Podprzestrzeń wektorowa, baza, suma prosta i wymiar

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Niech $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\}$. Czy W jest podprzestrzenią gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? A kiedy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$? Podaj wymiar W gdy jest podprzestrzenią.

Rozwiązanie: Warunek ustalający czy $(x_1, x_2, x_3) \in W$ można napisać inaczej

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \Leftrightarrow 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 0.$$

Z tego, wynika, że dla przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$ wektor $(x_1, x_2, x_3) \in W$ wtedy i tylko wtedy

$$x_1 = x_2 = x_3.$$

Z kryterium podprzestrzeni liniowej wynika, że niepusty podzbiór W przestrzeni liniowej jest podprzestrzenią liniową wtedy i tylko wtedy gdy dowolna liniowa kombinacja elementów W należy do W. Oczywiście, jeżeli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, to dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mamy, że

$$\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} = (\lambda_1x_1 + \lambda_2y_1, \lambda_1x_2 + \lambda_2y_2, \lambda_1x_3 + \lambda_3y_3).$$

Skoro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, to $x_1 = x_2 = x_3$ i $y_1 = y_2 = y_3$, wtedy

$$\lambda_1x_1 + \lambda_2y_1 = \lambda_1x_2 + \lambda_2y_2 = \lambda_1x_3 + \lambda_3y_3$$

i

$$\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} \in W.$$

Jeżeli zakładamy, że $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, to jeżeli $x_1 = x_2 = x_3$, to $(x_1, x_2, x_3) \in W$, np. (i, i, i) należy do W. Natomiast, ten warunek nie jest konieczny, np. dla $(2, 0, 1 - i\sqrt{3})$ mamy, że

$$2^2 + (1 - i\sqrt{3})^2 + (-1 - i\sqrt{3})^2 = 4 + 1 + 1 - 3 - 3 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} = 0 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \in W.$$

Również, $(2, 0, 1 + i\sqrt{3}) \in W$. Widać, że dodawanie tych wektorów, tj. $(4, 0, 2)$, nie należy do W. Więc, to nie podprzestrzeń nad $\mathbb{C}$. $\square$

Ćwiczenie 2. Niech $W = \{w \in \mathbb{R}_4[\mathfrak{X}] : w(-1) = w(1), w'(-1/\sqrt{3}) + w'(1/\sqrt{3}) = 0\}$, gdzie w' to pochodna wielomianu w i $\mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$ to przestrzeń liniowa wielomianów aż do stopnia 4. Sprawdzić, że W jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$, znaleźć jakąś bazę W i obliczyć $\dim W$.

Rozwiązanie: Sprawdzamy, że W to podprzestrzeń liniowa. Wobec kryterium przestrzeni liniowej, niepusty podzbiór W przestrzenią liniowej jest podprzestrzeni liniową wtedy i tylko wtedy gdy dowolna liniowa kombinacja elementów W należy do W. Dla dowolnych wielomianów $P, Q \in W$, mamy, że dla dowolnych stałych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ wynika, że

$$(\lambda P + \mu Q)(-1) = \lambda P(-1) + \mu Q(-1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = (\lambda P + \mu Q)(1)$$

i

$$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q)'(-1/\sqrt{3}) &= \lambda P'(-1/\sqrt{3}) + \mu Q'(-1/\sqrt{3}) \\ &= -\lambda P(1/\sqrt{3}) - \mu Q(1/\sqrt{3}) = -(\lambda P + \mu Q)'(1/\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Więc, dowolna liniowa kombinacja elementów W należy do W i W jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$.

Teraz ustalmy bazę i wymiar podprzestrzeni W. Jeżeli $w \in \mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$ można napisać

$$w = \sum_{\alpha=0}^{4} a_\alpha \mathfrak{X}^\alpha, \qquad a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}.$$

Skoro $w(-1) = w(1)$ to

$$w(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = w(1).$$

Wówczas, $a_1 = -a_3$. Ponadto, $w'(-1/\sqrt{3}) = -w'(1/\sqrt{3})$. Wiemy, że

$$w'(\mathfrak{X}) = a_1 + 2a_2\mathfrak{X} + 3a_3\mathfrak{X}^2 + 4a_4\mathfrak{X}^3.$$

Więc,

$$w'(-1/\sqrt{3}) = a_1 - 2a_2/\sqrt{3} + a_3 - 4a_4/\sqrt{3^3} = -a_1 - 2a_2/\sqrt{3} - a_3 - 4a_4/\sqrt{3^3} = -w'(1/\sqrt{3}).$$

Z tego wynika, że

$$a_1 + a_3 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -a_3.$$

Można zauważyć, że elementy W są wielomianami których współczynniki są rozwiązaniami układu

$$a_1 + a_3 = 0.$$

Czyli W to zbiór wielomianów postaci

$$a_0 + a_1\mathfrak{X} + a_2\mathfrak{X}^2 - a_1\mathfrak{X}^3 + a_4\mathfrak{X}^4 = a_0 + a_1(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}^3) + a_2\mathfrak{X}^2 + a_4\mathfrak{X}^4.$$

Widać, że wielomiany

$$1, \mathfrak{X} - \mathfrak{X}^3, \mathfrak{X}^4, \mathfrak{X}^2$$

generują i są liniowo niezależne. Te wektory są liniowo niezależne i generują W. Wówczas, tworzą bazę W. Wówczas, $\dim W = 4$.

□

Ćwiczenie 3. Niech $W = \{w \in \mathbb{R}_4[\mathfrak{X}] : w(-p) = w(p), w'(1) + w'(-1) = 0\}$ dla $p \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, że W_p jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$, znaleźć jakąś bazę W_p i obliczyć $\dim W_p$. Dodatkowo, uzupełnij bazę W do bazy $\mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$.

Rozwiązanie: Sprawdzamy, że W to podprzestrzeń liniowa. Korzystając z kryterium, zauważamy, że dla dowolnych wielomianów $P, Q \in W$ i stałych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ wynika, że

$$(\lambda P + \mu Q)(-p) = \lambda P(-p) + \mu Q(-p) = \lambda P(p) + \mu Q(p) = (\lambda P + \mu Q)(p)$$

i

$$(\lambda P + \mu Q)'(1) = \lambda P'(1) + \mu Q'(1) = -\lambda P'(-1) - \mu Q'(-1) = -(\lambda P + \mu Q)'(-1).$$

Więc, dowolna liniowa kombinacja elementów W należy do W i W jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$.

Jeżeli $w \in \mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$ można napisać

$$w = \sum_{\alpha=0}^{4} a_\alpha \mathfrak{X}^\alpha, \qquad a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}.$$

Skoro $w(-p) = w(p)$ to

$$w(-p) = a_0 - a_1 p + a_2 p^2 - a_3 p^3 + a_4 p^4 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 = w(p).$$

Wówczas, $pa_1 = -pa_3$. Ponadto, $w'(1) = -w'(-1)$. Więc,

$$w'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = -a_1 + 2a_2 - 3a_3 + 4a_4 = -w(-1).$$

Z tego wynika, że
$$a_1 + 3a_3 = 0.$$
Można zauważyć, że elementy W są wielomianami których współczynniki są rozwiązaniami układu
$$a_1 + 3a_3 = 0, \qquad p(a_1 + a_3) = 0.$$

Zatem, W_p dlq $p \neq 0$ to zbiór wielomianów postaci
$$w = a_0 + a_2\mathfrak{X}^2 + a_4\mathfrak{X}^4.$$
Wielomiany
$$1, \mathfrak{X}^2, \mathfrak{X}^4$$
są liniowo niezależne i generują. Zatem, tworzą bazę. Wówczas, $\dim W = 3$. Do tego, możemy dodać liniowo niezależne wektory $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{X}^3$ generujące podprzestrzeń $V = \langle \mathfrak{X}, \mathfrak{X}^3 \rangle$. Widać, że $1, \mathfrak{X}^2, \mathfrak{X}^4, \mathfrak{X}, \mathfrak{X}^3$ są liniowo niezależne, to tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}_4[\mathfrak{X}]$. Warto zauważyć, że $W + V = \mathbb{R}_5[\mathfrak{X}]$. Skoro $5 = \dim W + V = \dim W + \dim V - \dim W \cap V$ i $\dim W = 3$ i $\dim V = 2$, widać, że $\dim U \cap V = 0$. Wówczas, $U \cap V = \{0\}$ i $U \oplus V$.

Zbiór wielomianów podprzestrzeni W_p dla $p = 0$ to
$$w = a_0 - 3a_3\mathfrak{X} + a_2\mathfrak{X}^2 + a_3\mathfrak{X}^3 + a_4\mathfrak{X}^4.$$
Wielomiany
$$1, -3\mathfrak{X} + \mathfrak{X}^3, \mathfrak{X}^2, \mathfrak{X}^4$$
są liniowo niezależne i generują. Zatem, tworzą bazę. Wówczas, $\dim W = 4$. Do tego, możemy dodać wektor $\mathfrak{X} + \mathfrak{X}^3$ i tworzyć bazę (proszę sprawdzić)
$$1, -3\mathfrak{X} + \mathfrak{X}^3, \mathfrak{X} + \mathfrak{X}^3, \mathfrak{X}^2, \mathfrak{X}^4$$
przestrzeni $\mathbb{R}_5[\mathfrak{X}]$. Jak wcześniej, widać, że $W \oplus \langle \mathfrak{X} + \mathfrak{X}^3 \rangle = \mathbb{R}_5[\mathfrak{X}]$.

□

Ćwiczenie 4. Dane przestrzenie liniowe $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}_3[\mathfrak{X}]$, zdefiniujemy $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[\mathfrak{X}]$ postaci
$$\Phi(a, b, c, d) = (a + b - c)\mathfrak{X}^3 + b\mathfrak{X}^2 + (c + a)\mathfrak{X} + d.$$
Czy Φ jest izomorfizmem?

Rozwiązanie: Odwzorowanie Φ jest odwzorowaniem liniowym wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych wektorów $v, w \in \mathbb{R}^4$ i liczb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mamy, że

$$\Phi(w+v) = \Phi(w) + \Phi(v), \qquad \Phi(\lambda v) = \lambda\Phi(v).$$

Widać, że jeżeli $v = (a, b, c, d)$ i $w = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ to

$$\Phi(\lambda v) = (\lambda a + \lambda b - \lambda c)\mathfrak{X}^3 + \lambda b\mathfrak{X}^2 + (\lambda c + \lambda a)\mathfrak{X} + \lambda d = \lambda\Phi(v)$$

i

$$\Phi(v+w) = ((a+\bar{a})+(b+\bar{b})-(c+\bar{c}))\mathfrak{X}^3+(b+\bar{b})\mathfrak{X}^2+((c+\bar{c})+(a+\bar{a}))\mathfrak{X}+(d+\bar{d}) = \Phi(v)+\Phi(w)$$

Teraz, mamy sprawdzić, że Φ jest surjekcją. To oznacza, że dla dowolnego

$$w = \lambda_3\mathfrak{X}^3 + \lambda_2\mathfrak{X}^2 + \lambda_1\mathfrak{X} + \lambda_0$$

istnieje $v \in \mathbb{R}^4$ taki, że $\Phi(v) = w$. Czyli,

$$a + b - c = \lambda_3, \;\; b = \lambda_2, \;\; c + a = \lambda_1, \;\; d = \lambda_0.$$

Z tego wynika, że $d = \lambda_0$, $b = \lambda_2$ $a = \lambda_1 - c$ i $a = (\lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1)/2$ i $c = -(\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1)/2$ Oczywiście, to odwzorowanie jest injekcją gdy $\Phi(w) = \Phi(v)$ implikuje $w = v$. Z poprzedniego układu, wynika, że jeżeli $\Phi(w) = 0$, to $w = 0$. Korzystając z tego i skoro Φ jest odwzorowaniem liniowym, widać, że

$$\Phi(w) = \Phi(v) \to \Phi(w - v) = 0 \Rightarrow w - v = 0 \Rightarrow w = v.$$

i Φ jest injekcją. Więc, Φ jest bijekcją.
□

Ćwiczenie 5. Dana przestrzeń liniowa $\mathbb{K}^n_m$ macierzy $m \times n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$, rząd macierzy to maksymalny zbiór liniowo niezależnych kolumn. Oblicz rząd macierzy

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

o współczynnikach w $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie: Macierz A: Rząd macierzy to wymiar przestrzeni zgenerowanej przez jej kolumny. Dana macierz M, można udowodnić, że

$$\mathrm{rank} M = \dim \mathrm{span}\{M_1, \ldots, M_j, \ldots, M_k\} = \dim \mathrm{span}\left\{M_1, \ldots, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i M_i, \ldots, M_k\right\},$$

gdzie $\lambda_j \neq 0$ i M_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, są kolumnami macierzy M. Z tego wynika, że

$$\mathrm{rankA} := \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zauważymy, że ani pierwsza kolumna nie jest liniową kombinacją innych kolumn ani innej kolumny nie można napisać jako liniowej kombinacji zawierającej tę pierwszą kolumnę. To

$$\mathrm{rank}\, A := 1 + \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 + \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 + \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

Macierz B:

$$\mathrm{rank} B := \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -7 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 1 + \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & -7 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 1 + \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$1 + \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 + \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} = 4.$$

□

Ćwiczenie 6. Podaj bazę podprzestrzeni V_1, V_2 przestrzeni $\mathbb{R}^5$ postaci

$$V_1 = \langle (0,1,2,3,1), (0,1,3,4,0), (0,4,9,13,3) \rangle,$$
$$V_2 = \langle (1,1,2,3,1), (1,0,3,4,0), (1,2,1,2,2), (3,-1,7,9,-1), (0,2,5,7,1) \rangle.$$

Oblicz $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$ i sprawdź, że

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Rozwiązanie: Wymiar V_1 to rząd macierzy

$$\operatorname{rank} B := \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \\ 3 & 4 & 13 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Więc,

$$V_1 = \langle (0,1,3,4,0), (0,0,1,1,-1) \rangle,$$

i zdefiniujemy

$$e_1 = (0,1,3,4,0), \qquad e_2 = (0,0,1,1,-1),$$

które tworzą bazę V_1.

Wymiar V_2 to rząd macierzy B to

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 9 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2 + \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 4.$$

Więc,

$$V_2 = \langle (1,0,3,4,0), (0,1,0,0,0), (0,0,3,4,0), (0,0,1,1,-1) \rangle.$$

Zdefiniujemy

$$f_1 = (1,0,3,4,0),\ \ f_2 = (0,1,0,0,0),\ \ f_3 = (0,0,3,4,0),\ \ f_4 = (0,0,1,1,-1).$$

Takie wektory tworzą bazę V_2. Widać, że $U+V$ jest zgenerowany przez wektory baz U i V. Więc, wymiar $U+V$ to rząd macierzy

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 4.$$

Widać, że $\dim V + U = 4$, $\dim V = \dim U = 2$. Więc, korzystając z wzoru

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$$

wynika, że

$$\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 0.$$

Więc, $U \cap V = \{0\}$.

Często zdarza się, że wzór wymiarów nie pozwala nam ustalić przecięcia podprzestrzeni. Aby pokazać, co zrobić w takim przypadku, obliczymy $U+V$ drugą metodą. Widać, że każdy element $x \in U+V$ można napisać w postaci

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 + \mu_4 f_4.$$

Jeżeli ustalimy wszystkie wartości $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3$, to możemy ustalić x. Aby to zrobić, musimy rozwiązać układ:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] =$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

$$\mu_1 = 0, \ \mu_2 = \lambda_1, \ \mu_4 = \lambda_2, \ \mu_3 = \lambda_1.$$

Możemy zakładać, że $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ są dowolne i pozwalają nam ustalić μ_2, μ_3, μ_4 $(\mu_1 = 0)$. Wówczas, każdy element $v \in V_1$ należy do $V_1 \cap V_2$. $\square$