Zadanie 1

a) $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Punktowo:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x}{1+n^3x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2x}{n^3}}{\frac{1}{n^3}+\frac{\cancel{n^3}x^2}{\cancel{n^3}}} = \begin{cases} 0 & x\neq 0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2 \cdot 0}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = 0 & x = 0 \end{cases}$$

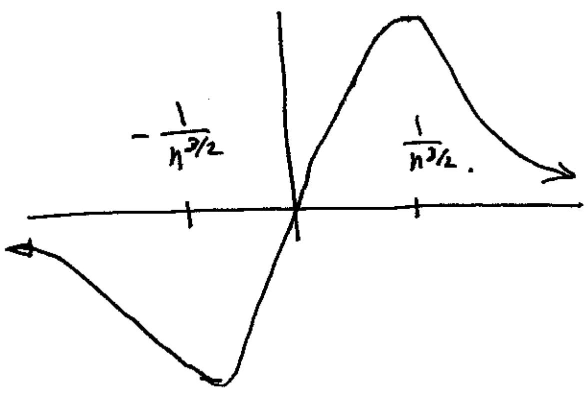
Zobaczymy, czy $f_n \rightrightarrows f$ też. Aby to sprawdzić, skorzystamy z normy jednostajnej:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in X} |f_n(x)|$$

Wiemy, że

$$f_n \rightrightarrows f \iff \lim_{n\to\infty} d_n = 0, \text{ gdzie } d_n = \|f_n - f\|_\infty.$$

W naszym przypadku; musimy zbadać $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty$



$$\frac{df_n}{dx} = \frac{n^2(1+n^3x^2) - n^2x\,2xn^3}{(1+n^3x^2)^2}$$
$$= \frac{n^2 + n^5x^2 - 2x^2n^5}{(1+n^3x^2)^2} = \frac{n^2 - x^2n^5}{(1+n^3x^2)^2}.$$

$\Rightarrow$ f_n ma ekstrema w punktach

$$x = \pm\frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\frac{d^2f_n}{dx^2} = \frac{2n^5x(-3+n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^3} \Rightarrow \left.\frac{d^2f_n}{dx^2}\right|_{x=\pm\frac{1}{n^{3/2}}} = \mp\frac{n^{7/2}}{2}$$

to dla $x = \frac{1}{n^{3/2}}$ mamy maksimum

$x = -\frac{1}{n^{3/2}}$ mamy minimum.

Prawdę mówiąc nie trzeba skorzystać z drugiej pochodnej, wystarcza zauważyć, że

$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$ $\quad f_n(x) > 0$ dla $x > 0$

$f_n(x) < 0$ dla $x < 0$.

Z tego i skoro $\left| f_n\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right| = \left| f_n\left(-\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right| = \frac{n^{1/2}}{2}$

$$\|f_n\|_\infty = \left| f_n\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right| = \frac{n^{1/2}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{2} = +\infty$$

Więc, f_n nie zbiega jednostajnie do $f=0$.

f_N nie zbiega prawie jednostajnie do $f=0$, skoro dla każdego $[a,b] \subset \mathbb{R}$ takiego, że $0 \in [a,b]$ mamy że dla pewnego n_0

$$\frac{1}{n^{3/2}} \in [a,b] \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f_N(x)| = \frac{n^{1/2}}{2}$$

Więc, $\lim_{n\to\infty} d_n^B = \lim_{n\to\infty} \|f_N\|_\infty^B = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_N(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{2} = +\infty$

Z tego $f_N|_B \not\rightrightarrows f$ i nie zbiega jednostajnie f_N do f dla wszystkich zwartych podzbiorów. Więc, f_N nie zbiega niemal jednostajnie do 0.

Zadanie 2 Zbadać zbieżność (punktową, jednostajną, niemal jednostajną) szeregu funkcyjnego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{n^7+x^2} \Rightarrow \quad f_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2 x}{n^7+x^2} \qquad a_n = \frac{n^2 x}{n^7+x^2}$$

Widać, że $a_n' = \dfrac{n^2(n^7+x^2) - n^2 x\, 2x}{(n^7+x^2)^2} \not\Rightarrow \dfrac{n^9 - n^2x^2}{(n^7+x^2)^2}.$

$$a_n' = \frac{n^2 (n^7 - x^2)}{(n^7+x^2)(n^7+x^2)}$$

$$h(x) = \frac{n^7 - x^2}{n^7+x^2} \qquad h'(x) = \frac{-2x(n^2+x^2) - (n^7-x^2)2x}{(n^7+x^2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-2xn^2 - \cancel{2x^3} - 2xn^7 + \cancel{2x^3}}{(n^7+x^2)^2} = \frac{-2x(n^2+n^7)}{(n^7+x^2)^2} = 0 \iff \underline{\underline{x=0}}$$

$$\max_{x\in\mathbb{R}} h(x) = h(0) = 1$$

$$a_n' \le \frac{n^2}{n^7+x^2} \le \frac{1}{n^5} \to 0$$

Więc, z ~~t~~ kryterium Weierstrassa, zdąży jednostajnie do pewnej funkcji. f-cji zdąży punktowo i niemal jednostajnie do tej funkcji.

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \lim_{b\to 0}\int_b^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx$$

Teraz, wiemy że

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^N x^n$$

właściwie, $f_N = \sum_{n=0}^N x^n$ zbiega do $\frac{1}{1-x}$ dla $x<1$ jednostajnie.

Skoro $e^{-x}\in[0,1)$ dla $x\in[b,\infty)$ i $b>0$ to

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^\infty e^{-xn}$$

jednostajnie, czyli $f_n(e^{-x}) \rightrightarrows \frac{1}{1-e^{-x}}$

Skoro xe^{-x} jest ograniczony dla $x\in[0,\infty)$, więc

$$xe^{-x} f_n(e^{-x}) \rightrightarrows \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} \Rightarrow \int_b^\infty xe^{-x}dx = \int_b^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx =$$

$\Uparrow$

Jeżeli g_n są ograniczone i $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow g_n f_n \rightrightarrows g f$.
$\Downarrow$ g i g jest

$$\int_b^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_b^\infty xe^{-x}(+e^{-x})^n\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_b^\infty xe^{-(n+1)x}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}\int_b^\infty (n+1)x e^{-(n+1)x}\, d\underbrace{(n+1)x}_{u} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}\int_b^\infty u e^{-u}\,du$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \underbrace{\lim_{b\to 0}\sum_{n=0}^\infty}_{\text{Można zamienić}} \frac{1}{(n+1)^2}\int_b^\infty u e^{-u}\,du = \lim_{b\to 0}\int_b^\infty u e^{-u}\,du \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \lim_{b\to 0}\int_b^\infty u e^{-u}\,du\left(\frac{\pi^2}{6}\right) = \Gamma(2)\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Zadanie 3 Rozwijając funkcję podcałkowe w szereg

wykazać, że

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x)\cos(kx)\,dx = \frac{\pi}{k!} \quad \text{dla } k=1,2\ldots$$

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x)\cos(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\left(\frac{e^{i\sin x}+e^{-i\sin x}}{2}\right)\cos kx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[e^{\cos x + i\sin x} + e^{\cos x - i\sin x}\right]\cos kx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[e^{e^{ix}} + e^{e^{-ix}}\right]\cos kx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{[e^{ix}]^n}{n!} + \frac{[e^{-ix}]^n}{n!}\right)\cos kx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{ixn}+e^{-ixn}}{n!}\cos kx\,dx$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos xn}{n!}\cos kx\,dx$$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos xn}{n!} \qquad f_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos xn}{n!}$$

$$\| f - f_N \|_\infty = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos xn}{(N+1)!} \right\|_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)!}$$

$$= \frac{1}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} + \dots \right)$$

$$\leq \frac{1}{(N+1)!} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \frac{1}{(N+2)^3} + \dots \right)}_{\text{szereg geometryczny}} = \frac{1}{(N+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{N+2}}$$

$$= \frac{N+2}{(N+1)!\, N+1} \Rightarrow d_n = \| f - f_n \|_\infty \leq \frac{N+2}{(N+1)!\, N+1}$$

$$\lim_{N \to \infty} d_N \leq \lim_{N \to \infty} \frac{N+2}{(N+1)!\, N+1} = 0$$

Więc,

$$f_N \rightrightarrows f$$

i

$$J = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos xn}{n!} \cos kx \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos xn}{n!} \cos kx \, dx .$$

$$\int_0^{2\pi} \cos xn \cos kx \, dx = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \pi & k = n \end{cases}$$

Zadanie 4. Zbadać różniczkowalność odwzorowań i znaleźć pochodną (jeśli istnieje)

$$\phi : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto f(1) + f\left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

Najpierw, obliczymy pochodne kierunkowe. Ich istnienie jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym aby funkcja będzie różniczkowalna*1. Trzeba pamiętać, że przestrzeń $C[0,1]$ jest wyposażona z normą

$$\|\cdot\|_\infty : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

norma jednostajna albo norma supremum

Teraz dany punkt $f_0 \in C[0,1]$ i kierunek $h \in C[0,1]$

$$(D_{f_0}\phi)h = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(f_0+th) - \phi(h)}{t} \ {}^{*2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(f_0+th)(1) + \left[(f_0+th)\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 - f_0(1) - f_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{f_0(1)} + th(1) + \cancel{f_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^2} + t^2h^2\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2th\left(\tfrac{1}{2}\right)f_0\left(\tfrac{1}{2}\right) - \cancel{f_0(1)} - \cancel{f_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} h(1) + 2h\left(\tfrac{1}{2}\right)f_0\left(\tfrac{1}{2}\right) + th^2\left(\tfrac{1}{2}\right) = h(1) + 2h\left(\tfrac{1}{2}\right)f_0\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{(D_{f_0}\phi)(h) = h(1) + 2h\left(\tfrac{1}{2}\right)f_0\left(\tfrac{1}{2}\right)}$$

*1 jednocześnie, pomaga nam ustalić czy funkcja jest różniczkowalna.
*2 istnieje jeszcze inna definicja tej pochodnej. Jeżeli tak się robi, definicję potem trzeba zmienić różniczków.

Teraz, jeżeli funkcja Φ jest różniczkowalna w $f_0 \in C[0,1]$, musi spełniać się, że

$$\lim_{f_0+h\to f_0} \frac{|\Phi(f_0+h)-\Phi(f_0)-(D_{f_0}\Phi)h|}{\|h\|_\infty}=0.$$

W naszym przypadku:

$$\lim_{f_0+h\to f_0}\frac{|\cancel{(f_0+h)}(1)+(f_0+h)^2(\tfrac12)-\cancel{f_0(1)}-f_0^2(\tfrac12)-\cancel{h(1)}-2h(\tfrac12)f_0(\tfrac12)|}{\|h\|_\infty}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|\cancel{f_0^2(\tfrac12)}+h^2(\tfrac12)+\cancel{2f_0(\tfrac12)h(\tfrac12)}-\cancel{f_0^2(\tfrac12)}-\cancel{2h(\tfrac12)f_0(\tfrac12)}|}{\|h\|_\infty}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2(\tfrac12)}{\|h\|_\infty} \qquad \left(h(\tfrac12)\le \sup_{x\in[0,1]}|h(x)|=\|h\|_\infty\right)$$

$$\le \lim_{h\to 0}\frac{\|h\|_\infty^2}{\|h\|_\infty}=\lim_{h\to 0}\|h\|_\infty=0.$$

Więc Φ jest różniczkowalna w każdym punkcie f_0.

Zbadać różniczkowalność odwzorowania

$$T: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$
$$f \longmapsto (Tf)(x) = \int_0^x (1 + f^2(t))dt$$

i znaleźć pochodną (jeśli istnieje):

Dany punkt $f_0 \in C[0,1]$ i kierunek $h \in C[0,1]$, to

$$(D_{f_0}T)(h) = \lim_{s\to 0} \frac{T(f_0+sh) - T(f_0)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\int_0^x [1 + (f_0+sh)^2(t)]dt - \int_0^x [1 + f_0^2(t)]dt}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\int_0^1 [1 + f_0^2 + s^2h^2(t) + 2s\,h(t)f_0(t)]dt - \int_0^x [1 + f_0^2(t)]dt}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s} \int_0^x [s h^2(t) + 2h(t) f_0(t)]dt}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} s \int_0^x h^2(t)dt +$$

$$+ 2 \int_0^x h(t) f_0(t)dt$$

$$= 2 \int_0^x h(t) f_0(t)dt$$

Teraz T jest różniczkowalne w $f_0 \in C[0,1]$ wtedy i tylko wtedy:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| T(f_0+h) - T(f_0) - (D_{f_0}T)(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty}$$

Tutaj trzeba wpisać normy przeciwdziedziny T

Tutaj trzeba wpisać normy ~~przeciw~~ dziedziny T.

$$T(f_0+h) = \int_0^x [1 + f_0^2(t) + h^2(t) + 2h(t) f_0(t)] dt$$

$$T(f_0) = \int_0^x [1 + f_0^2(t)] dt$$

$$(D_{f_0}T)(h) = 2\int_0^x h(t) f_0(t) dt$$

2 τρόπ.

$$I = \lim_{h\to 0} \frac{\| T(f_0+h) - T(f_0) - (D_{f_0}T)(h) \|_\infty}{\|h\|_\infty}.$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\| \int_0^x [\cancel{1} + \cancel{f_0^2(t)} + h^2(t) + \cancel{2h(t)f_0(t)}] dt - \int_0^x [\cancel{1} + \cancel{f_0^2(t)}] dt - 2\int_0^x \cancel{h(t) f_0(t)} dt \|}{\|h\|_\infty}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\| \int_0^x h^2(t) dt \|_\infty}{\|h\|_\infty}.$$

$$|h(t)| \le \sup_{t\in[0,1]} |h(t)| = \|h\|_\infty$$

$$|h(t)|^2 \le \|h\|_\infty^2 \Rightarrow \int_0^x h^2(t) dt \le \int_0^x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{σταθερό.}}}{\|h\|_\infty^2} dt = \|h\|_\infty^2 x$$

$$I = \lim_{h\to 0} \frac{\| \int_0^x h^2(t) dt \|_\infty}{\|h\|_\infty} \le \lim_{h\to 0} \frac{\|h\|^2 \| \overset{x\in[0,1]}{x} \|_\infty}{\|h\|_\infty} = \lim_{h\to 0} \|h\|_\infty = 0.$$

Zadanie 6 Niech $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia równanie Laplace'a $\Delta f=0$ oraz, $u,v:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2 spełniają równania: $u_x=v_y$ i $u_y=-v_x$. Wykazać, że $g(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$ spełnia równanie Laplace'a.

Z założenia, mamy, że

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$$

Teraz,

$$\Delta^2 g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} \qquad (1)$$

Ponadto, korzystając z $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Więc, z (1) mamy, że

$$(2)\ \Delta^2 g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Teraz,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

(3)

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Zastępimy (3) w (2) i wynika, że

$$\Delta^2 g = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$-\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\left[\cancelto{0}{2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}}\right]$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right).$$

$$= \left(\cancelto{0}{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial f}{\partial u}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\right) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0$$

Więc $\underline{\Delta g = 0.}$