Wielomiany i liczby zespolone (II)

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Dane wielomiany o współczynnikach rzeczywistych

$$P_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + (a-1)\mathfrak{X}^3 + (b-a-6)\mathfrak{X} + (-b-6a)\mathfrak{X} - 6b.$$

i

$$P_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 4\mathfrak{X} + 3,$$

ustal $a, b \in \mathbb{R}$, żeby $P_1(\mathfrak{X})$ będzie podzielny przez $P_2(\mathfrak{X})$.

Ćwiczenie 2. Niech $P(\mathfrak{X})$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnij, że $P(\mathfrak{X})$ jest podzielny przez $(\mathfrak{X}-a)^k$ wtedy i tylko wtedy gdy wielomiany $d^iP(\mathfrak{X})/dx^i$, dla $i = 0, \ldots, k$, są podzielne przez $(\mathfrak{X} - a)$.

Ćwiczenie 3. Za pomocą algorytmu Euklidesa dla wielomianów, znajdź największy wspólny dzielnik wielomianów

$$a)\mathfrak{P}_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 - 5\mathfrak{X}^3 + 8\mathfrak{X}^2 - 10\mathfrak{X} + 12, \qquad \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{X}^4 + \mathfrak{X}^2 - 2,$$
$$b)\mathfrak{P}_3(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 - 16, \qquad \mathfrak{P}_4 = \mathfrak{X}^4 + 8\mathfrak{X}^3 + 24\mathfrak{X}^2 + 32\mathfrak{X} + 16,$$
$$c)\mathfrak{P}_5(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + \mathfrak{X}^4 + \mathfrak{X}^3 + \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X} + 1, \qquad \mathfrak{P}_6 = \mathfrak{X}^3 + \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X} + 1,$$
$$d)\mathfrak{P}_7(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^7 + \mathfrak{X}^4 + \mathfrak{X}^3 + \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X} + 1, \qquad \mathfrak{P}_8 = \mathfrak{X}^5 + \mathfrak{X}^4 + \mathfrak{X}^3 + \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X} + 1.$$

Ćwiczenie 4. Wykazać, że dla $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$ oraz $w \neq 1$, równanie

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = w$$

ma dokładnie n pierwiastków rzeczewistych. Wyznaczyć te pierwiastki.

Ćwiczenie 5. Udowodnij, że

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\phi + \alpha) = 2^n \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\varphi}{2} + \alpha\right);$$
$$(b)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \cos(k\phi) = \left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n}{2}(\varphi + \pi)\right).$$

Ćwiczenie 6. Udowodnij, że dla liczb zespolonej $z \neq -|z|$ mamy, że

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\frac{z+|z|}{|z+|z||}.$$

Korzystając z tego, oblicz rozwiązania równań

$$x^2 - (7-3i) + (8-9i) = 0, \qquad x^3 - x^2 + (7-i)x - 6 - 6i = 0.$$