ALGEBRA I R

Podsumowanie I (ciała, wielomiany, liczby zespolone, przestrzeni wektorowe)

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Niech $\mathbb{F}$ będzie skończonym ciałem. Udowodnij, że istnieje liczba pierwsza p taka, że $a + a + \cdots + a = 0$ (p razy) dla każdego $a \in \mathbb{F}$.

Ćwiczenie 2. Dane jest ciało $(\mathbb{F}, +, \cdot)$. Mówi się, że $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ jest podciałem $\mathbb{F}$ gdy $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$, gdzie

$$+_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \ni (a, b) \mapsto a + b \in \mathbb{K}, \qquad \cdot_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in \mathbb{K}$$

jest ciałem. Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem i $a + \ldots + a = 0$ (m-razy) dla $a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Czy zbiór elementów

$$A = \{1 + 1 + \ldots + 1(p - \text{razy}) | p \leq m\}$$

jest podciałem $\mathbb{K}$?

Ćwiczenie 3. Oblicz największy wspólny dzielnik wsrów wielomianów

$$\mathfrak{P}_1(\mathfrak{X}) = 5\mathfrak{X}^3 + 2\mathfrak{X}^2 + 3\mathfrak{X} - 10, \qquad \mathfrak{P}_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 + 2\mathfrak{X}^2 - 5\mathfrak{X} + 2.$$

Ćwiczenie 4. Udowodnij, że dla liczb zespolonej $z \neq -|z|$ mamy, że

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||}.$$

Korzystając z tego, oblicz rozwiązania równań

$$x^2 - (7 - 3i)x + (8 - 9i) = 0, \qquad x^3 - x^2 + (7 - i)x - 6 - 6i = 0.$$

Ćwiczenie 5. Wykazać, że dla $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$ oraz $w \neq 1$, równanie

$$\left(\frac{x + i}{x - i}\right)^n = w$$

ma dokładnie n pierwiastków rzeczywistych. Wyznaczyć te pierwiastki.

Ćwiczenie 6. Udowodnij, że każde ciało $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ jest w naturalnym sposób przestrzenią liniową. Wykaż, że jeżeli $\mathbb{P} \subset \mathbb{K}$ to podciało, to $\mathbb{K}$ można zrozumieć jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{P}$.