KOLOKWIUM Z ALGEBRY I R

<u>**Instrukcje:**</u> *Każde zadanie jest za 4 punktów. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce oraz być napisane starannie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione według schematu:* **nr zadania, imię i nazwisko, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**.

Ćwiczenie 1. Ustal wszystkie liczby a, b i $c \in \mathbb{R}$ takie, że wielomian o współczynnikach rzeczywistych $\mathfrak{X}^5 + a\mathfrak{X}^4 + b\mathfrak{X}^3 + c\mathfrak{X}^2 + 1$ jest podzielny przez $\mathfrak{X}^3 - 2\mathfrak{X}^2 - 5\mathfrak{X} + 6$.

Dowód: Skoro suma współczynników wielomianu $Q(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 2\mathfrak{X}^2 - 5\mathfrak{X} + 6$ równa się zeru, to $Q(\mathfrak{X})$ ma pierwiastek 1. Widać, że

$$\mathfrak{X}^3 - 2\mathfrak{X}^2 - 5\mathfrak{X} + 6 = (\mathfrak{X} - 1)(\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{X} - 6) = (\mathfrak{X} - 1)(\mathfrak{X} - 3)(\mathfrak{X} + 2).$$

Wtedy, $P(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + a\mathfrak{X}^4 + b\mathfrak{X}^3 + c\mathfrak{X}^2 + 1$ jest podzielny przez $Q(\mathfrak{X})$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(\mathfrak{X})$ jest podzielny przez $\mathfrak{X} - 1$, $\mathfrak{X} - 3$ i $\mathfrak{X} + 2$. Z twierdzenia Bezouta, to się zdarza wtedy i tylko wtedy gdy $P(\mathfrak{X})$ ma pierwiastki $1, 3$ i -2. Więc, $P(\mathfrak{X})$ jest podzielny przez $Q(\mathfrak{X})$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{aligned} P(1) &= 2 + a + b + c = 0, \\ P(-2) &= -31 + 16a - 8b + 4c = 0, \\ P(3) &= 244 + 81a + 27b + 9c = 0. \end{aligned}$$

W postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 16 & -8 & 4 & 31 \\ 81 & 27 & 9 & -244 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -24 & -12 & 63 \\ 0 & -54 & -72 & -82 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -24 & -12 & 63 \\ 0 & 90 & 0 & -460 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -12 & 75 \\ 0 & 9 & 0 & -46 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 25 \\ 0 & 9 & 0 & -46 \end{array}\right]$$

Zatem $b = -46/9, c = 179/36, a = -67/36$. □

Ćwiczenie 2. Udowodnij, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\varphi + \alpha) = 2^n \cos^n\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(n\frac{\varphi}{2} + \alpha\right).$$

Dowód: Mamy, że $\cos(k\varphi+\alpha) = \mathrm{Re}(e^{i(k\varphi+\alpha)})$. Więc,

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\varphi+\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Re}(e^{i(k\varphi+\alpha)}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(k\varphi+\alpha)}\right)$$

Korzystając ze wzoru Newtona wynika, że

$$A = \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\varphi}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}(1+e^{i\varphi})^n\right).$$

Wówczas,

$$A = \mathrm{Re}\left[e^{i(\alpha+n\varphi/2)}(e^{-i\varphi/2}+e^{i\varphi/2})^n\right] = 2^n \mathrm{Re}\left[e^{i(\alpha+n\varphi/2)}\left(\frac{e^{-i\varphi/2}+e^{i\varphi/2}}{2}\right)^n\right]$$

i

$$A = 2^n \cos^n\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathrm{Re}\left[e^{i(\alpha+n\varphi/2)}\right] = 2^n \cos^n\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(n\frac{\varphi}{2}+\alpha\right).$$

□

Ćwiczenie 3. Sprawdzić, że

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_5 = 0\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^5$. Podaj bazę i wymiar tej podprzestrzeni. Napisz współrzędne wektora $(1, 2, 3, -5, 1)$ w tej bazie. Oblicz przecięcie $W \cap V$, gdzie

$$V = \langle(1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\rangle.$$

Rozwiązanie: Podzbiór (niepusty) przestrzeni wektorowej jest podprzestrzenią wtedy i tylko wtedy gdy dowolna liniowa kombinacja elementów tego podzbioru należy do tego podzbioru. Skoro W jest niepusty, wystarczy sprawdzić, że dla dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i wektory $e_1, e_2 \in W$ mamy, że $\lambda e_1 + \mu e_2 \in W$. Właśnie, jeżeli $e_1 = (x_1, \ldots, x_5)$ i $e_2 = (y_1, \ldots, y_n)$ należą do W, to

$$\lambda e_1 + \mu e_2 = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_5 + \mu y_5).$$

Skoro $x_1 = x_5$, $x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $y_1 = y_5$ i $y_2 + y_3 + y_4 = 0$, to

$$\lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda x_5 + \mu y_5,$$
$$\lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3 + \lambda x_4 + \mu y_4 = \lambda(x_2 + x_3 + x_4) + \mu(y_1 + y_2 + y_5) = 0.$$

Więc, $\lambda e_1 + \mu e_2 \in W$ i W jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^5$.

Teraz obliczymy bazę podprzestrzeni W. Musimy znaleźć układ wektorów generujących i liniowo niezależnych tej podprzestrzeni. Widać, że każdy element $e = (x_1, \ldots, x_5)$ podprzestrzeni W ma $x_1 = x_5$ i $x_2 = -x_3 - x_4$. Wówczas, możemy zapisać

$$W = \{(x_5, -x_3 - x_4, x_3, x_4, x_5)\} | x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Z tego wynika, że dla każdego $e \in W$ możemy zapisać

$$(x_5, -x_3 - x_4, x_3, x_4, x_5) = x_5(1, 0, 0, 0, 1) + x_3(0, -1, 1, 0, 0) + x_4(0, -1, 0, 1, 0).$$

Więc, wektory

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, 1), \qquad e_2 = (0, -1, 1, 0, 0), \qquad e_3 = (0, -1, 0, 1, 0)$$

generują podprzestrzeń W. Ponadto, są liniowo niezależne ponieważ

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Z tego wynika, że W ma wymiar trzy i wektory e_1, e_2, e_3 tworzą bazę.

Obliczymy współrzędne wektora $(1, 2, 3, -5, 1)$ w tej bazie, czyli musimy znaleźć liczby μ_1, μ_2, μ_3 takie, że

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 = (1, 2, 3, -5, 1).$$

Zapiszmy taki układ równań macierzowo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Więc, $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3, \mu_3 = -5$.

Podprzestrzeń V ma bazę

$$v_1 = (1, 0, 0, 0, 0), \qquad v_2 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Element $e \in W \cap V$ jest taki, że

$$e = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2.$$

dla pewnych liczb $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_1, \lambda_2$. Wtedy $\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 = 0$. Zapiszemy taki układ macierzowo

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Więc,

$$\lambda_1 = \lambda_2, \qquad \mu_1 = -\lambda_2, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \mu_3 = 0.$$

Zatem, λ_2 jest dowolna i $\lambda_1, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ można ustalić za pomocą jej wartości. Z tego wynika, że

$$e = \lambda_1 (v_1 + v_2) \Rightarrow V \cap W = \langle (1, 0, 0, 0, 1) \rangle.$$

□

Ćwiczenie 4. Niech V będzie przestrzenią liniową funkcji $f : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie T jest przedziałem. Dowieść, że jeżeli liczby $t_1, \ldots, t_n \in T$ są parami różne, to funkcje $v_1, \ldots, v_n \in V$ określone wzorem $v_k(t) = |t - t_k|$ są liniowo niezależne.

Rozwiązanie: Możemy dowolnie zakładać, że $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Funkcje $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Wyprowadzamy dowód nie wprost. Załóżmy, że $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0$ i $\lambda_p \neq 0$ dla pewnej liczby λ_p takiej, że t_p należy do wewnętrznej I. Więc, $\lambda_p |t - t_k|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $t = t_k$. Skoro $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} \lambda_k v_k$ jest różniczkowalna w punkcie t_p, to $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0$ nie jest różniczkowalna w punkcie t_p. To sprzeczność, skoro funkcja zero jest różniczkowalna w każdym punkcie. To, $\lambda_p = 0$. Więc, wszystkie λ_p należące do wewnętrznej przedziału I zerują się. Jeżeli $\lambda_1 \in \partial I$ i $\lambda_n \neq \partial I$ lub odwrotnie (czyli jeżeli jeden punkt należy do brzegu), mamy, że $\lambda_1 |t - t_1| = 0$ albo $\lambda_5 |t - t_5| = 0$ dla każdego $t \in I$. Podstawiając $t = t_5$ albo $t = t_1$, wynika, że $0 = \lambda_1$ albo $0 = \lambda_5$. Jeżeli $\lambda_1, \lambda_n \in \partial I$ to

$$\lambda_1 |t - t_1| + \lambda_n |t - t_n| = 0 \to \lambda_1 |t_1 - t_1| + \lambda_n |t_1 - t_n| = 0 \wedge \lambda_1 |t_n - t_1| + \lambda_n |t_n - t_n| = 0.$$

Z tego wynika, że $\lambda_1 = \lambda_n = 0$. □

Ćwiczenie 5. W zależności od $p \in \mathbb{R}$, ustal czy następujące wektory przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne:

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ p \end{bmatrix}, \qquad e_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ -p \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_3 := \begin{bmatrix} p \\ p \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Te wektory są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Wówczas, jeżeli te wektory są liniowo niezależne, to układ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & p & 0 \\ 1 & -p & p & 0 \\ p & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & p & 0 \\ 0 & -p-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2p & 3-p^2 & 0 \end{array}\right].$$

ma tylko trywialne rozwiązanie $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Jeżeli $p = -2$, widać, że λ_2 jest dowolna i λ_1, λ_3 można ustalić za pomocą pierwszego i trzeciego równania. Więc, e_1, e_2, e_3 są liniowo zależne. Zakładamy, że $p \neq -2$. Zatem, $\lambda_2 = 0$. Jeżeli $p^2 - 3 = 0$, to λ_3 jest dowolna i λ_1 można ustalić z λ_3. Więc, znowu układ ma nietrywialne rozwiązania. Natomiast, jeżeli $p^2 \neq 3$, to $\lambda_3 = 0$ i, z pierwszego równania, $\lambda_1 = 0$. Więc, układ ma tylko trywialne rozwiązanie i układ wektorów jest liniowo niezależny. Podsumując, układ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy $p \notin \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. $\square$