ALGEBRA I R

Zadania do egzaminu

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Podać interpretację geometryczną liczby

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right),$$

gdzie z_1, z_2, z_3 są różnymi liczbami zespolonymi.

Ćwiczenie 2. Wykazać, że

$$|z_1 - z_2| \leq ||z_1| - |z_2|| + \min\{|z_1|, |z_2|\}|\arg z_1 - \arg z_2|.$$

Ćwiczenie 3. Załóżmy, że $\sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_k t}\varphi_k(t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ i $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)$ są wielomianami z $\mathbb{C}_n[t]$, zaś liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ są różnymi parami. Dowieść, że

$$\varphi_1 = \ldots = \varphi_r = 0.$$

Ćwiczenie 4. Oblicz wszystkie macierze $A \in M_3(\mathbb{C})$ takie, że $A^3 = 0$ i $A^2 \neq 0$.

Ćwiczenie 5. Dane odwzorowanie liniowe $F : \mathbb{C}^3 \to (\mathbb{C}^3)^*$ postaci

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

w bazach $\mathcal{B}$ (kanoniczna) i $\mathcal{B}^*$, oblicz macierz tego morfizmu w bazach $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}^*$, gdzie

$$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}.$$

Ćwiczenie 6. Wykaż, że $b : M_n(\mathbb{C}) \oplus M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ postaci $b(A,B) = \mathrm{Tr}(AB)$ to forma dwuliniowa. Dowieść, że funkcja $\hat{b} : A \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto b(A,\cdot) \in (M_n(\mathbb{C}))^*$ jest dobrze zdefiniowana i oblicz jej jądro.

Ćwiczenie 7. Niech $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem takim, że

$$T\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

i T działa jako identyczność na podprzestrzeni

$$W = \{v = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Podaj macierz morfizmu F w bazach kanonicznych.

Ćwiczenie 8. Dany operator $T : E \to F$, udowodnij, że $T = \iota \circ \phi \circ \pi$ gdzie

$$\pi : v \in E \mapsto [v] \in E/\ker T, \quad \phi : [v] \in \frac{E}{\ker T} \mapsto T(v) \in \mathrm{Im}T, \quad \iota : w \in \mathrm{Im}T \to w \in F$$

są odwzorowaniami liniowymi i ϕ jest izomorfizmem.

Ćwiczenie 9. Oblicz annihilator podprzestrzeni

$$W = \left\langle [0\ 3\ 1\ 0\ 1]^T, [2\ 3\ 1\ 0\ \ -2]^T, [2\ 3\ 1\ 0\ \ -1]^T \right\rangle$$

i sprzawdź czy $W^\circ \oplus V$ dla $V = \langle [1\ 1\ 2\ 0\ 1], [1\ 0\ 0\ 0\ 1], [0,0,1,0,0] \rangle$. Podaj macierz rzutowania na podprzestrzeń W° wzdłuż V (i odwrotnie) w bazach $\mathcal{B}^*$ gdzie $\mathcal{B}$ to baza kanoniczna w $\mathbb{R}^5$.