Suma i przecięcie podprzestrzeni, przestrzeń ilorazowa

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Dowieść, że jeśli U i V są podprzestrzeniami n-wymiarowej przestrzeni wektorowej oraz $\dim U = r$ i $\dim V = s$, to

$$\max(0, r+s-n) \leq \dim(U \cap V) \leq \min(r,s), \quad \max(r,s) \leq \dim(U+V) \leq \min(r+s, n).$$

Podać przykłady pokazujące, że każda z tych nierówności może być równością.

Rozwiązanie: Wiemy, że $U+V \subset \mathbb{R}^n$. Z tego wynika, że $\dim U+V \leq n$. Ponadto, mamy, że

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V). \tag{1.1}$$

Z tych dwóch faktów, wynika, że

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) \geq \dim U + \dim V - n = r+s-n.$$

Ponadto, $0 \leq \dim(U \cap V)$. Więc,

$$\max(0, r+s-n) \leq \dim(U \cap V). \tag{1.2}$$

Widać, że kiedy $U \cap V = \{0\}$ i $U+V = \mathbb{R}^n$, to z (1.1) wynika, że $r+s=n$ i $\dim(U \cap V) = 0$. Zatem, mamy równość w (1.2).

Mamy, że $U \cap V \subset V$ i $U \cap V \subset U$. Więc,

$$\dim U \cap V \leq \dim V, \qquad \dim U \cap V \leq \dim U.$$

Zatem

$$\dim U \cap V \leq \min(\dim U, \dim V). \tag{1.3}$$

Jeżeli $U \subset V$, to $U \cap V = U$ i mamy równość w (1.3).

Mamy, że $U \subset U+V$ i $V \subset U+V$. Więc,

$$\dim U \leq \dim(U+V), \qquad \dim V \leq \dim(U+V).$$

Zatem

$$\max(r,s) = \max(\dim U, \dim V) \leq \dim(U+V). \tag{1.4}$$

Jeżeli $U \subset V$, to $U+V = V$ i $\dim(U+V) = \dim V = s \geq \dim U = r$. Więc, mamy równość w (1.4).

Ponadto,

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) \leq \dim U + \dim V = r + s.$$

Dodatkowo, $U + V \subset \mathbb{R}^n$. Więc, $\dim(U+V) \leq n$. Wówczas,

$$\dim(U+V) \leq \min(r+s, n). \tag{1.5}$$

Jeżeli $V = \mathbb{R}^n$, to widać, że $n = \dim(U+V) \leq \min(n+s, n) = n$. $\square$

Ćwiczenie 2. Podać bazę sumy i części wspólnej powłok liniowych $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ oraz $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$:

i)

$$a_1 = (1,2,1), \quad a_2 = (1,1,-1), \quad a_3 = (1,3,3),$$
$$b_1 = (1,2,2), \quad b_2 = (2,3,-1), \quad b_3 = (1,1,-3).$$

ii)

$$a_1 = (-1,6,4,7,-2), \quad a_2 = (-2,3,0,5,-2), \quad a_3 = (-3,6,5,6,-5),$$
$$b_1 = (1,1,2,1,-1), \quad b_2 = (0,-2,0,-1,-5), \quad b_3 = (2,0,2,1,-3).$$

iii)

$$a_1 = (1,1,0,0,-1), \quad a_2 = (0,1,1,0,1), \quad a_3 = (0,0,1,1,1),$$
$$b_1 = (1,0,1,0,1), \quad b_2 = (0,2,1,1,0), \quad b_3 = (1,2,1,2,-1).$$

Rozwiązanie: Najpierw obliczymy wymiar przestrzeni $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Wiemy, że

$$\dim A = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Widać, że A jest zgenerowana przez liniowo niezależne wektory

$$(1,2,-1), (0,-1,-1).$$

Więc, takie wektory tworzą bazę i $\dim A = 2$.

Natomiast, wymiar przestrzeni $B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ jest

$$\dim B = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Widać, że B jest zgenerowana przez liniowo niezależne wektory

$$(1, 2, 2), (0, 1, 5).$$

Więc, takie wektory tworzą bazę B i $\dim B = 2$. Przestrzeń $A + B$ jest zgenerowana przez wektory baz A i B. Więc,

$$\dim A + B = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

Więc, $\dim A + B = 3$. Z wzoru (1.1), wynika, że $\dim A \cap B = 1$. Ponadto, z baz tych przestrzeni, widać, że elementy $A \cap B$ są wektorami w takimi, że

$$w = \lambda_1(1, 2, 2) + \lambda_2(0, 1, 5) = \lambda_3(1, 2, -1) + \lambda_4(0, -1, -1),$$

dla pewnych liczb $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. W postaci macierzowej taki układ wygląda następująco

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{R_3-2R_1\to R_3 \\ R_2-2R_1\to R_2}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3-5R_2\to R_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Czyli

$$\lambda_1 = \lambda_3, \qquad \lambda_2 = -\lambda_4, \qquad \lambda_3 = 4\lambda_4/3.$$

Możemy ustalić, że λ_4 jest dowolna i resztę można ustalić z jej wartości. Więc, elementy w mają postać,

$$w = \lambda_4[4/3(1, 2, -1) + (0, -1, -1)] \leftrightarrow A \cap B = \langle (4, 5, -7) \rangle.$$

Więc, taki wektor tworzy bazę tej podprzestrzeni.

□

Ćwiczenie 3. Niech podprzestrzenie $U, V \subset \mathbb{R}^n$ będą określone układami równań

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0, \qquad x_1 = \ldots = x_n.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ oraz wyznaczyć rzuty wektorów jednostkowych na podprzestrzeń U równolegle do V i na podprzestrzeń V równolegle do U.

Rozwiązanie: Najpierw, udowodnimy, że $U + V = \mathbb{R}^n$. Aby to zrobić, udowodnimy, że każdy wektor $w = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ można przedstawić jako sumę $w = u + v$ dwóch wektorów $u \in U$ i $v \in V$. Widać, że

$$w = (x_1 - S + S, x_2 - S + S, \ldots, x_n - S + S),$$

gdzie $S = (x_1 + \ldots + x_n)/n$. Wtedy,

$$w = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (S, \ldots, S) + (x_1 - S, \ldots, x_n - S).$$

Widać, że

$$(S, \ldots, S) \in V, \qquad (x_1 - S, \ldots, x_n - S) \in U.$$

Właśnie,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - S) = (x_1 + \ldots + x_n) - nS = 0.$$

Z tego wynika, że $\mathbb{R}^n$. Skoro $U + V \subset \mathbb{R}^n$, to oznacza, że $U + V = \mathbb{R}^n$.

Teraz, możemy udowodnić, że $U \cap V = \{0\}$. Właśnie, jeżeli $w \in A \cap B$ to

$$w = (x_1, \ldots, x_n), \qquad \sum_{i]1}^{n} x_i = 0$$

ponieważ $w \in A$. Skoro $w \in B$ to $x_1 = \ldots = x_n$. Więc,

$$0 = \sum_{i]1}^{n} x_i = 0 = nx_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Zatem, $w = 0$ i $A \cap B = \{0\}$.

Teraz,

$$e_i \equiv (0, \dots, 0, \overset{\text{wyraz}-i}{1}, 0, \dots) = (1/n, \dots, 1/n) + (-1/n, \dots, \overset{\text{wyraz}-i}{1 - 1/n}, \dots, -1/n).$$

Więc, rzut e_i na U wzdłuż V to

$$(-1/n, \dots, \overset{\text{wyraz}-i}{1 - 1/n}, \dots, -1/n)$$

i rzut e_i na V wzdłuż U to

$$(1/n, \dots, 1/n).$$

□

Ćwiczenie 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określamy podprzestrzenie

$$U = \langle (1,1,1,1), (-1,-2,0,1) \rangle, \qquad V = \langle (-1,-1,1,-1), (2,2,0,1) \rangle.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ i znaleźć rzut wektora $(4,2,4,4)$ na podprzestrzeń U równolegle do V.

Rozwiązanie: Aby ustalić, czy $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, trzeba sprawdzić, czy $U + V = \mathbb{R}^4$ i $U \cap V = \{0\}$. Widać, że $\dim A + B$ jest równy

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 4.$$

Skoro $\dim A, \dim B \leq 2$ i $\dim A + B = 4$, to z wzoru (1.1) wynika, że $\dim A = \dim B = 2$ i $\dim A \cap B = 0$. Wówczas $A \cap B = \{0\}$. Zatem $A \oplus B \simeq \mathbb{R}^4$. Ponieważ A jest zgenerowana przez $(1,1,1,1)$ i $(1,-2,0,1)$ i $\dim A = 2$ to takie wektory tworzą bazę podprzestrzeni A. Dodatkowo, ponieważ B jest zgenerowana przez $(-1,-1,1,-1)$ i $(2,2,0,1)$ i $\dim B = 2$ to takie wektory tworzą bazę podprzestrzeni B. Z tego, mamy następującą bazę naszej przestrzeni

$$e_1 = (1,1,1,1), \qquad e_2 = (1,-2,0,1), \qquad e_3 = (-1,-1,1,-1) \qquad e_4 = (2,2,0,1).$$

Dany wektor v, można napisać jako liniową kombinację wektorów powyższej bazy

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4.$$

To pozwala nam zapisać v w postaci $v = v_1 + v_2$, gdzie $v_1 \in A$ i $v_2 \in B$. Widać, że taki rozkład jest jedynym. Jeżeli mamy drugi taki rozkład $v = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$, to

$$v_1 - \bar{v}_1 = -v_2 + \bar{v}_2.$$

Lewa strona należy do A i prawa do B. Skoro $A \cap B = \{0\}$, to $v_1 = \bar{v}_1$ i $v_2 = \bar{v}_2$. Z tego, możemy zdefiniować rzut $v_A = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ wektora v na A wzdłuż B. Aby to ustalić, musimy obliczyć λ_1, λ_2. Mamy układ:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right]$$

Więc, mamy, że

$$\lambda_1 = -7/2, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_4 = 7, \qquad \lambda_3 = 9/2.$$

Wówczas

$$v_A = -\frac{7}{2}e_1 + 2e_2.$$

□

Ćwiczenie 5. Wykazać, że przestrzeń macierzy $M_n(\mathbb{R})$ jest sumą prostą podprzestrzeni macierzy symetrycznych i podprzestrzeni antysymetrycznych oraz wynaczyć rzut macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

na każdą z tych podprzestrzeni równolegle do drugiej z nich.

Rozwiązanie: Przypominamy, że macierz symetryczna jest macierzą taką, że $A_{ij} = A_{ji}$ dla $i.j = 1, \ldots, n$, np.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Natomiast, macierz antysymetryczna to macierz taka, że $A_{ij} = -A_{ji}$ dla $i.j = 1, \ldots, n$, np.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Każdy element A przestrzeni $M_n(\mathbb{R})$ można przedstawić w postaci

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}, \tag{5.1}$$

gdzie A^T to tzw. macierz transponowana do A, czyli to macierz taka, że $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ dla $i, j = 1, \ldots, n$. Widać, że kiedy macierz A jest symetryczna, to $A^T_{ij} = A_{ij}$ dla $i, j = 1, \ldots, n$ i antysymetryczna gdy $A^T_{ij} = -A_{ij}$. Widać, że

$$B^1 = \frac{A + A^T}{2}$$

jest macierzą symetryczną. Właśnie

$$B^1_{ij} = (A_{ij} + A^T_{ij})/2 = (A_{ij} + A_{ji})/2 = (A_{ji} + A_{ji})/2 = B^1_{ji}.$$

Natomiast,

$$B^2 = \frac{A - A^T}{2}$$

jest macierzą antysymetryczną. Z tego wynika, że $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$, gdzie $S_n(\mathbb{R})$ to podprzestrzeń liniowa macierzy symmetrycznych w przestrzeni $M_n(\mathbb{R})$ i $A_n(\mathbb{R})$ to podprzestrzeń liniowa macierzy antysymmetrycznych w przestrzeni $M_n(\mathbb{R})$.

Teraz, udowodnimy, że $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. Jeżeli $A \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$, to

$$A_{ij} = A_{ji}, \qquad A_{ij} = -A_{ji}.$$

Z tego $A_{ij} = 0$.

Teraz, dana macierz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

rzut macierzy C na $S_n(\mathbb{R})$ wzdłuż $A_n(\mathbb{R})$, to

$$\frac{C + C^T}{2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Natomiast, rzut macierzy C na $A_n(\mathbb{R})$ wzdłuż $S_n(\mathbb{R})$, to

$$\frac{C - C^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Ćwiczenie 6. Wyznaczyć wymiary sumy i części wspólnej powłok liniowych układów wektorów $\mathbb{R}^4$:

i)

$$S = \langle (1,2,0,1), (1,1,1,0) \rangle,$$
$$T = \langle (1,0,1,0), (1,3,0,1) \rangle.$$

ii)

$$S = \langle (1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,3,1,3) \rangle,$$
$$T = \langle (1,2,0,2), (1,2,1,2), (3,1,3,1) \rangle.$$

iii)

$$S = \langle (2,-1,0,-2), (3,-2,1,0), (1,-1,1,-1) \rangle,$$
$$T = \langle (3,-1,-1,0), (0,-1,2,3), (5,-2,-1,0) \rangle.$$

Rozwiązanie: Suma podprzestrzeni S i T, tj. $S+T$, to podprzestrzeń wektorów postaci $v+w$, gdzie $v \in S$ i $w \in T$. Podprzestrzeń S jest zgenerowana przez wektory

$$(1,2,0,1), \qquad (1,1,1,0),$$

które są liniowo niezależne. Wówczas, $\dim S = 2$. Ponadto, podprzestrzeń T jest zgenerowana przez wektory

$$(1,0,1,0), \qquad (1,3,0,1),$$

które są też liniowo niezależne. Wówczas $\dim T = 2$. Z tego, $S+T$ jest zgenerowana przez układ wektorów

$$(1,2,0,1), \qquad (1,1,1,0), \qquad (1,0,1,0), \qquad (1,3,0,1).$$

Aby wyznaczyć wymiar $S+T$ musimy obliczyć największą liczbę wektorów liniowo niezależnych tego układu wektorów generujących. Już wiemy, że liczba tych wektorów to rząd macierzy

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1 + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= 1 + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4.$$

Skoro $T + S$ to podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i ma wymiar cztery, to $T + S = \mathbb{R}^4$. Ponieważ, $4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim S + T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T = 4 - \dim S \cap T$, to $\dim S \cap T = 0$. Wówczas, $S \cap T = \{0\}$. Wtedy, można powiedzieć, że suma algebraiczna i suma prosta podprzestrzeni S, T są izomorficzne.

W drugim przykładzie, przestrzeń S jest zgenerowana przez wektory

$$(1,1,1,1), \qquad (1,-1,1,-1), \qquad (1,3,1,3).$$

Warto sprawdzić maksymalną liczbę liniowo niezależnych wektorów tego układu. To pozwala nam określić wymiar przecięcia. W tym przypadku, mamy, że

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = 2.$$

Natomiast, T jest zgenerowana przez wektory

$$(1,2,0,2), \qquad (1,2,1,2), \qquad (3,1,3,1)$$

Warto znowu sprawdzić maksymalną liczbę liniowo niezależnych wektorów tego układu. Mamy, że

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} = 3.$$

to $S + T$ jest zegenerowana przez układ wektorów

$$(1,1,1,1), \quad (0,2,0,2), \quad (1,1,1,1), \quad (0,0,1,0), \quad (0,5,3,5).$$

Aby wyznaczyć wymiar $S + T$ musimy ustalić największą liczbę wektorów liniowo niezależnych tego układu. Już wiemy, że liczba tych wektorów to rząd macierzy

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1 + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4.$$

Skoro $T+S$ to podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i ma wymiar cztery, to $T+S=\mathbb{R}^4$. Ponieważ, $4=\dim\mathbb{R}^4=\dim S+T=\dim S+\dim T-\dim S\cap T=4-\dim S\cap T$, to $\dim S\cap T=0$. Wówczas, $S\cap T=\{0\}$. Wtedy, można powiedzieć, że suma algebraiczna i suma prosta podprzestrzeni S,T są izomorficzne. $\square$

Ćwiczenie 7. Określ strukturę przestrzeni $\mathbb{R}^2/W$, gdzie $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\}$. Znajdź warstwy $[(1,1)]$, $[(3,4)]$, $[(1,1)]+[(3,4)]$, $5[(3,4)]$ oraz podaj interpretację geometryczną tych warstw.

Rozwiązanie: Elementy przestrzeni $\mathbb{R}^2/W$ są warstwami $[(x,y)]$ z $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Widać, że jeżeli $(x',y')\in[(x,y)]$, to

$$(x-x',y-y')\in H\Rightarrow(x-x')+(y-y')=0\Rightarrow x+y=x'+y'.$$

Odwrotnie, jeżeli (x,y) i (x',y') spełniają $x-x'+y-y'$, to $(x,y)-(x',y')\in H$. Więc, klasy (warstwy) przestrzeni $\mathbb{R}^2/W$ mają postać

$$H_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x+y=k\},\qquad k\in\mathbb{R}.$$

To płaszczyzna która przechodzi przez punkt (x_0,y_0) taki, że $x_0+y_0=k$. Elementy tej warstwy mają postać

$$(x,y)=(x_0,y_0)+w,\qquad w\in W.$$

Więc,

$$[(1,1)]=H_2=\{(1,1)+w|w\in H\},\qquad[(3,4)]=H_2=\{(1,1)+w|w\in H\}$$

Z definicji przestrzeni $\mathbb{R}^2/W$ mamy, że

$$[(x,y)]+[(x',y')]=[(x+x',y+y')],\qquad\lambda[(x,y)]=[(\lambda x,\lambda y)].$$

Inaczej mówiąc,

$$H_{x+y}+H_{x'+y'}=H_{x+y+x'+y'},\qquad\lambda H_{x+y}=H_{\lambda(x+y)}.$$

$\square$

Ćwiczenie 8. Opisz warstwy przestrzeni V/W oraz podaj bazę tej przestrzeni, jeśli:

- $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty : a_1 = a_2 = 0\}$.
- $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty : a_2 = 0\}$.
- $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty : a_1 = 4a_2 = 5a_3\}$.
- $V = C([0,1], \mathbb{R})$, $W = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$.
- $V = C([0,\infty), \mathbb{R})$, $W = \{f \in C([0,\infty), \mathbb{R}) : a_1 = a_2 = 0\}$.

Rozwiązanie: Podprzestrzeń W ma dopełnienie

$$\bar{W} = \{(a_n)_{n=1}^\infty : a_k = 0, k = 3, 4, \ldots\}.$$

Każdy element $(a_n)_{n=1}^\infty \in V$ można zapisać jako $(a_n)_{n=1}^\infty = (w_n)_{n=1}^\infty + (\bar{w}_n)_{n=1}^\infty$, gdzie

$$(a_n)_{n=1}^\infty = (v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots), \qquad (w_n)_{n=1}^\infty = (0, 0, v_3, v_4, \ldots), \qquad (\bar{w}_n)_{n=1}^\infty = (v_1, v_2, 0, 0, \ldots).$$

Wówczas, $W + \bar{W} = V$. Ponadto, jeżeli $(a_n)_{n=1}^\infty \in W \cap \bar{W}$, widać, że

$$(a_n)_{n=1}^\infty = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots).$$

Zatem $(a_n)_{n=1}^\infty = 0$ i $W \cap \bar{W} = \{0\}$.

Korzystając z tego depełnienia, mamy, że $V/W \simeq \bar{W}$. Baza $\bar{W}$ to

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots), \qquad e_2 = (0, 1, 0, \ldots).$$

Więc, baza V/W to

$$[e_1] = e_1 + W, \qquad [e_2] = e_2 + W.$$

□