Zmiana bazy i odwzorowania transponowane

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Dane jest odwzorowanie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ postaci $F : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - y + z, z - x + y, x + y + z) \in \mathbb{R}^3$. Oblicz ker F, Im F. Udowodnij, że istnieje F^{-1} i obliczyć macierze F^{-1} i F w bazach kanonicznych. Czy istnieje $v \in \mathbb{R}^3$ taki, że $F(v) = (1, 2, 3)$? Jeżeli tak, oblicz v. Oblicz $[F^T]_{B^*}^{B^*}$, gdzie B^* to baza dualna do kanonicznej.

Ćwiczenie 2. Dane jest odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$T : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (5x - 6y - 6z, 2x - 2y - 3z, 2x - 3y - 2z) \in \mathbb{R}^3.$$

Podaj macierz tego morfizmu. Udowodnij, że $T^2 = \mathrm{Id}$ (czyli T to morfizm idempotentny). Udowodnij, że T jest injekcją.

Ćwiczenie 3. Dane jest odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że w bazie $\bar{B} = \{e_1 = (1, 0, 2), e_2 = (1, 1, 3), e_3 = (2, 5, 1)\}$ spełnia, że $Te_1 = \lambda_1, Te_2 = 2e_2$ i $Te_3 = 0$. Napisz macierz morfizmu T w bazach kanonicznych B i napisz macierz przejścia z B do $\bar{B}$.

Ćwiczenie 4. Dane jest odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że macierz morfizmu T w bazach kanonicznych jest

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Oblicz macierz morfizmu z bazy kanonicznej B do $\bar{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Oblicz macierz B^T w bazach B^* i z B^* do $\bar{B}^*$. Udowodnij, że

$$[\mathrm{Id}]_{\bar{B}^*}^{B^*} = [[\mathrm{Id}]_{B}^{\bar{B}}]^T.$$

Ćwiczenie 5. Niech $T_1 : E \to F$ i $T_2 : F \to G$ będą odwzorowaniami liniowymi między przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru. Wykaż, że $(T_2 \circ T_1)^T = T_1^T \circ T_2^T$. Udowodnij, że jeżeli T_1 jest injekcją, to T_1^T jest surjekcją i jeżeli T_1 jest surjekcją, to T_1^T jest injekcją.

Wesołych swiąt!!!