Odwzorowania transponowane, wyznaczniki i ślad

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Dane odwzorowanie $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ postaci

$$[F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

w bazie kanonicznej $\mathcal{E}$, sprawdź, że $[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = ([F^*]^{\mathcal{E}^*}_{\mathcal{B}^*})^T$ dla bazy

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}.$$

Rozwiązanie: Najpierw obliczymy $[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$. Aby to zrobić, korzystamy ze wzoru zmiany bazy

$$[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} [F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} [\mathrm{Id}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}.$$

Skoro $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}$ to macierz jednostkowa dla dowolnej bazy $\mathcal{B}'$, to

$$[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} [F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}.$$

Aby obliczyć $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$ korzystamy ze wzoru

$$[\mathrm{Id}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}.$$

Z tego wynika bezpośrednio, że

$$[\mathrm{Id}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \mathrm{Id} \Rightarrow [\mathrm{Id}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = ([\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}})^{-1}.$$

Widać, że

$$[\mathrm{Id}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

Z tego

$$[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \Rightarrow$$

i

$$[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Teraz, obliczymy $([F^*]^{\mathcal{E}^*}_{\mathcal{B}^*})^T$. Najpierw, obliczymy $\mathcal{B}^*$. Mamy, że baza sprzężona do $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ to

$$[\omega^1]_{\mathcal{E}} = [\ 1 \quad 0\ ], \qquad [\omega^2]_{\mathcal{E}} = [\ 0 \quad 1\ ].$$

Teraz, mamy, że $\bar{\omega}^i(e_j) = \delta^i_j$. Więc,

$$\bar{\omega}^1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right) = 1, \qquad \bar{\omega}^1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\right) = 0,$$
$$\bar{\omega}^2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right) = 0, \qquad \bar{\omega}^2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\right) = 1.$$

Jeżeli zapisujemy $\bar{\omega}^1 = \lambda_{11}\omega^1 + \lambda_{12}\omega^2$ i $\bar{\omega}^2 = \lambda_{21}\omega^1 + \lambda_{22}\omega^2$, to

$$[\bar{\omega}^1]_{\mathcal{E}} = [\ \lambda_{11} \quad \lambda_{12}\ ], \qquad [\bar{\omega}^2]_{\mathcal{E}} = [\ \lambda_{21} \quad \lambda_{22}\ ]$$

i poprzednie warunki można zapisać w macierzowej postaci następująco

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{i}{2}\begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \Longrightarrow \qquad [\bar{\omega}_1]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}[\ 1 \quad -i\ ], \qquad [\bar{\omega}^2]_{\mathcal{E}} = [\ 1 \quad i\ ].$$

Teraz

$$[F^*(\bar{\omega}_1)]_{\mathcal{E}} = [\bar{\omega}_1 \circ F]_{\mathcal{E}} = [\bar{\omega}_1]_{\epsilon}[F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}[1\ -i][F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$$

i

$$[F^*(\bar{\omega}_1)]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}[1\ -i]\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[-1\ i].$$

Natomiast,

$$[F^*(\bar{\omega}_2)]_{\mathcal{E}} = [\bar{\omega}_2 \circ F]_{\mathcal{E}} = [\bar{\omega}_2]_{\mathcal{E}}[F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}[1\ \ i][F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}},$$
$$[F^*(\bar{\omega}_2)]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}[1\ \ i]\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[1\ i].$$

Więc,

$$[F^*(\bar{\omega}_2)]^{\mathcal{E}^*}_{\mathcal{B}^*} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{bmatrix} \to ([F^*(\bar{\omega}_2)]^{\mathcal{E}^*}_{\mathcal{B}^*})^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix} = [F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}.$$

□

Ćwiczenie 2. Niech $F : E \to E$ będzie odwzorowaniem liniowym takim, że $F^2 = F$ i $\dim E < \infty$. Udowodonij, że istnieje taka baza $\mathcal{E}$ dla której $[F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ ma postać

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]. \tag{2.1}$$

Rozwiązanie: Niech $\{e_1, \dots, e_k\}$ będzie bazą podprzestrzeni $\ker F$. Uzupełniamy tę bazę do bazy przestrzeni E dodając wektory $e_{k+1}, \dots, e_n$. Mamy, że $F(e_1) = \dots = F(e_k) = 0$. Skoro $\operatorname{Im} T = n - \dim\ker T$, to $\dim \operatorname{Im} F = n - k$. Z tego wynika, że $F(e_{k+1}), \dots, F(e_n)$, które rozpinają $\operatorname{Im} F$, są liniowo niezależne. Ponadto, ponieważ $F^2(w) = F(w)$ dla dowolnego $w \in E$, to

$$F^2(e_\alpha) = F(e_\alpha), \qquad \alpha = k+1, \dots, n.$$

Udowodnimy teraz, że $e_1, \dots, e_k, F(e_{k+1}), \dots, F(e_n)$ tworzą bazę E. Widać, że

$$\langle F(e_{k+1}), \dots, F(e_n)\rangle \cap \ker F = \{0\}.$$

Właśnie, jeżeli $w \in \ker F$ to $F(w) = 0$ i jeżeli $w \in V = \langle F(e_{k+1}), \dots, F(e_n)\rangle$, to $F(w) = w$. Wtedy, jeżeli $w \in \langle F(e_{k+1}), \dots, F(e_n)\rangle \cap \ker T$, to $w = F(w) = 0$. Więc, widać, że

$$\{e_1, \dots, e_k\} \cap \langle F(e_{k+1}), \dots, F(e_n)\rangle = \{0\}.$$

Z tego wynika bezpośrednio, że $\ker F + V = E$ i $\ker T \oplus V = E$. Więc,

$$\{e_1, \dots, e_k, F(e_{k+1}), \dots, F(e_n)\}$$

tworzą bazę przestrzeni E. W tej bazie, F ma macierz (2.1). $\square$

Ćwiczenie 3. Kommutator macierzy przestrzeni wektorowej $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ to

$$[A,B] = A\cdot B - B\cdot A, \qquad A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Udowodnij, że odwzorowanie $b : (A,B)\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\times \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto [A,B]\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ to odwzorowanie biliniowe alternujące spełniające

$$[A,[B,C]] = [[A,B],C] + [B,[A,C]], \qquad \text{identyczność Jacobiego},$$

dla dowolnych $A,B,C\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Mówi się wtedy, że $(M_n(\mathbb{C}),[\cdot,\cdot])$ to algebra Liego. Ustal, że $\mathrm{Tr}[A,B]=0$ dla dowolnych macierzy A,B. Udowodnij, że z tego wynika, że zbiór macierzy bezśladowych z działaniem b jest algebrą Liego. Czy to jest też prawda: a) dla macierzy symetrycznych $A=A^T$, b) dla macierzy antysymetrycznych $A=-A^T$.

Rozwiązanie: Mamy, że

$$b(A,B) = [A,B] = (AB-BA) = -(BA-AB) = -[B,A] = -b(B,A),$$

czyli b jest antysymetryczna, i

$$\begin{aligned}[][[A,B],C]]+[B,[A,C]] &= (AB-BA)C - C(AB-BA) + B(AC-CA) - (AC-CA)B\\ &= (AB)C - C(-BA) + B(-CA) - (AC)B = ABC + CBA - BCA - ACB\\ &= A(BC-CB) - (BC-CB)A = A[B,C]-[B,C]A = [A,[B,C]],\end{aligned}$$

czyli b spełnia identyczność Jacobiego. Podsumując, $M_n(\mathbb{C})$ to algebra Liego.

Wiemy, że $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ i Tr to odwzorowanie liniowe. Zatem, $0 = \mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}([A,B])$. Z tego wynika, że możemy zdefiniować $\mathrm{Tr} : \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$.

Warto udowodnić, że $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ korzystając z tego, że dla macierzy A typu $n\times n$ mamy, że $\mathrm{Tr}A = \sum_{k=1}^n a_{kk}$. Więc, dla dowolnych macierzy $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mamy, że

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{ki} = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n A_{ki}B_{ik} = \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} = \mathrm{Tr}(BA).$$

Teraz dane macierze symetryczne A i B mamy, że

$$[A,B]^T = (AB)^T - (BA)^T = B^TA^T - A^TB^T = BA - AB = [B,A] = -[A,B].$$

Z tego wynika, że macierz $[A,B]$ nie jest symetryczna, gdy $[A,B]\neq 0$. Więc, ogólnie nie można powiedzieć, że zbiór macierzy symetrycznych jest algebrą Liego.

Natomiast, dane macierze antysymetryczne A i B mamy, że

$$[A, B]^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = [B, A] = -[A, B].$$

Z tego wynika, że macierz $[A, B]$ jest antysymetryczna. Więc, zbiór macierzy antysymetrycznych jest algebrą Liego razem z komutatorem.

□

Ćwiczenie 4. Dane odwzorowanie $F : E \to E$, gdzie E to przestrzeń liniowa skończonego wymiaru, wiemy, że

$$\det F = \det[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}, \qquad \operatorname{Tr} F = \operatorname{Tr}[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$$

dla dowolnej bazy $\mathcal{B}$. Udowodnij, że $\det F$ i $\operatorname{Tr} F$ są dobrze zdefiniowane (czyli niezależne od bazy).

Rozwiązanie: Wiemy, że dla dowolnych baz $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ przestrzeni E skończonego wymiaru mamy

$$[F]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}. \tag{4.1}$$

Skoro

$$[\mathrm{Id}] = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \Rightarrow [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = ([\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})^{-1}, \tag{4.2}$$

to

$$\det[F]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = \det([\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}) = \det([\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}\det[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\det[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}) = \det([\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}\det[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})\det[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$$

i

$$\det[F]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = \det([\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})\det[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \det([\mathrm{Id}])\det[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \det[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}.$$

Korzystając znowu z (4.1) i (4.2), mamy, że

$$\operatorname{Tr}([F]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}) = \operatorname{Tr}([\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}) = \operatorname{Tr}([F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}) = \operatorname{Tr}[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}.$$

□