Wielomiany i liczby zespolone

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Ustal dla których $a, b \in \mathbb{R}$ można podzielić

$$f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 - 3\mathfrak{X}^2 + a\mathfrak{X} - b \text{ przez } f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 3\mathfrak{X} + 2$$

$f_3(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4+(3-a-b)\mathfrak{X}^3+(1-3(a+b)+ab)\mathfrak{X}^2+(3ab-a-b)\mathfrak{X}+ab$ przez $f_4(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2-4\mathfrak{X}+4$.

Ćwiczenie 2. Napisz dwa wielomiany o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$ określające tą samą funkcję.

Ćwiczenie 3. Za pomocą algorytmu Euklidesa dla wielomianów, podaj największy wspólny dzielnik następujących wielomianów o współczynnikach w $\mathbb{R}$

$$f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 - 6\mathfrak{X}^4 + 45\mathfrak{X}^2 - 46\mathfrak{X} - 24 \qquad i \qquad f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 5\mathfrak{X}^4 + 6\mathfrak{X}^3 - 3\mathfrak{X}^2 - 7\mathfrak{X} - 2$$

$$f_3(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 2\mathfrak{X}^4 - \mathfrak{X}^3 + \mathfrak{X}^2 - 2\mathfrak{X} - 1 \qquad i \qquad f_4(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + 6\mathfrak{X}^3 + 15\mathfrak{X}^2 + 18x + 5.$$

Ćwiczenie 4. Załóżmy, że punkty $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}$ dla $k = 1, \ldots, n$ (gdzie $n > 2$) są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w akrąg $C(0; r)$ (środek 0 i promień r). Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \frac{n}{2} r^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0.$$

Ćwiczenie 5. Niech $f(z) \equiv z^{-1}$ dla $z \in \mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C} - \{0\}$. Wykazać, że dla każdego $u = e^{i\theta}$, gdzie $0 < \theta < \pi/2$ istnieje okrąg $C = C(s, r)$ (znaleźć środek s i promień r), przechodzący przez u i $\bar{u}$, f-niezmienniczy $f(C) = C$ i różne od $C(0, 1)$.

Ćwiczenie 6. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2k\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ćwiczenie 7. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Wykazać, że

$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n| \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \exists z \neq 0 : \exists r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}_+ : \\ z_j = r_j z \text{ dla } j \in 1, \ldots, n \end{array} \right).$$