ALGEBRA I R
8 grudnia 2014
Semestr zimowy
Kolokwium

Uwagi organizacyjne: każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącego ćwiczenia. Na wszelki wypadek prosimy też o podanie numeru grupy. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o kontakt z asystentem.

Zadanie 1. Udowodnij tożsamość trygonometryczną

$$\sum_{k=1}^{N} \cos^3(k\varphi+\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{3(N+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{3N\varphi}{2}+3\alpha\right)}{4\sin\frac{3\varphi}{2}} + \frac{3\sin\left(\frac{(N+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{N\varphi}{2}+\alpha\right)}{4\sin\frac{\varphi}{2}} - \cos^3\alpha$$

dla $\varphi \in \mathbb{R}\setminus\{2s\pi, s \in \mathbb{Z}\}$, $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Znajdź przeciwobraz zbioru $S := \{z \in \mathbb{C} |\, \operatorname{Im} z > 1\}$ względem odwzorowania

$$f \,:\, \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{C} \,:\, z \mapsto \frac{2z-1}{2z+3},$$

a następnie wyznacz obraz $g(S)$ tego zbioru względem odwzorowania

$$g \,:\, \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{C} \,:\, z \mapsto z^2.$$

Zadanie 3. Niech układ $e_1, \ldots, e_n$, gdzie $n \geq 3$, będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ charakterystyki zero. Dowieść, że układ $e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_n + e_1$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest nieparzysta. Czy to jest jeszcze prawda dla dowolnego ciała $\mathbb{K}$?

Zadanie 4. Dana jest przestrzeń liniowa $M_2(\mathbb{C})$ nad $\mathbb{R}$. Zdefiniujemy

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \,|\, x_{11} + x_{22} = 0, x_{12} = \bar{x}_{21} \right\} \subset M_2(\mathbb{C}),$$

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \subset M_2(\mathbb{C}).$$

Udowodnij, że V to podprzestrzeń liniowa $M_2(\mathbb{C})$. Podaj wymiar i bazę podprzestrzeni V i W. Dowieść, że $M_2(\mathbb{C})$ jest sumą prostą podprzestrzeni V, W i podaj rozkład wektora

$$a = \begin{bmatrix} 3+2i & 3-i \\ 2+i & 1-2i \end{bmatrix}$$

względem $V \oplus W$. Jeżeli rozpatrujemy $M_2(\mathbb{C})$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{C}$, czy $M_2(\mathbb{C})$ jest sumą prostą V, W?