Rozwiązać układ równań liniowych

$$\frac{dx}{dt} = 2x$$

$$\frac{dy}{dt} = z+y$$

$$\frac{dz}{dt} = y+z$$

Taki układ możemy zapisać w formie macierzowej

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie tego układu ma postać

$$v(t) = \exp(tA)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \text{dla dowolnego} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Aby obliczyć $\exp(tA)$ będziemy sprowadzić A do postaci Jordana. Aby to zrobić, trzeba obliczyć wartości i wektory własne A.

wielomian charakterystyczny $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad p_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-2)\lambda.$$

Widać, że A ma trzy wektory własne z wartościami własnymi $\lambda=3$, $\lambda=2$, $\lambda=0$. Obliczymy wektory własne

$\lambda=3$:

$$\ker(A-3Id)=\ker\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-2&1\\0&1&-2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&1\\0&1&-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}-2y+z=0\\y-2z=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}x \text{ dowolne}\\y=0\\z=0\end{matrix} \Rightarrow \ker(A-3Id)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\lambda=2$

$$\ker(A-2Id)=\ker\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}x=0\\-y+z=0\end{matrix}\right. \Rightarrow \ker(A-2Id)=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\lambda=0$

$$\ker(A-\cancel{Id})=\ker\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}x=0\\y+z=0\end{matrix}\right. \Rightarrow \ker A=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Więc mamy bazę wektorów własnych.

$$v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3_{B'} \arrow[r, "A_{B'B'}"] & \mathbb{R}^3_{B'} \arrow[d, "Id"] \\
\mathbb{R}^3_{B} \arrow[u, "Id"] \arrow[r, "A_{BB}"'] & \mathbb{R}^3_{B}
\end{tikzcd}$$

Przypominamy diagram zmiany bazy pewnego endomorfizmu f. A_{BB} to A, czyli macierz w bazie kanonicznej. $A_{B'B'}$ to macierz endomorfizmu f w bazie nowej

$$\Downarrow$$

$$A_{BB} = Id_{B'B} A_{B'B'} Id_{BB'} \qquad B' = \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Proszę pamiętać, że trzeba korzystać z elementów bazy zawsze w tej samej kolejności. Na przykład, macierz endomorfizmu f w bazie B' i B' ma postać:

$$\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_3) & f(v_2) & f(v_0) \end{array}
\end{array}$$

każda kolumna to obraz pewnego elementu B' w ~~tej~~ kolejności danej w B', czyli v_3, v_2 i na końcu v_0...

Teraz $Id: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ to identyczność. i $Id_{B'B}$ to macierz tego endomorfizmu w bazie B' i B.

$$Id_{B'B} = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ Id(v_3) & Id(v_2) & Id(v_0) \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ v_3 & v_2 & v_0 \end{array}
\end{array}$$

Kolumny są wektorami bazy B' we współrzędnych bazy B.

$Id_{BB'}$ to macierz identyczność w bazach B^* i B'.
czyli $Id_{BB'} = (Id_{B'B})^{-1} \Rightarrow$

$$Id_{BB'} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Skoro $f = Id \circ f \circ Id \Rightarrow$

$$M_{BB} = Id_{B'B} \circ M_{B'B'} \circ Id_{BB'}$$

$$\Rightarrow M_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right) = A$$

Z tego:

$$\exp(tA) = \exp\left(Id_{B'B}(tM_{B'B'})\, Id_{BB'}\right) =$$

$$= Id_{B'B} \exp(tM_{B'B'})\, Id_{BB'}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(1+e^{2t}) \\ 0 & \frac{1}{2}(-1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(1+e^{2t}) \end{pmatrix}$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(-1+e^{4}) \\ 0 & \frac{1}{2}(-1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(1+e^{2t}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

To ćwiczenie można rozwiązać szybciej. Skoro mamy jedną bazę wektorów własnych każdy wektor $v \in \mathbb{R}^3$ można przedstawić jako

$$v = \lambda_1 v_3 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_0$$

Teraz

$$\exp(tA)(\lambda_1 v_3) = \lambda_1 \exp(tA) v_3 = \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} v_3$$

Skoro $A^n v_3 = 3^n v_3$ to

$$\exp(tA)\lambda_1 v_3 = \lambda_1 e^{3t} v_3 .$$

Więc, rozwiązanie ogólne wygląda następująco.

$$v = \exp(tA)(\lambda_1 v_3 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_0)$$

$$= \lambda_1 e^{3t} v_3 + \lambda_2 e^{2t} v_2$$

$$v = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Skoro $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ to współrzędny wektora w bazie B' to.

$$v = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} & 0 \end{pmatrix} Id_{BB'} \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}_{\text{współrzędny w bazie } B.} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(-1+e^{2t}) \\ 0 & \frac{1}{2}(-1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(1+e^{2t}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + y + z \qquad (1)$$
$$\frac{dz}{dt} = -y + z$$

i podać rozwiązanie szczególny z warunkami początkowymi

$$w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wprowadzamy (1) do postaci macierzowej

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie tego równania jest

$$v(t) = \exp(tA)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Musimy obliczyć $\exp(tA)$. Aby tak zrobić obliczymy wielomian charakterystyczny, czyli

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdot$$

$$\Rightarrow \quad p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3 + 2(1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2+2] = (1-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda + 3).$$

Taki wielomian nie ma wszystkich swoich pierwiastków nad $\mathbb{R}$. Natomiast, możemy jeszcze rozwiązać jako liczby zespolone

$$\lambda = 1 \qquad \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \dfrac{2 + 2i\sqrt{2}}{2} = 1 + i\sqrt{2} \\ \lambda_3 = 1 - i\sqrt{2}. \end{cases}$$

Skoro ma trzy wektory własne, wiedzę, że ta macierz jest diagonalizowalna. Możemy teraz wektory własne

$\lambda_1 = 1$ $\quad \ker(A - Id) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z. \end{cases} \Rightarrow \ker A - Id = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\lambda_2 = 1 + i\sqrt{2}$ $\quad \ker(A - \lambda_2 Id) = \ker \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & -i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & -i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & -i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = +i\sqrt{2}\,x \\ y = -i\sqrt{2}\,z \end{cases} \Rightarrow \ker A - \lambda_2 Id = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$x = -z$$

$$\lambda_3 = 1 - i\sqrt{2} \Rightarrow \ker(A - \lambda_3 Id) = \ker \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - \lambda_3 Id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = -x i\sqrt{2} \\ y = i\sqrt{2} z. \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - \lambda_3 Id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ker(A - \lambda_3 Id) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Więc mamy bazę

$$B' = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_{1+i\sqrt{2}}}{\begin{pmatrix} -1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_{1-i\sqrt{2}}}{\begin{pmatrix} -1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

Diagram zamiany bazy to

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^3_B \arrow[r, "f_{BB}"] \arrow[d, "Id"'] & \mathbb{C}^3_B \arrow[d, dash, "Id"] \\ \mathbb{C}^3_{B'} \arrow[r, "f_{B'B'}"'] & \mathbb{C}^3_{B'} \end{tikzcd}$$

gdzie $A = f_{BB}$ to macierz endomorfizmu f w bazach kanonicznych, $A_{B'B'}$ to macierz f w bazach B' i B' i Id to identyczność.

Widać, że

$$
f_{B'B'} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} v_1 = f(v_1) & \lambda_2 v_{1+i\sqrt{2}} = f(v_{1+i\sqrt{2}}) & \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-i\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccc} & & \lambda_3 v_{1-i\sqrt{2}} = f(v_{1-i\sqrt{2}}) \end{array}
\end{array}
$$

Ponadto

$$
Id_{B'B} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} v_1 = Id(v_1) & & v_3 = Id(v_3) \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -i\sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccc} & v_{1+i\sqrt{2}} = Id(v_{1+i\sqrt{2}}) & \end{array}
\end{array}
\Rightarrow Id_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

Skoro $A = f_{BB} = Id_{B'B}\, f_{B'B'}\, Id_{BB'}$ to

$$
\exp(tA) = Id_{B'B} \exp(t f_{B'B'})\, Id_{BB'}
$$

$$
= Id_{B'B} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{t+t\sqrt{2}i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t-it\sqrt{2}} \end{pmatrix} Id_{BB'}
$$

$$
= \begin{pmatrix} e^t \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), & \frac{e^t \sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} & e^t \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \\ -e^t \frac{\sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} & e^t \cos\sqrt{2}t & e^t \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} \\ e^t \sin^2\frac{t}{\sqrt{2}} & -\frac{e^t \sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} & e^t \cos^2\frac{t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
$$

Skoro teraz A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$, rozwiązanie wzoru przedstawić inaczej. Każdy wektor $v \in \mathbb{R}^3$ wzoru przedstawić jako

$$(3) \qquad v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Skoro $v \in \mathbb{R}^3$

$$v = \bar{v} = \bar{\lambda}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \bar{\lambda}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \bar{\lambda}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

To oznacza, że $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$ $\quad \lambda_3 = \bar{\lambda}_2$ i $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3$

więc

$$v = \overset{\mathbb{R}}{\underset{}{\lambda_1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1 + iv_2} + \bar{\lambda}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i } \lambda_2 \in \mathbb{C} \text{ dowolny,}$$

Więc

$$\exp(tA)v = \lambda_1 e^t v_1 + \lambda_2 e^{(1+\sqrt{2}i)t} (v_1 + iv_2) + \bar{\lambda}_2 e^{(1-\sqrt{2}i)t} (v_1 - iv_2)$$

$$\exp(tA)v = \lambda_1 e^t v_1 + \cancel{\lambda_2}\, 2\operatorname{Re}\left(\lambda_2 e^{(1+\sqrt{2}i)t} (v_1 + iv_2)\right)$$

$$\boxed{\lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_2 \in \mathbb{C}}$$

Rozwiązanie z warunkami początkowymi w_1, w_2 i w_3

$$v_1 = \exp(tA)\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix}\cos^2\frac{t}{\sqrt2} & \frac{\sin\sqrt2 t}{\sqrt2} & \sin^2\frac{t}{\sqrt2}\\ -\frac{\sin\sqrt2 t}{\sqrt2} & \cos\sqrt2 t & \frac{\sin\sqrt2 t}{\sqrt2}\\ \sin^2\frac{t}{\sqrt2} & -\frac{\sin\sqrt2 t}{\sqrt2} & \cos^2\frac{t}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

i tak dalej...

Jeżeli korzystamy z (3) trzeba napisać $\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ jako kombinację $v_1, v_{1+iv_2}, v_{1-iv_2}$ i tak dalej