{X}^2 + 10\mathfrak{X} - 7$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 6\mathfrak{X}^2 + 11\mathfrak{X} - 6$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^9 - 8\mathfrak{X}^8 + 15\mathfrak{X}^7 + 5\mathfrak{X}^4 + 9\mathfrak{X} - 16$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 9\mathfrak{X}^2 + 23\mathfrak{X} - 15$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^8 - 9\mathfrak{X}^7 + 24\mathfrak{X}^6 - 24\mathfrak{X}^5 + 24\mathfrak{X}^4 - 24\mathfrak{X}^3 + 24\mathfrak{X}^2 - 22\mathfrak{X} + 16$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 8\mathfrak{X} + 15$.

Ćwiczenie 4. Ustal a, b i c aby wielomian o współczynnikach w $\mathbb{R}$ dany wzorem

$$\begin{aligned} f_1(\mathfrak{X}) &= \mathfrak{X}^7 - (a+b+c)\mathfrak{X}^6 + \mathfrak{X}^5(3+ab+ac+bc) - (3a+3b+3c-abc)\mathfrak{X}^4 \\ &+ (2+3ab+3ac+3bc)\mathfrak{X}^3 - (2a+2b+2c+3abc)\mathfrak{X}^2 + 2(ab+bc+ac)\mathfrak{X} - 2abc \end{aligned} \tag{4.1}$$

aby był podzielny przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 6\mathfrak{X}^2 + 11\mathfrak{X} - 6$.

Ćwiczenie 5. Ustal n aby wielomian o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$ dany wzorem

$$f_n(\mathfrak{X}) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{X}^k$$

aby był podzielny przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 + 1$.

Ćwiczenie 6. Oblicz za pomocą algorytmu Euklidesa największy wspólny dzielnik między

- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 2\mathfrak{X}^4 - 22\mathfrak{X}^3 - 8\mathfrak{X}^2 + 117\mathfrak{X} - 90$, $\quad f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 14\mathfrak{X}^4 + 74\mathfrak{X}^3 + 184\mathfrak{X}^2 + 213\mathfrak{X} + 90$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 8\mathfrak{X}^4 + 8\mathfrak{X}^3 - 62\mathfrak{X}^2 - 153\mathfrak{X} - 90$, $\quad f_2(\mathfrak{X}) = 4 + 8\mathfrak{X} + 5\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}^3$.

Ćwiczenie* 7. Dane wielomiany

$$P(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + a\mathfrak{X}^3 + b\mathfrak{X}^2 + c\mathfrak{X} + 1, \qquad Q(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + c\mathfrak{X}^3 + b\mathfrak{X}^2 + a\mathfrak{X} + 1$$

Znajdź warunki dla liczb a, b i c, gdzie $a \neq c$, aby zagwarantować, że $P(\mathfrak{X})$ i $Q(\mathfrak{X})$ mają dwa wspólne pierwiastki. W takim przypadku, oblicz rozwiązania $P(\mathfrak{X}) = 0$ i $Q(\mathfrak{X}) = 0$.

Ćwiczenie* 8. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi różnymi od zera takimi, że $a + b + c \neq 0$ i

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Udowodnij, że

$$\frac{1}{a^{2013}} + \frac{1}{b^{2013}} + \frac{1}{c^{2013}} = \frac{1}{a^{2013} + b^{2013} + c^{2013}}.$$

Ćwiczenie 9. Niech $\mathbb{H}$ będzie zbiorem elementów postaci

$$q = x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad x, y, z, t, \in \mathbb{R}.$$

Na tym zbiorze zdefiniujemy dodawanie

$$q + q' = (x + x') + (y + y')\mathbf{i} + (z + z')\mathbf{j} + (t + t')\mathbf{k}, \qquad q' = x' + y'\mathbf{i} + z'\mathbf{j} + t'\mathbf{k} \in \mathbb{H}$$

i mnożenie które jest łączne i rozdzielne względem dodawania. Ponadto, mnożenie spełnia, że

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j},$$
$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad 1\mathbf{i} = \mathbf{i}1 = \mathbf{i}, \quad 1 \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j}1 = \mathbf{j}, \quad 1\mathbf{k} = \mathbf{k}1 = \mathbf{k}.$$

Udowodnij, że $(\mathbb{H}, +, \cdot, 1, 0)$ jest ciałem nieprzemiennym, czyli spełnia wszystkie właściwości ciała, ale mnożenie jest nieprzemienne. To nieprzemienne ciało jest znane jako zbiór kwaternionów.

Ćwiczenie 10. Udowodnij, że zbiór liczb postaci: $a + b\sqrt{2}$, gzie a, b są liczbami wymiernymi, jest ciałem liczbowym. Oznaczamy je $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Natomiast, udowodnij, że zbiór liczb postaci $a+b\sqrt[3]{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi, nie jest ciałem liczbowym. Pokazuj, że zbiór liczb postaci $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, gdzie a, b, c są liczbami ymiernymi, jest już ciałem liczbowym.

Ćwiczenie* 11. Zbuduj wszystkie ciała z pięcioma elementami.

Ćwiczenie* 12. Niech a będzie liczbą wymierną i niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Udowodnij, że wielomian o współczynnikach wymiernych

$$\mathfrak{X}^{2^n}(\mathfrak{X} + a)^{2^n} + 1$$

jest nierozkładalny.

Ćwiczenie* 13. Dane trzy liczby zespolone $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ nie na jednej linii, znajdź $z_0 \in \mathbb{C}$ taki, że $f(z_0) \leq f(z)$ dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$, gdzie

$$f(z) = |z_1 - z|^2 + |z_2 - z|^2 + |z_3 - z|^2.$$

Ćwiczenie 14. Znajdź odwrotność liczb zespolonych:

b) $\dfrac{1+i}{1-i} - (1+2i)(2+2i) + \dfrac{3-i}{1+i} + (\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i) - i^3$,

c) $2i(i-1) + \left(\overline{\sqrt{3}+i}\right)^3 + (1+i)\overline{(1+i)}$.

Ćwiczenie 15. Obliczyć wyrażenie

1. $\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{1410}$,

2. $\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)} + i^{101}\right]^{1993}$.

3. $\dfrac{(2-3i)^3 - (1+i)^2(5-i)}{(4-3i)^2 - i(1+2i)^3}$,

Ćwiczenie 16. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu nad ciałem $\mathbb{C}$

1. $-z^3 + (7+i)z^2 - (12+7i)z + 12i$,
2. $z^4 - 2z^3 + +(2-i)z^2 + 2iz - 2i$,
3. $z^6 - z^4 + z^2 - 1$.

Ćwiczenie 17. Rozwiązać równania:

1. $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$,
2. $i(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 3$,

Ćwiczenie* 18. Niech z będzie liczbą zespoloną taką, że $|z+1| > 2$. Udowodnij, że $|z^3 + 1| > 1$.

Ćwiczenie* 19. Niech k będzie dodatnią liczb a całkowitą. Niech $f(\mathfrak{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathfrak{X}^k$ będzie wielomian taki, że $a_k \in \{-1, 0, 1\}$ i podzielny przez $(\mathfrak{X}-1)^k$. Niech q będzie liczbą pierwszą taką, że $\frac{q}{\log(q)} < \frac{k}{\log(n+1)}$ Udowodnij, że każda liczba $w \in \mathbb{C}$ taka, że $w^q = 1$, jest pierwiatkiem wielomianu $f(\mathfrak{X})$.