Przestrzeń dualna, annihilatory

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Sprawdź, czy następujące odwzorowania są formami liniowymi:

$$a)\ D : C^\infty(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \sum_{n=0}^{p} a_n \frac{d^n f}{dt^n}(t_0) \in \mathbb{R}, \qquad a_n \in \mathbb{R}, \qquad p \in \mathbb{N}, \qquad t_0 \in \mathbb{R},$$

$$b)\ D : C^0([0,1]) \ni f \mapsto \int_{t_0}^{t_1} e^{ax'} f(x')dx' \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}, t_0, t_1 \in [0,1],$$

$$c)\ \mathrm{Tr} : M(n,\mathbb{K}) \ni \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_{ii} \in \mathbb{K}.$$

Ćwiczenie 2. Dana jest przestrzeń liniowa $M_2(\mathbb{R})$ macierzy 2×2 o współczynnikach w $\mathbb{R}$. Oblicz bazę dualną bazy

$$m_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3. Dana jest przestrzeń $C^0([-1,1])$ funkcji ciągłych na $[-1,1]$. Dane są podprzestrzenie $P = \{f \in C^0([-1,1]) \,|\, f(x) = f(-x)\}$, $N = \{f \in C^0([-1,1]) \,|\, f(x) = -f(-x)\}$. Dowieść, że $P \oplus N = C^0([-1,1])$. Skonstruuj podprzestrzeni $B_1, B_2 \subset [C^0([-1,1])]^*$ takie, że

$$f \in P \leftrightarrow \omega_1(f) = 0\ \forall \omega_1 \in B_1, \qquad f \in N \leftrightarrow \omega_2(f) = 0\ \forall \omega_2 \in B_2.$$

Ćwiczenie 4. Dana jest podprzestrzeń $\mathbb{R}_n[\cdot]$ wielomianów o współczynnikach w ciele $\mathbb{R}$ stopnia mniejszego/równego n. Dana jest baza $P_0 = 1, \dots, P_n = t^n$ wielomianów $\mathbb{R}_n[\cdot]$. Zbuduj bazę dualną.

Ćwiczenie 5. Dana jest podprzestrzeń V przestrzeni liniowej E. Udowodnij, że zbiór V° wszystkich form liniowych $\omega \in E^*$ takich, że $\omega(V) = 0$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni E^*. Jeżeli $\dim E < \infty$, wykaż, że $\dim V^\circ = \dim E - \dim V$.

Ćwiczenie 6. Dane są podprzestrzenie V, W przestrzeni liniowej E. Udowodnij, że

$$(V + W)^\circ = V^\circ \cap W^\circ, \qquad V^\circ + W^\circ \subset (V \cap W)^\circ, \qquad V \subset V^{\circ\circ}$$

Jeżeli $\dim E < \infty$, to $V^{\circ\circ} = V$ i $V^\circ + W^\circ = (V \cap W)^\circ$.