Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\sin 2y}{2(1-2e^{-x})} \qquad (1)$$

To równanie o rozdzielonych zmiennych. Właściwie, widać, że

$$\frac{dy}{3\sin 2y}=\frac{dx}{2(1-2e^{-x})}$$

Trzeba zauważyć, że kiedy tak się piszę możemy podzielić przez zero. Na przykład dla $\boxed{y=\frac{\pi}{2}k}$ $: k\in\mathbb{Z}$ mianownik równa się zero.* To są rozwiązania (1), które możemy stracić na końcu, jeżeli nie zauważymy o pewnych "specjalnych" rozwiązaniach..

Teraz

$$\int\frac{dy}{3\sin 2y}=\int\frac{dx}{2(1-2e^{-x})} \Rightarrow \frac{1}{3}\int\frac{dy}{\cancel{2}\sin y\cos y}=\frac{1}{\cancel{2}}\int\frac{e^x\,dx}{(e^x-2)}.$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{\sin y\,dy}{\sin^2 y\cos y}=\int\frac{e^x\,dx}{e^x-2} \Rightarrow -\frac{1}{3}\ln|\cot y| = \ln|e^x-2|+C_1$$

C_1 – możemy widzieć, że "$C_1=\infty$" w pewnych przypadkach np. $y=\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbb{Z}$

$$|\cot y|=\frac{e^{C_1}}{|(e^x-2)^3|} \Rightarrow \cot y=\pm\frac{e^{C_1}}{(e^x-2)^3} \Rightarrow$$

$$y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{K_2}{(e^x-2)^3}\right)$$

$K_2\in\mathbb{R}$ skoro dla $C_1=-\infty$ $C_2=e^{-\infty}=0$.

* mianownik $1-2e^{-x}$ może równać się zera w pewnym punkcie ale to nie prowadzi do nowych rozwiązań.

Skoro arc tg θ albo arcctg θ ma wiele wartości, np

arc tg $0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, napiszemy

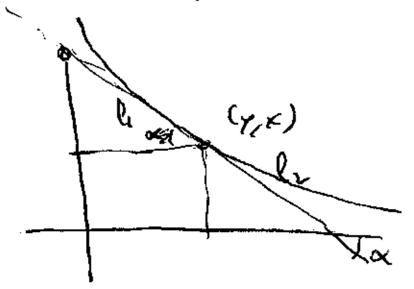
$$y = k\pi + \operatorname{arcctg}\left(\frac{C_2}{(e^x - 2)^3}\right) \qquad \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z} \\ C_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

i założemy, że arcctg $\theta \in [0, 2\pi)$ zawsze.
arc tg $\theta \in$

Ponadto, widać, że dla $C_2 = 0$, arcctg $0 = \frac{\pi}{2}$ i mamy znowu

$$y = \frac{\pi}{2}k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

13.3 Znaleźć równanie krzywej przechodzącej przez punkt $(2,3)$, takiej, że każdy odcinek stycznej do krzywej zawarty między osiami układu współrzędnych jest dzielony na połowę przez punkt styczności.



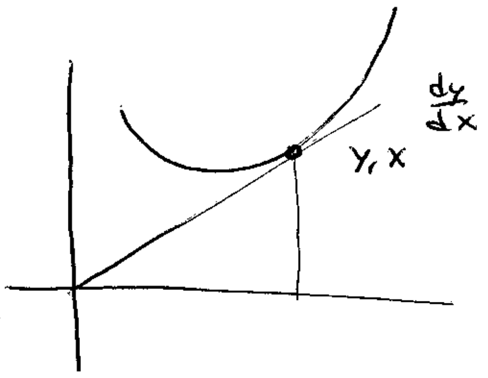
Widać, że

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = \left|\dfrac{x}{\cos\alpha}\right| \\ l_2 = \left|\dfrac{y}{\sin\alpha}\right| \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{x}{\cos\alpha}\right| = \left|\frac{y}{\sin\alpha}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \operatorname{tg}^2\alpha \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{y}{x}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$$

Widać, że kiedy $dy/dx = y/x$ styczna do krzywej tylko ma jedno przecięcie z osiami, np



Wówczas, tylko możemy rozpatrywać

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

To,

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{y_0}\right| = \ln\left|\frac{x_0}{x}\right|$$

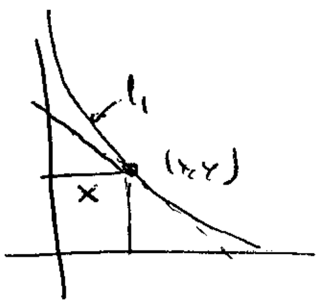
$\Rightarrow \quad y = \pm\frac{y_0 x_0}{x}$ skoro dzielimy, że dla x_0; $y = y_0$ to

$$y = \frac{y_0 x_0}{x}$$

Jeżeli $(x_0, y_0) = (2,3)$, to

$$\boxed{y = \frac{6}{x}}$$

Znaleźć równanie krzywej przechodzącej przez punkt (2,0) takiej, że odcinek każdej stycznej do tej krzywej zawarty między punktem styczności punktem przecięcia z osią Ox jest wielkością stałą i wynosi 2.



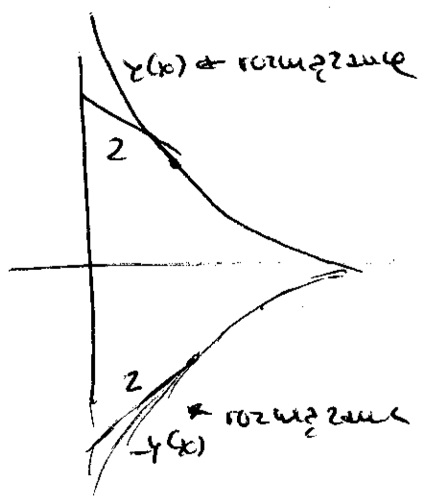
$$l_1 = \left|\frac{x}{\cos\alpha}\right| \Leftrightarrow l_1^2 = \frac{x^2}{\cos^2\alpha}.$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha + 1$$

$$4 = l_1^2 = x^2\left(tg^2\alpha + 1\right) = x^2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right] \Rightarrow$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4}{x^2} - 1 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4-x^2}{x^2}$$

Widać, że to równanie ma sens kiedy $dy/dx \geq 0$ i $dy/dx < 0$. Więc, to równanie nie spełnia twierdzenia istnienia i jednoznaczności i dla każdego punktu początkowego. * $\frac{dy}{dx}$ nie jest określona jako funkcję.



np. $\frac{dy}{dx} = +\sqrt{\frac{4-x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

$\underline{x > 0}$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$\sqrt{4-x^2} = t \Rightarrow \frac{-x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = dt \Rightarrow$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx = -\int_{t_0}^{t} \frac{(4-x^2)\,dt}{x^2} = -\int_{t_0}^{t} \frac{t^2}{4-t^2}\,dt$$

$$= -\int_{t_0}^{t} \left(-1 + \frac{t^2}{4-t^2} + 1\right) dt = \int_{t_0}^{t} dt - \int_{t_0}^{t} \frac{4}{4-t^2}\,dt = t - t_0 - \ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|_{t_0}^{t}$$

$$= t - t_0 - \ln\left|\frac{4-t^2}{(2-t)^2}\right|_{t_0}^{t_0} = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{4-x_0^2} - \ln\frac{x^2}{(2-\sqrt{4-x^2})^2}\Bigg|_{x_0}^{x}$$

$$= \sqrt{4-x^2} - 2\ln\left|\frac{x}{2-\sqrt{4-x^2}}\right| \quad (\text{gdy } x_0 = 2)$$

Jeżeli wybramy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

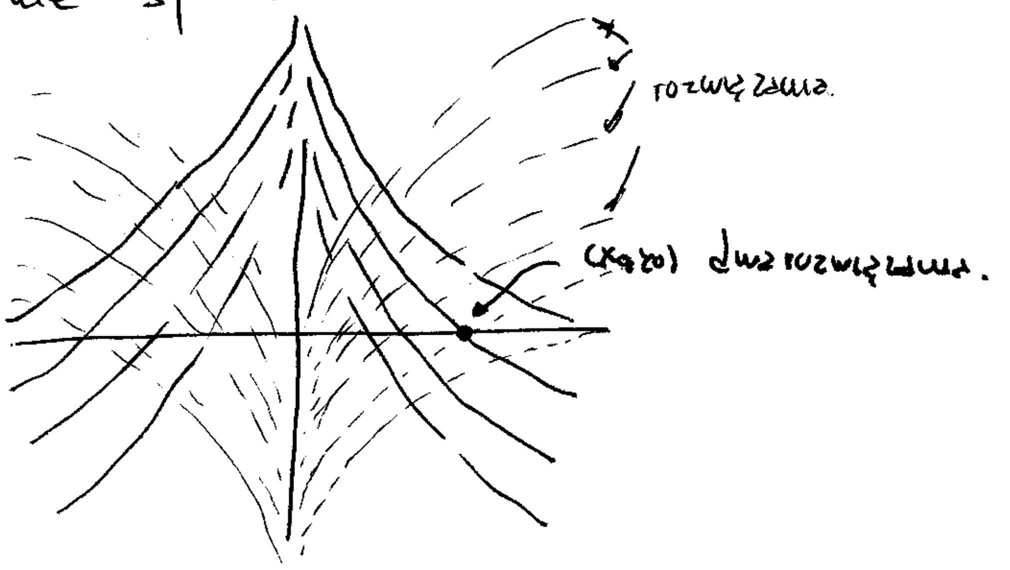
wynika

$$y = -\sqrt{4-x^2} + 2\ln\left|\frac{x}{2-\sqrt{4-x^2}}\right|$$

Dla każdego punktu (x_0, y_0) możemy mieć dwa rozwiązania. Równanie

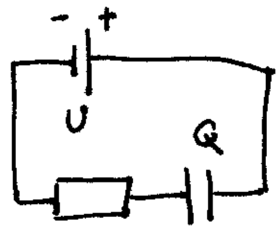
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4-x^2}{x^2}$$

nie spełnia twierdzenia istnienia i jednoznaczności.



VI

Do zacisków źródła o stałym napięciu U w chwili $t=0$ zostaje podłączony obwód zawierający kondensator o pojemności C i opornik o oporze R (elementy połączono szeregowo). Wyznaczyć przebieg zmian natężenia prądu $I(t)$ dla danego obwodu włączonego do źródła. (Drugie prawo Kirchoffa $U = RI - \frac{Q}{C}$)



$\underbrace{R \cdot I}_{V_1}$ $\underbrace{-\frac{Q}{C}}_{V_2}$

$I = -\frac{dQ}{dt}$

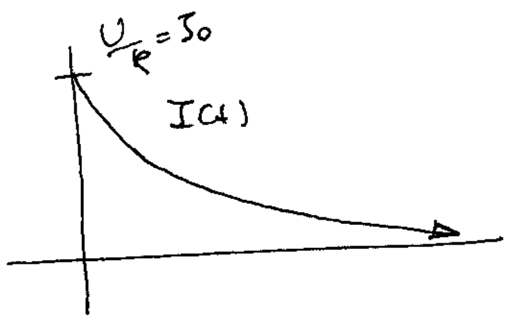
Skoro U jest stała, to

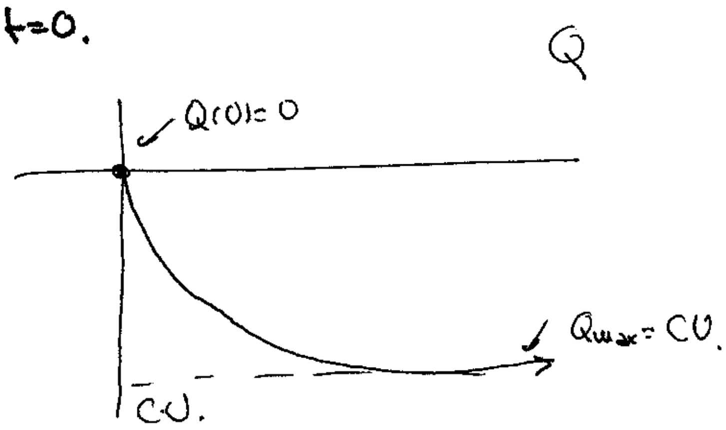
$$0 = \frac{dU}{dt} = R\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}.$$

$$0 = R\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{C} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{I}{RC} \Rightarrow.$$

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{U}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

$I_0 = \frac{U}{R}$ a $t=0$.





$$Q(t) = -\int_0^Q \frac{U}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = -CU\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$