Odwzorowania liniowe i ich macierze

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Odwzorowanie liniowe $F \in \operatorname{End}\mathbb{R}_n[t]$ dane jest wzorem $(Fw)(t) = (t+1)w'(t)$, gdzie $w \in \mathbb{R}_n[t]$ i w' to jego pochodna po t. Znaleźć macierz $[F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ operatora F w bazie $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$; znaleźć $\ker F, \operatorname{im} F$ i $\operatorname{rk}F$ oraz zbadać, czy F jest izomorfizmem.

Rozwiązanie: Macierz operatora F w bazie początkowej i końcowej $\mathcal{E}$, czyli $[F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$, to macierz, której kolumny są obrazami elementów bazy $\mathcal{E}$ zapisanymi we współrzędnych bazy $\mathcal{E}$. Na przykład, kolumna j, gdzie $j = 1, \ldots, n+1$, macierzy $[F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ to obraz wielomianu $\omega_{(j-1)} = t^{j-1}$ zapisanego we współrzędnych bazy $\mathcal{E}$. Mamy, że

$$F\omega_{(0)}(t) = (1+t)0 = 0,$$

i dla $n \leq k > 0$, to

$$F\omega_{(k)}(t) = (t+1)kt^{k-1} = kt^k + kt^{k-1} = k\omega_{(k)}(t) + k\omega_{(k-1)}(t) \Rightarrow F\omega_{(k)} = k\omega_{(k)} + k\omega_{(k-1)}.$$

Zatem, kolumny macierzy $[F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ są:

$$[F\omega_{(0)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [F\omega_{(1)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, [F\omega_{(2)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, [F\omega_{(n)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \\ n \end{bmatrix},$$

gdzie $[F\omega_{(k)}]_{\mathcal{E}}$ to wektor współrzędnych wektora $F\omega_{(k)}$ w bazie $\mathcal{E}$. Wówczas,

$$[F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & n \end{bmatrix}.$$

Jądro odwzorowania liniowego F, czyli $\ker F$, to podprzestrzeń liniowa wektorów $w \in \mathbb{R}_n[t]$ takich, że $Fw = 0$. Wówczas, $w \in \ker F$ wtedy i tylko wtedy $Fw(t) = (t+1)w'(t) = 0$. Więc, $w'(t) = 0$ i $\omega = \lambda \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\ker F = \mathbb{R}_0[t] \simeq \mathbb{R}.$$

Obraz odwzorowania liniowego F to podprzestrzeń liniowa wektorów $w \in \mathbb{R}_n[t]$ takich, że $w = F(\bar{w})$ dla pewnego $\bar{w} \in \mathbb{R}_n[t]$. Więc,

$$w(t) = (t+1)\bar{w}'(t)$$

dla pewnego $\bar{w}$. Oznacza to, że $w(-1) = 0$ i $\bar{w}'$ jest wielomianem stopnia $p \leq n-1$. Innymi słowa,

$$\operatorname{Im} F \subset W = \{\omega \in \mathbb{R}_n[t] \mid \omega(-1) = 0\}.$$

Wiemy, że W to podprzestrzeń liniowa wymiaru $\dim \mathbb{R}_n[t] - 1 = n$ i $\dim\ker F + \dim \mathrm{Im}F = \dim \mathbb{R}_n[t] = n+1$. Więc,

$$\dim \mathrm{Im}F = \dim W, \qquad \mathrm{Im}F \subset W.$$

Z tego wynika, że $\mathrm{Im}F = W$.

Możemy udowodnić, że $\mathrm{Im}F = W$ inaczej. Jeżeli $\omega(-1) = 0$, to $\omega = (t+1)g$, gdzie g to wielomian stopnia $p \leq n-1$. Ewidentnie, zawsze istnieje wielomian $\bar{w} \in \mathbb{R}_n[t]$ taki, że $\bar{w}' = g$. Z tego wynika, że $w(t) = (t+1)\bar{w}'(t)$ i $w = F\bar{w}$ i $w \in \operatorname{Im} F$. Zatem,

$$W \subset \operatorname{Im} F = \{w \in \mathbb{R}_n[t] \mid w(-1) = 0\}.$$

Skoro już udowodniliśmy, że $\operatorname{Im} F \subset W$, to $\operatorname{Im} F = W$.

Teraz, $\mathrm{rk}F$ jest $\dim \mathrm{ImF} = n$. Równoważnie, mamy, że $\mathrm{rk}[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ to liczba kolumn liniowo niezależnych. Skoro kolumny macierzy $[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ są obrazami (we współrzędnych) elementów bazy $\mathcal{E}$, to generują obraz F. Więc, $\mathrm{rk}F = \mathrm{rk}[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$. Zatem,

$$\mathrm{rkF} = \mathrm{rk}[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \mathrm{rk}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & n \end{bmatrix} = n.$$

□

Ćwiczenie 2. Niech $\mathbb{R}_2[x,y]$ oznacza przestrzeń wielomianów stopnia mniejszego/równego 2 zmiennych x, y o współczynnikach rzeczywistych. Jaki jest wymiar $\mathbb{R}_2[x,y]$? Znaleźć jakąś bazę $\mathbb{R}_2[x,y]$ i związane z tą bazą macierze odwzorowań:

$$F : w \mapsto \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad G : w \mapsto \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad H : w \mapsto \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Rozwiązanie: Wybieramy bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x,y]$ daną wzorem

$$\mathcal{E} = \{\omega_{(1)} = 1, \omega_{(2)} = x, \omega_{(3)} = y, \omega_{(4)} = x^2, \omega_{(5)} = y^2, \omega_{(6)} = xy\}.$$

Więc, $\dim \mathbb{R}_2[x,y] = 6$. Teraz,

$$F\omega_{(1)} = 0, \qquad F\omega_{(2)} = 1, \qquad F\omega_{(3)} = 0, \qquad F\omega_{(4)} = 2x, \qquad F\omega_{(5)} = 0, \qquad F\omega_{(6)} = y.$$

Zatem,

$$[F\omega^1]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [F\omega^2]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [F\omega^3]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$[F\omega^4]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [F\omega^5]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [F\omega^6]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z tego wynika, że

$$[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teraz,

$$G\omega_{(1)} = 0, \qquad G\omega_{(2)} = 0, \qquad G\omega_{(3)} = 1, \qquad G\omega_{(4)} = 0, \qquad G\omega_{(5)} = 2y, \qquad G\omega_{(6)} = x.$$

Zatem,

$$[G\omega_{(1)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [G\omega_{(2)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [G\omega_{(3)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$[G\omega_{(4)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [G\omega_{(5)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [G\omega_{(6)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z tego wynika, że

$$[G]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teraz,

$$H\omega_{(1)} = 0, \qquad H\omega_{(2)} = 0, \qquad H\omega_{(3)} = 0, \qquad H\omega_{(4)} = 0, \qquad H\omega_{(5)} = 0, \qquad H\omega_{(6)} = 1.$$

Zatem,

$$\big[H\omega_{(1)}\big]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [H\omega_{(2)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [H\omega_{(3)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$[H\omega_{(4)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [H\omega_{(5)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [H\omega_{(6)}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z tego wynika, że

$$[H]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Ćwiczenie 3. Oblicz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2i & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2i & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2i & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ -4i-2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponadto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z indukcji

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

□

Ćwiczenie 4. Dane macierze

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

oblicz A^{-1} i B^{-1} jeżeli to możliwe.

Rozwiązanie: Musimy szukać macierzy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

takiej, że

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Wiemy, że jeżeli taka macierz istnieje, to oznacza, że A ma być macierzą pewnego automorfizmu (endomorfizm i bijekcja) F w pewnych bazach, np. kanonicznych. Więc, jeżeli taki warunek się spełnia, obraz tego automorfizmu F ma generować $\mathbb{R}^2$. To się zdarza, gdy jej kolumny nie są proporcjonalne, czyli $xt - yz \neq 0$.

Ponadto, z (4.1) wynika, że

$$a_{11}x + ya_{21} = 1, \qquad za_{11} + ta_{21} = 0, \qquad a_{12}x + a_{22}y = 0, \qquad a_{12}z + a_{22}t = 1.$$

Z tego

$$a_{11}tx + yta_{21} = t, \qquad yza_{11} + yta_{21} = 0 \Rightarrow a_{11} = \frac{t}{tx - yz}$$

$$a_{11}zx + zya_{21} = z, \qquad xza_{11} + xta_{21} = 0 \Rightarrow a_{21} = -\frac{z}{tx - yz}$$

$$a_{12}xt + yta_{22} = 0, \qquad yza_{12} + yta_{22} = y \Rightarrow a_{12} = -\frac{y}{tx - yz}$$

$$a_{12}zx + zya_{22} = 0, \qquad xza_{12} + xta_{22} = x \Rightarrow a_{22} = \frac{x}{tx - yz}$$

Więc,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{xt - zy} \begin{bmatrix} t & -z \\ -y & x \end{bmatrix}.$$

Warto pamiętać tą formułę. Korzysta się z niej dość często.

Możemy też obliczyć macierz odwrotną za pomocą metody Gaussa, czyli możemy przeprowadzić transformacje elementarne macierzy

$$\left[\begin{array}{cc|cc} x & y & 1 & 0 \\ z & t & 0 & 1 \end{array}\right]$$

aż do momentu gdy lewa strona jest macierzą jednostkową. Wtedy, prawa strona to macierz odwrotna macierzy A. Jeżeli zakładamy, że $x \neq 0$, to

$$\left[\begin{array}{cc|cc} x & y & 1 & 0 \\ z & t & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} x & y & 1 & 0 \\ 0 & yz - tx & z & -x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} x & y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{z}{yz-tx} & \frac{-x}{yz-tx} \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} x & 0 & \frac{tx}{yz-tx} & \frac{-zx}{yz-tx} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{yz-tx} & \frac{x}{yz-tx} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{t}{yz-tx} & \frac{-z}{yz-tx} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{yz-tx} & \frac{x}{yz-tx} \end{array}\right].$$

Zakładaliśmy, że $x \neq 0$ z dwóch powodów. W ostatnim kroku, podzieliliśmy przez x. Więc, jeżeli $x = 0$ tego nie można zrobić. Ponadto, jest inny bardziej subtelny powód. W pierwszym kroku, robi się $zR_1 - xR_2 \to R_2$. Jeżeli $x = 0$, to oznacza, że zastąpimy drugi rząd przez pierwszy i drugi rząd znika i to nie dozwolone: trzeba zastąpić każdy wiersz przez liniową kombinację gdzie ten wiersz się pojawia!! Dla $x = 0$ można stosować znowu tą metodę.

Teraz, dla drugiej macierzy mamy, że

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Więc,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Ćwiczenie 5. Dane odwzorowanie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, którego macierz w bazach kanonicznych $\mathcal{B}$ ma postać

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

oblicz jego macierz $[F]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ w bazach $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ danych wzorami

$$\mathcal{B}_1 \equiv \left\{ v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_2 \equiv \left\{ w_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rozwiązanie: Wiemy, że

$$[F]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2} [F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}}.$$

Mamy, że operator identyczność w bazie początkowej $\mathcal{B}_1$ i końcowej $\mathcal{B}$ ma kolumny

$$[\mathrm{Id}v_1]_{\mathcal{B}} = [v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathrm{Id}v_2]_{\mathcal{B}} = [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, [\mathrm{Id}v_3]_{\mathcal{B}} = [v_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Więc,

$$[Id]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aby zapisać $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2}$ musimy zapisać wektory bazy kanonicznej $\mathcal{B}$, powiedzmy e_1, e_2, e_3, we współrzędnych bazy $\mathcal{B}_2$. Widać, że

$$e_1 = w_1, \qquad e_2 = w_1 - w_3, \qquad e_3 = w_2 - 2w_1 + w_3.$$

Z tego

$$[\mathrm{Id}e_1]_{\mathcal{B}_2} = [e_1]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathrm{Id}e_2]_{\mathcal{B}_2} = [e_2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, [\mathrm{Id}e_3]_{\mathcal{B}_2} = [e_3]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Więc,

$$[Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

i

$$[F]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z tego,

$$[F]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 11 & 13 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

□