Podprzestrzeni wektorowe, bazy, rząd macierzy

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Sprawdzić, czy wektory

$$K_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad K_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}, \qquad K_3 := \begin{bmatrix} 2+2i \\ 4+3i \\ 1 \\ 3i \end{bmatrix},$$

są liniowo niezależne nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$ okreslając rząd macierzy.

Rozwiązanie:

$\square$

Ćwiczenie 2. Sprawdzić, że W jest podprzestrzenią skończonego wymiaru przestrzeni $\mathbb{R}^N$, podać wymiar podprzestrzeni W i podać przykład jej bazy:

- $W = \{\mathbf{x} = (x_n \mid x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x}\,\text{jest ciągiem arytmetycznem}\}$,
- $W = \{\mathbf{x} : \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\}$.

Ćwiczenie 3. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni

$$V := \{v \in \mathbb{R}_3[\cdot] : v(1) = \dot{v}(0) = \frac{1}{2}v(0)\} \subset \mathbb{R}_3[\cdot].$$

Ćwiczenie 4. Niech $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\}$. Dowieść, że gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, zbiór W jest 1-wymiarową przestrzenią, lecz jest sumą mnogościową dwóch 2-wymiarowych podprzestrzeni gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Ćwiczenie 5. Niech $n \in \mathbb{N}$, sprawdzić, że wielomiany $v_k = t^k + t^{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, tworzą bazę podprzestrzeni $W := \{v \in \mathbb{K}_n[t], v(-1) = 0\} \subset \mathbb{K}_n[t]$.