ALGEBRA I R
4 lutego 2015
Semestr zimowy
Egzamin probny

Uwagi organizacyjne: każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącego ćwiczenia. Na wszelki wypadek prosimy też o podanie numeru grupy. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o kontakt z asystentem.

Zadanie 1. Udowodnij tożsamość trygonometryczną

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sin\left(\frac{2k-1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right)=\frac{(-1)^{n-1}}{2},$$

gdzie $n\in\mathbb{N}$.

Zadanie 2. Niech $\mathcal{B}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ będzie bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^n$. Podaj wszystkie odwzorowania $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ takie, że $T\circ F=T$, gdzie $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem liniowym takim, że $F(e_i)=e_{i+1}$ dla $i=1,\ldots,n-1$ i $F(e_n)=e_1$. Podaj ogólną postać macierzy tych morfizmów w bazach kanonicznych oraz wymiary ich obrazów i jądr. Określ możliwe wartości $\dim\operatorname{Im}T^n$.

Zadanie 3. Dana jest przestrzeń wektorowa $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ macierzy 2×2 o współczynnikach rzeczywistych. Zdefiniujemy odwzorowanie liniowe $F:\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ postaci $F(X)=AX+X^TA^T$, gdzie $X\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ i

$$A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},$$

i B^T to macierz transponowana do $B\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Podaj macierz $[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ morfizmu w bazach kanonicznych $\mathcal{B}$ i $[F]_{\bar{\mathcal{B}}}^{\bar{\mathcal{B}}}$ w bazach

$$\bar{\mathcal{B}}:=\left\{e_1=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0&-1\\0&-1\end{bmatrix},e_3=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},e_4=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}.$$

Oblicz macierz $[F^T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ morfizmu F^T.

Zadanie 4. Niech $k\geq 2$. Dowieść, że dla każdego podzbioru $K\subset\{1,\ldots,n-1\}$ istnieje dokładnie jedna permutacja $\sigma_K\in S_n$, spełniająca dwa następujące warunki:

$$\forall k\in K:\sigma_K(k)=k+1,\qquad \forall j\in\{1,\ldots,n\}\backslash K:\sigma_K(j)\leq j.$$

Znaleźć rozkład σ_K na cykle rozłączne oraz wykazać, że $\operatorname{sgn}(\sigma_K)=(-1)^{|K|}$.