Układy równań i ostatnie rzeczy

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. W zależności od wartości parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań

$$\begin{bmatrix} 3a-1 & 2a & 3a+1 \\ 2a & 2a & 3a+1 \\ a+1 & a+1 & 2a+2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

Ćwiczenie 2. Znaleźć, jeżeli to możliwe, odwrotność macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3. Pokazać, że jeśli $A \in M_n(\mathbb{C})$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$, to równanie $A(z) = \lambda\bar{z}$ ma niezerowe rozwiązanie $z \in \mathbb{C}^n$ wtedy i tylko wtedy gdy $A\bar{A} - |\lambda|^2\mathrm{Id}$, gdzie $\bar{A}$ ma elementy $\bar{a}_{ij} = \overline{a_{ij}}$, jest osobliwa.

Rozwiązanie: Jezėli $A(z) = \lambda\bar{z}$, wtedy $\bar{(}A(z)) = \bar{\lambda}z$ i $\bar{A}\bar{z} = \bar{\lambda}z$. Korzystając z tego, wynika, że

$$[A\bar{A} - |\lambda|^2\mathrm{Id}](\bar{z}) = A\bar{A}\bar{z} - |\lambda|^2\bar{z} = A\bar{\lambda}z - |\lambda|^2\bar{z} = \lambda\bar{\lambda}\bar{z} - |\lambda|^2\bar{z} = 0.$$

Zatem, endomorfizm T macierzy $B = A\bar{A} - |\lambda|^2\mathrm{Id}$ ma nietrywialne jądro, ponieważ $Bz = 0$ dla $z \neq 0$. To oznacza, że T nie jest epimorfizmem i kolumny jego macierzy są liniowo zależne. Z tego wynika, że $\det B = 0$ i macierz B jest osobliwa.

Odwrotnie, jeżeli B jest osobliwa, istnieje wektor $\bar{z} \in \mathbb{C}^n$ taki, że $B\bar{z} = 0$. Zdefiniujemy morfizm $J : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ liniowy nad $\mathbb{R}$ dany wzorem

$$Jz = \bar{z}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Wtedy, widać, że $J^2 = \mathrm{Id}$ i

$$JAz = \bar{A}\bar{z} = \bar{A}Jz, \qquad \forall z \in \mathbb{C}^n \Rightarrow JA = \bar{A}J.$$

Korzystając z tego,

$$(AJ - |\lambda|\mathrm{Id})(AJ + |\lambda|\mathrm{Id}) = AJAJ - |\lambda|^2\mathrm{Id} = A\bar{A} - |\lambda|^2\mathrm{Id} = B.$$

Jeżeli B jest osobliwa i

$$(AJ - |\lambda|\mathrm{Id})(AJ + |\lambda|\mathrm{Id}) = B.$$

to mamy wtedy dwie opcje: $AJ + |\lambda|\mathrm{Id}$ jest osobliwa lub $AJ - |\lambda|\mathrm{Id}$ jest osobliwa. Zakładamy, że $AJ - |\lambda|\mathrm{Id}$ jest osobliwa. Wtedy

$$\exists z \in \mathbb{C}^n, \qquad (AJ - |\lambda|\mathrm{Id})z = 0.$$

Wtedy $A\bar{z} = |\lambda|z$. Możemy zdefiniować $w = e^{-i\varphi/2}z$, gdzie $\varphi = \arg\lambda$. Zatem,

$$\bar{A}\bar{w} = e^{i\varphi/2}\bar{A}\bar{z} = e^{i\varphi/2}|\lambda|z = e^{i\varphi}|\lambda|w = \lambda w.$$

Więc, $A\bar{w} = \lambda w$. Zapisując $z_2 \equiv \bar{w}$, otrzymujemy, że $Az_2 = \lambda\bar{z}_2$ i to równanie ma nietrywialne rozwiązanie.

□

Ćwiczenie 4. Wykazać, że jeśli macierz kwadratowa i odwracalna A ma własność: suma elementów każdego wiersza jest taka sama, to tę samą własność ma macierz odwrotna A^{-1}.

Rozwiązanie: Suma elementów każdego wiersza macierzy A jest taka sama wtedy i tylko wtedy gdy

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},$$

gdzie c to suma elementów każdego wiersza. Widać, że $c \neq 0$ ponieważ macierz jest obracalna i nie istnieje wektor z taki, że $Az = 0$. Skoro A jest odwracalna, to istnieje A^{-1} i

$$A^{-1}A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = cA^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = cA^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

Zatem, macierz A^{-1} jest taka, że suma elementów każdego wiersza jest taka sama i równa $1/c$.

□

Ćwiczenie 5. Obliczyć ślad i wyznacznik operatora $F \in \mathrm{End}V$, jeżeli $V = \mathbb{K}_n[t], a \in \mathbb{K}$, natomiast F ma następującą postać:

- $Fw(t) = w'(t)$,
- $Fw(t) = tw'(t) + aw(t)$,
- $Fw(t) = w'(t) + aw(t)$,

Ćwiczenie 6. Niech $F : E \to E$ będzie operatorem nilpotentnym, czyli $T^{n_0} = 0$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$, na przestrzeni wektorowej E skończonego wymiaru. Udowodnij, że $\mathrm{Tr}\, T = 0$ i $\det T = 0$.

Rozwiązanie: Spróbujemy napisać macierz endomorfizmu F w bazie gdzie widać, że elementy diagonalu tej macierzy są wszystkie równe zeru. Aby to zrobić, najpierw udowodnimy parę właściwości endomorfizmów nilpotentnych.

Zakładamy, że n_0 jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $T^{n_0} = 0$. Dany element $e \in \ker F^k$ wiemy, że $F^k(e) = 0$. Więc, $F^{k+1}(e) = 0$ i $e \in \ker F^{k+1}$. Z tego wynika, że $\ker F^k \subset \ker F^{k+1}$. Korzystając z tego mamy, że

$$0 \subset \ker F \subset \ker F^2 \subset \ldots \subset \ker F^{n_0-1} \subset \ker F^{n_0} = E. \tag{6.1}$$

Ponadto, widać też, że jeżeli $e \in \ker F^k$, to $F^k(e) = 0$. Zatem, $F^{k-1} \circ F(e) = 0$. To oznacza, że $F(e) \in \ker F^{k-1}$ dla dowolnego $e \in \ker F^k$. Więc,

$$F(\ker F^k) \subset \ker F^{k-1}.$$

Możemy teraz wybrać bazę $\{e_1^{(1)}, \ldots, e_{n_1}^{(1)}\}$ podprzestrzeni $\ker F$. Skoro $\ker F \subset \ker F^2$, możemy uzupełnić tą bazę do bazy $\ker F^2$ za pomocą pewnych elementów $\{e_1^{(2)}, \ldots, e_{n_2}^{(2)}\}$. Możemy to powtarzać aż do momentu gdy mamy bazę przestrzeni E:

$$e_1^{(n_0)}, \ldots, e_{n_{n_0}}^{(n_0)}, \ldots, e_1^{(2)}, \ldots, e_{n_2}^{(2)}, e_1^{(1)}, \ldots, e_{n_1}^{(1)}, .$$

Macierz morfizmu F ma jakiś element w jej diagonale różny od zera, gdy dla pewnego elementu $e_j^{(i)}$ tej bazy, jego obraz, $T(e_j^{(i)})$ jest taki, że w tej bazie ma rozkład

$$T(e_j^{(i)}) = \lambda_1^1 e_1^{(1)} + \ldots + \lambda_{n_1}^1 e_{n_1}^{(1)} + \lambda_1^2 e_1^{(2)} + \ldots + \lambda_{n_2}^2 e_{n_2}^{(2)} + \ldots + \lambda_1^{n_0} e_1^{(n_0)} + \ldots + \lambda_{n_0}^{n_0} e_{n_{n_0}}^{(n_0)}$$

i $\lambda_j^i \neq 0$. Natomiast, mamy, że $T(e_j^{(i)}) \in \ker T^{(i-1)}$. Z tego wynika, że

$$T(e_j^{(i)}) = \lambda_1^1 e_1^{(1)} + \ldots + \lambda_{n_1}^1 e_{n_1}^{(1)} + \ldots + \lambda_1^{i-1} e_1^{(i-1)} + \ldots + \lambda_{n_{i-1}}^{i-1} e_{n_{i-1}}^{(i-1)}.$$

i $\lambda_j^i = 0$. Wówczas, macierz F w tej bazie ma wszystkie elementy w diagonale równe zeru. Zatem, $\operatorname{Tr} F = 0$.

Aby udowodnić, że $\det T = 0$ wystarczy zauważyć, że

$$0 = \det F^{n_0} = (\det F)^{n_0} \Rightarrow \det F = 0.$$

□

Ćwiczenie 7. Oblicz

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$$

dla dowolnych $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{C}$.

Rozwiązanie: Widać, że

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^n$$

Macierze

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

komutują, czyli $AB = BA$. Korzystając z tego i z dwumianu Newtona, mamy że

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) A^i B^{n-i},$$

czyli

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{n-i}.$$

Ponadto, macierz A jest nilpotentna, czyli $A^{n_0} = 0$ dla pewnego $n_0 \in N$. Właśnie

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z tego wynika, że

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□