Suma i przecięcie podprzestrzeń, suma prosta, przestrzeń ilorazowa

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. W zależności od wartości parametru p, podaj wymiar przestrzeni $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, gdzie

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+2p \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} p \\ 5 \\ 3+p \\ -3p \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 10+p \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 2. Podać bazę sumy i przecięcia powłoki liniowej $V = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ oraz $W = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, gdzie

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Podaj postać parametryczną i uwikłaną V, W, $V \cap W$ i $V + W$. Sprawdź, że

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim V \cap W.$$

Ćwiczenie 3. Dane są podprzeszteni $V, W \subset \mathbb{C}_2^2$, gdzie $\mathbb{C}_2^2$ to przeztrzeń liniowa nad $\mathbb{C}$ macierzy 2×2 o współczynnikack w ciele $\mathbb{C}$, postaci

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \mid x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_4 = 0 \right\}, \qquad W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Oblicz $V + W$, $V \cap W$. Czy $\mathbb{C}_2^2$ jest sumą prostą podprzestrzeni V i W? W takim przypadku podaj rokład na składowe wektorów

$$a = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 4. Niech $V = \mathbb{R}^3$ i $W = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\}$. Oblicz klasy przestrzeni V/W i podaj interpretację geometryczntych klas. Udowodnij, że V/W jest isomorficzny do $\mathbb{R}$.