Kartkowka I

Javier de Lucas

Zadanie 1. (1 punkt) Dane wielomiany o współczynnikach zespolonych

$$P_1(\mathfrak{X}) := \mathfrak{X}^4 + (a-1)\mathfrak{X}^3 + (b-a-6)\mathfrak{X}^2 + (-b-6a)\mathfrak{X} - 6b.$$

i

$$P_2(\mathfrak{X}) := \mathfrak{X}^2 - 2\mathfrak{X} + 2,$$

ustal $a, b \in \mathbb{R}$, żeby $P_1(\mathfrak{X})$ będzie podzielny przez $P_2(\mathfrak{X})$.

Zadanie 2. (1.25 punkt) Za pomocą algorytmu Euklidesa dla wielomianów, znajdź największy wspólny dzielnik między wielomianami

$$\mathfrak{P}_1(\mathfrak{X}) := \mathfrak{X}^5 - 5\mathfrak{X}^4 - 15\mathfrak{X}^3 + 125\mathfrak{X}^2 - 226\mathfrak{X} + 120,$$
$$\mathfrak{P}_2(\mathfrak{X}) := \mathfrak{X}^4 + 2\mathfrak{X}^3 - 13\mathfrak{X}^2 - 14\mathfrak{X} + 24.$$

Czy można rozwiązać to zadanie inaczej?

Zadanie 3. (1.25 punkt) Udowodnij, że

$$\sin^{2m}\varphi = \frac{1}{2^{2m-1}}\left[\frac{1}{2}\binom{2m}{m} + \sum_{k=1}^{m}\binom{2m}{m-k}(-1)^k\cos(2k\varphi)\right].$$

Zadanie* 4. (0.5 punktów) Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Niech $P(\mathfrak{X}) = \sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha \mathfrak{X}^\alpha$ będzie wielomianem takim, że $a_\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ i $P(\mathfrak{X})$ jest podzielny przez $(\mathfrak{X}-1)^k$. Niech q będzie liczbą pierwszą taką, że $\frac{q}{\log(q)} < \frac{k}{\log(n+1)}$ Udowodnij, że każda liczba $w \in \mathbb{C}$ taka, że $w^q = 1$, jest pierwiastkiem wielomianu $P(\mathfrak{X})$.

Proszę oddać mi rozwiązania do 3 listopada. Przypominam, że można dostać aż do 4 punktów za aktywność. Ostateczna ocena za aktywność to średnia wsród ocen kartkówek.