ALGEBRA I R

Kolokwium próbne II

<u>**Instrukcje:**</u> *Każde zadanie jest za 4 punktów. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce oraz być napisane starannie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione według schematu:* **nr zadania, imię i nazwisko, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**.

Ćwiczenie 1. Korzystając z algorytmu Euklidesa, ustal największy wspólny dzielnik wielomianów:

$$P(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 - 9\mathfrak{X}^4 + 19\mathfrak{X}^3 + 21\mathfrak{X} - 92\mathfrak{X} + 60, \qquad Q(\mathfrak{X}) = -4 - 4\mathfrak{X} + \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}^3.$$

Ćwiczenie 2. Ustal wszystkie $n \in \mathbb{N}$ takie, że wielomian $\sum_{k=0}^{n} \mathfrak{X}^k$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_3$ jest podzielny przez $\mathfrak{X} + 1$.

Ćwiczenie 3. Wykazać, że jeżeli $s = (z_1 + \ldots + z_n)/n$, to dla $z \in \mathbb{C}$ zachodzi tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 = n|z - s|^2 + \sum_{k=1}^{n} |z_k - s|^2.$$

Ćwiczenie 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określamy podprzestrzenie

$$U = \langle (1, 0, 1, 0), (-1, -2, 0, 1) \rangle, \qquad V = \langle (-1, 0, 1, -1), (2, 2, 0, 1) \rangle.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ i znaleźć rzut wektora $(4, 2, 4, 4)$ na podprzestrzeń U wzdłuż V.

Ćwiczenie 5. Wykazać, że w przestrzeni $\mathbb{C}^\infty$ następujące zbiory są poprzestrzeniami:

- Ciągi spełniające warunek Cauchyego: dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba $N \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n, k > N$ spełniona jest nierówność $|a_n - a_k| < \epsilon$.
- Ciągi spełniające warunek Hilberta: szereg $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ jest zbieżny.