ALGEBRA I R

Dodatkowe zadania (zadania z gwiazdą są opcjonalne)

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Załóż, że $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ jest ciałem i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Które z następujących właściwości są prawdą?

1. $0 \cdot \alpha = 0$.
2. $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$.
3. Każdy element zbioru $\mathbb{F}$ ma tylko jeden element przeciwny.
4. Każdy element $\alpha \neq 0$ zbioru $\mathbb{F}$ ma tylko jeden element odwrotny.
5. $(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$.
6. $1 + 1 \neq 0$.
7. Jeżeli $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$, to $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

Ćwiczenie 2. Niech $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ będzie ciałem. Funkcją wymierną o współczynnikach w $\mathbb{F}$ nazywamy formalny napis postaci

$$f = \frac{f_1(\mathfrak{X})}{f_2(\mathfrak{X})},$$

gdzie $f_1(\mathfrak{X})$ i $f_2(\mathfrak{X})$ są wielomiany o współczynnikach w $\mathbb{F}$ i $f_2(\mathfrak{X}) \neq 0$. Ponadto, mówimy, że $f = g$, gdy $f_1(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X}) = g_1(\mathfrak{X}) \cdot f_2(\mathfrak{X})$. Zbiór funkcji wymiernych można wyposażyć w dodawanie i mnożenie

$$h + g = \frac{h_1(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X}) + h_2(\mathfrak{X}) g_1(\mathfrak{X})}{h_2(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X})}, \qquad h \cdot g = \frac{h_1(\mathfrak{X}) \cdot g_1(\mathfrak{X})}{h_2(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X})}.$$

Udowodnij, że zbiór funkcji wymiernych o współczynnikach w $\mathbb{F}$ jest ciałem względem tych działań.

Ćwiczenie 3. Udowodnij, że suma wszystkich pierwiastków z wielomianu $f_n(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest równa zeru.

Ćwiczenie 4. Dany wielomian $\sum_{k=0}^{n} a_k \mathfrak{X}^n$ o współczynnikich w ciele $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ z pierwiastkami $x_1, \ldots, x_n$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{k<k'=1}^{n} x_k x_{k'} = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \sum_{k<k'<k''=1}^{n} x_k x_{k'} x_{k''} = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \quad \prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Te wzory to część tzw wzorów Viete'a.

Ćwiczenie* 5. Niech $\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ będzie przestrzenią wszystkich wielomianów o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$ i niech $\mathrm{Map}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ będzie przestrzenią funkcji z $\mathbb{K}$ do $\mathbb{K}$. Udowodnij, że odwzorowanie $\Phi : \mathfrak{P}(\mathfrak{X}) \to \mathrm{Map}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ postaci

$$P(\mathfrak{X}) \to f_P,$$

gdzie f_P to funkcja towarzysząca z wielomianem $P(\mathfrak{X})$ jest injekcją wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{K}$ jest skończonem ciałem.

Ćwiczenie 6. Oblicz resztę z dzielenia następujących wielomianów:

- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^7 - 4\mathfrak{X}^6 + \mathfrak{X}^5 + 5\mathfrak{X}^4 + 5\mathfrak{X}^3 - 5\mathfrak{X}^2 + 10\mathfrak{X} - 7$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 6\mathfrak{X}^2 + 11\mathfrak{X} - 6$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^9 - 8\mathfrak{X}^8 + 15\mathfrak{X}^7 + 5\mathfrak{X}^4 + 9\mathfrak{X} - 16$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 9\mathfrak{X}^2 + 23\mathfrak{X} - 15$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^8 - 9\mathfrak{X}^7 + 24\mathfrak{X}^6 - 24\mathfrak{X}^5 + 24\mathfrak{X}^4 - 24\mathfrak{X}^3 + 24\mathfrak{X}^2 - 22\mathfrak{X} + 16$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 8\mathfrak{X} + 15$.

Ćwiczenie 7. Ustal a, b i c aby wielomian o współczynnikach w $\mathbb{R}$ dany wzorem

$$\begin{aligned} f_1(\mathfrak{X}) &= \mathfrak{X}^7 - (a+b+c)\mathfrak{X}^6 + \mathfrak{X}^5(3 + ab + ac + bc) - (3a + 3b + 3c - abc)\mathfrak{X}^4 \\ &+ (2 + 3ab + 3ac + 3bc)\mathfrak{X}^3 - (2a + 2b + 2c + 3abc)\mathfrak{X}^2 + 2(ab + bc + ac)\mathfrak{X} - 2abc \end{aligned} \tag{7.1}$$

aby był podzielny przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 6\mathfrak{X}^2 + 11\mathfrak{X} - 6$.

Ćwiczenie* 8. Ustal n aby wielomian o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$ dany wzorem

$$f_n(\mathfrak{X}) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{X}^k$$

aby był podzielny przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 + 1$.

Ćwiczenie 9. Oblicz za pomocą algorytmu Euklidesa największy wspólny dzielnik między

- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 2\mathfrak{X}^4 - 22\mathfrak{X}^3 - 8\mathfrak{X}^2 + 117\mathfrak{X} - 90$, $\quad f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 14\mathfrak{X}^4 + 74\mathfrak{X}^3 + 184\mathfrak{X}^2 + 213\mathfrak{X} + 90$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 8\mathfrak{X}^4 + 8\mathfrak{X}^3 - 62\mathfrak{X}^2 - 153\mathfrak{X} - 90$, $\quad f_2(\mathfrak{X}) = 4 + 8\mathfrak{X} + 5\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}^3$.

Ćwiczenie* 10. Dane wielomiany

$$P(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + a\mathfrak{X}^3 + b\mathfrak{X}^2 + c\mathfrak{X} + 1, \qquad Q(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + c\mathfrak{X}^3 + b\mathfrak{X}^2 + a\mathfrak{X} + 1$$

Znajdź warunki dla liczb a, b i c, gdzie $a \neq c$, aby zagwarantować, że $P(\mathfrak{X})$ i $Q(\mathfrak{X})$ mają dwa wspólne pierwiastki. W takim przypadku, oblicz rozwiązania $P(\mathfrak{X}) = 0$ i $Q(\mathfrak{X}) = 0$.

Ćwiczenie 11. Udowodnij, że zbiór liczb postaci: $a + b\sqrt{2}$, gzie a, b są liczbami wymiernymi, jest ciałem liczbowym. Oznaczamy je $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Natomiast, udowodnij, że zbiór liczb postaci $a + b\sqrt[3]{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi, nie jest ciałem liczbowym. Pokazuj, że zbiór liczb postaci $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, gdzie a, b, c są liczbami ymiernymi, jest już ciałem liczbowym.

Ćwiczenie* 12. Zbuduj wszystkie ciała z pięcioma elementami.

Ćwiczenie* 13. Niech a będzie liczbą wymierną i niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Udowodnij, że wielomian o współczynnikach wymiernych

$$\mathfrak{X}^{2^n}(\mathfrak{X} + a)^{2^n} + 1$$

jest nierozkładalny.

Ćwiczenie* 14. Dane trzy liczby zespolone $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ nie na jednej linii, znajdź $z_0 \in \mathbb{C}$ taki, że $f(z_0) \leq f(z)$ dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$, gdzie

$$f(z) = |z_1 - z|^2 + |z_2 - z|^2 + |z_3 - z|^2.$$

Ćwiczenie 15. Znajdź odwrotność liczb zespolonych:

b) $\dfrac{1+i}{1-i} - (1+2i)(2+2i) + \dfrac{3-i}{1+i} + (\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i) - i^3$,

c) $2i(i-1) + \left(\sqrt{3}+i\right)^3 + (1+i)\overline{(1+i)}$.

Ćwiczenie 16. Obliczyć wyrażenie

1. $\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{1410}$,

2. $\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\overline{2i\left(\frac{1}{2}-i\right)}+i^{101}\right]^{1993}$.

3. $\dfrac{(2-3i)^3-(1+i)^2(5-i)}{(4-3i)^2-i(1+2i)^3}$,

Ćwiczenie 17. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu nad ciałem $\mathbb{C}$

1. $-z^3+(7+i)z^2-(12+7i)z+12i$,
2. $z^4-2z^3++(2-i)z^2+2iz-2i$,
3. $z^6-z^4+z^2-1$.

Ćwiczenie 18. Rozwiązać równania:

1. $z\bar{z}+(z-\bar{z})=3+2i$,
2. $i(z+\bar{z})+i(z-\bar{z})=2i-3$,

Ćwiczenie* **19.** Niech z będzie liczbą zespoloną taką, że $|z+1|>2$. Udowodnij, że $|z^3+1|>1$.

Ćwiczenie 20. Niech $f(z):=z^{-1}, g(z):=\bar{z}$ dla $z\in\mathbb{C}^*$. Wykazać, że dla każdego $p>1$ istnieje okrąg $C=C(s;r)\subset\mathbb{C}$ (znaleźć środek s i promień r) zawierający p i niezmiennicy względem f i g, tzn. taki, że $f(C)=C$ i $g(C)=C$.