Permutacje, formy alternujące, wyznaczniki i ślady

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Sprawdzić, że wzór $3x+3-25E(x/8)$ określa permutacją zbioru $X = \{0,\dots,24\}$; b) rozłożyć σ na cykle rołączne; c) obliczyć sgn σ d) obliczyć $\operatorname{ord}\sigma$ i znaleźć (jeżeli istnieje) rozkład σ na trzy cykl długości 8 (niekoniecznie rozłączne).

Ćwiczenie 2. Niech $\theta^1,\dots,\theta^n \in (\mathbb{K}^n)^*$. Wykaż, że

$$(\theta^1\wedge\ldots\wedge\theta^n)(e_1,\dots,e_n) := \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\mathrm{sg}\sigma}\theta^1(e_{\sigma(1)})\cdot\ldots\cdot\theta^n(e_{\sigma(n)}),$$

gdzie $e_1,\dots,e_n$ to dowolne elementy $\mathbb{K}^n$, to n-forma liniowa antysymetryczna.

Ćwiczenie 3. Dane są macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{K}), \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$$

odwzorowań liniowych $T_A : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ i $T_B : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ w bazach kanonicznych. Udowodnij, że $\det T_A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ i

$$\det T_B = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ćwiczenie 4. Niech E będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru. Oblicz ślad i wyznacznik morfizmu $T : E \to E$ spełniającego $T^2 = T$.

Ćwiczenie 5. Obliczyć ślad i wyznacznik operatora liniowego F działającego w przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}_2[t]$ i danego wzorem:

$$(Fw)(t) = w(0) + t\cdot w'(t) + \int_{-1}^{1} w(t)dt, \qquad w(t) \in \mathbb{R}_2[t].$$

Ćwiczenie 6. Dane jest odwzorowanie liniowe $T : E \to E$, gdzie E to przestrzeń liniowa nieskończonego wymiaru. Udowodnij, że $\det T = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\ker T \neq 0$.